

$G_2(q)$ の Schur の指数について

東京都立大学 理学部 大森常佳

1. 序

$G = G_2(q)$ を標数 p の有限体 $\mathbb{F}_q$ ($q = p^f$) 上の (G_2) 型の Chevalley 群とする. G の指標表は $p \neq 2, 3$ の場合は B. Chang と R. Ree [4] によって, $p = 2, 3$ の場合は 榎本氏によって [5], [6] それぞれ与えられた. この講演では次の定理を証明する.

定理 1. $p > 2$ とする. このとき, G のすべての既約指標の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の Schur の指数は 1 に等しい.

$p = 2$ の場合はまだ check していない 3 個の指標を除いて, 他の指標の Schur の指数はすべて 1 である.

以後, 有限群の既約指標 φ に対し, $m_F(\varphi)$ によって φ の (標数 0 の体) F 上の Schur の指数を, $F(\varphi)$ によって,

φ の値を添加して得られる F の拡大体を表わす. $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ はそれぞれ有理整数環と実数体とを表わす.

2. 準備

この節では H によつてひとつの有限群を表わす.

補題 1. φ を H の既約指標, ξ を $\mathbb{Q}$ で実現されるような H の指標とする. このとき

$$m_{\mathbb{Q}}(\varphi) \mid \langle \varphi, \xi \rangle_H,$$

ただし H 上の二つの類関数 α と β に対し

$$\langle \alpha, \beta \rangle_H \stackrel{\text{(def)}}{=} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} \alpha(g) \overline{\beta(g)}$$

($\overline{}$ は複素共役).

証明は例えば [7, Chap. II, (11.4), p. 62] を見よ.

以後、補題 1 の ξ のように、有理数体で実現される指標を単に H の 有理指標 と呼ぶ.

補題 2. x を位数 n の H の元とする. H の元 y で位数が $\varphi(n)$ (φ は Euler の関数), そして y によつ

て生成される巡回群 $\langle y \rangle$ が $\langle x \rangle$ に共役によつて忠実に作用するものが存在するものとする. このとき, H の任意の指標 χ は x において $\mathbb{Z}$ に値を取り, χ が既約ならば $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $\chi(x)$ を割り切る.

$\langle y \rangle$ は $\langle x \rangle$ に忠実に作用しているので, x の位数 n と素であるような各整数 i に対して x^i と x とは $K = \langle y \rangle \cdot \langle x \rangle$ (半直積) において互に共役である. したがつて指標の性質により $\chi(x) \in \mathbb{Z}$ である.

$$(2.1) \quad \chi|_{\langle x \rangle} = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \cdot \lambda$$

と置く. ただし右辺の和は $\langle x \rangle$ のすべての線型指標 λ について取り, a_{λ} は負ではない整数である. 容易にわかるように, 各 λ に対し $\lambda^* = \text{Ind}_{\langle x \rangle}^K(\lambda)$ は K の既約指標であり, $\lambda^*|_{\langle y \rangle}$ は $\langle y \rangle$ の正則表現の指標と一致する.

補題1により $m_{\mathbb{Q}}(\lambda^*) = 1$ であり $\lambda^* \in \mathbb{Z}$ だから λ^* , したがつて $\text{Ind}_{\langle x \rangle}^H(\lambda) = \text{Ind}_K^H(\lambda^*)$ は有理指標である. 再び補題1により, $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $a_{\lambda} = \langle \chi|_{\langle x \rangle}, \lambda \rangle = \langle \chi, \text{Ind}_{\langle x \rangle}^H(\lambda) \rangle$ を割り切る. (2.1) より次の式が得られる.

$$\chi(x)/m_{\mathbb{Q}}(\chi) = \sum_{\lambda} (a_{\lambda}/m_{\mathbb{Q}}(\chi)) \cdot \lambda(x).$$

この式で、右辺は代数的整数であり、左辺は有理数、したがって $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は $\chi(x)$ を割り切る。(証終)。

補題 3. (M. Benard - M. Schacher [1, Theorem 1']).

$\mathbb{Q}(\chi)$ は 1 の原始 $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ 乗根を含む。特に $\chi \in \mathbb{R}$ ならば $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \leq 2$ (Brauer - Speiser の定理)。

補題 4. K を H の部分群, F を標数 0 の体, E を F の有限次拡大体とする. χ と ξ をそれぞれ E に値を取るような H と K の既約指標とする. このとき

$$m_F(\chi) \mid \langle \chi, \text{Ind}_K^H(\xi) \rangle_H \cdot [E : F(\chi)] \cdot m_E(\xi).$$

証明は [7, §11] を見よ.

3. 定理 1 の証明

この節では $p > 2$ とする.

補題 5. u を $p > 3$ のときは G の任意のべき単元 (非元), $p = 3$ のときは正則でないような G の任意のべき単元とする. χ を G の任意の既約指標とする. このとき

$$\chi(u) \in \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad m_Q(\chi) \mid \chi(u).$$

$\bar{k}$ を $\mathbb{F}_q$ の代数的閉包, $\bar{G}$ を $\bar{k}$ 上の (G_2) 型の Chevalley 群とする. $\bar{G}$ は中心が自明であるような半単純な連結線型代数群であり, $G = G_2(q)$ は $\bar{G}$ の $\mathbb{F}_q$ -有理点のなす群と一致する. $\bar{G}$ のべき単元 u が正則であるためには ([3] の記号に従えば) $\bar{G}$ において u が $x_\alpha(1) \times x_\alpha(1)$ に共役であることが条件である. $p > 3$ とする.

p は $\bar{G}$ に関して良い素数で $\bar{G}$ の中心は連結だからこの場合定理は [8] に含まれる. $p = 3$ あるいは $p > 3$ で, u が正則でないときは容易にわかるように u の位数は p であり, $\langle u \rangle$ に忠実に作用するような位数 $\varphi(p) = p-1$ である元 t が存在する. 例えば $p > 3$ で $u = x_\alpha(1)x_{3\alpha+\alpha}(\mu)$ (記号は [3, p. 199]) とすると

$$u^i = x_\alpha(i)x_{3\alpha+\alpha}(i\mu)x_{3\alpha+2\alpha}\left(-\frac{i(i-1)}{2}\mu\right), \quad 1 \leq i \leq p-1, \\ u^p = 1.$$

そこで

$$t = t(v, 1, v)x_\alpha\left(\frac{1-v}{2}\right), \quad \langle v \rangle = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$$

と置けば

$$t^i = r(v^{-i}, 1, v^i) x_a(-\frac{v^i-1}{2}), \quad 1 \leq i \leq p-2,$$

$$t^{p-1} = 1$$

かつ

$$\begin{aligned} t^{-1} u t &= x_a(v) x_{3a+a}(v\mu) x_{3a+2a}(-\frac{v(v-1)}{2}\mu) \\ &= u^v. \end{aligned}$$

他の元についても同様である。(証終).

さて χ を G の既約指標とする. χ に対し $\mathbb{Z}$ の ideal $\mathcal{O}_L(\chi)$ を次のように構成する. すなわち, $p > 3$ のときは, $\mathcal{O}_L(\chi)$ は $\{\chi(u); u \text{ は } G \text{ のべき単元}\}$ によって生成された ideal, $p = 3$ のときは, $\mathcal{O}_L(\chi)$ は $\{\chi(u) \mid u \text{ は正則ではない } G \text{ のべき単元}\}$ によって生成された ideal. 補題 5 により, $\mathcal{O}_L(\chi)$ は確かに $\mathbb{Z}$ の ideal である. $c_\chi > 0$ を $\mathcal{O}_L(\chi)$ の生成元とする. 補題 5 により $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は G_χ を割り切る.

補題 6 ([4], [5]). c_χ は $\chi(e)$ の p -part に等しい. よって $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ は p のべきを割り切る.

定理1を証明する. θ と $\bar{\theta}$ とを次数 $(q^2-1)/3$ の二つの既約指標とする ($p > 3$ のときは [4, p. 412] の記号で

$\theta = \chi_{1q}$, $\bar{\theta} = \overline{\chi_{1q}}$, $p = 3$ のときは [5, p. 242] の記号で $\theta = \theta_{12}(1)$, $\bar{\theta} = \theta_{12}(-1)$). θ と $\bar{\theta}$ 以外の G の指標はすべて $\mathbb{R}$ に値を取るから Brauer-Speiser の定理

(補題3) により, それらの指数は高々2, よって補題6から主張が得られる. 次に θ と $\bar{\theta}$ とは互いに複素共役で

$\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\bar{\theta}) = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ (ζ_3 は1の原始3乗根).

補題3により $m_{\mathbb{Q}}(\theta) = m_{\mathbb{Q}}(\bar{\theta})$ は6を割り切る. よって

$p > 3$ のときは主張は正しい. $p = 3$ とする. [5, p. 197]

で構成された指標 $\theta_7(i)$, $i = \pm 1$ に対し

$$\langle \theta | B, \theta_7(1) \rangle_B = 1,$$

$$\langle \bar{\theta} | B, \theta_7(-1) \rangle_B = 1$$

がそれぞれ成立し $\mathbb{Q}(\theta_7(i)) \subset \mathbb{Q}(\zeta_3)$ であるから, 補題4により ($m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\theta_7(i)) = 1$ は容易にわかる), $m_{\mathbb{Q}}(\theta) = m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\theta) = 1$, $m_{\mathbb{Q}}(\bar{\theta}) = m_{\mathbb{Q}(\zeta_3)}(\bar{\theta}) = 1$. (証明終)

4. $p = 2$ の場合.

$p = 2$ とする. まず $G = G_2(2^f)$ の Gelfand-Graev の指標 Γ_G が有理指標であることを示す. Γ_G は

multiplicity-freeだから, Γ_G の既約成分の Schur の指数はすべて 1 である. これにより [6] において, その次数を q の多項式とみなしたときに次数も次であるような指標の指数は 1 である. u を正則ではない G のべき単元 (すなわち u の位数は 2 のべき) とし, χ を G の既約指標とすると $\chi(u) \in \mathbb{Z}$ であり, かつ $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \chi(u)$ である. また $c_{\chi} = \chi(e)_p$ を見ることも容易である. よって奇数次数の既約指標はすべて指数が 1 である. 更に [2] により, 1_B^G (B は G の Borel 部分群) にあらわれる指標はすべて有理指標である. 実際 [6] の記号に従えば

$$1_B^G = \theta_0 + 2\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5,$$

ここで $\theta_0 = 1_G$, $\theta_5 = \text{St}_G$. $\theta_7^{(1)}$ と $\theta_7^{(2)}$ とは前節の θ , $\bar{\theta}$ と同様に扱うことができる. 以上によつて, 次の三つが残る: θ_1' , θ_2' , θ_3 . なお, これら三つは $\mathbb{R}$ に値を取るのど, 指数は高々 2 である.

文 献

[1] M. Benard and M. Schacher, J. Alg. 22, 1972, p. 378-385.

[2] C. T. Benson and C. W. Curtis, Trans. A. M. S., 165, 1972, p. 251-273.

[3] B. Chang, J. Alg. 9, 1968, p. 190-211.

[4] B. Chang and R. Ree, Instituto Nazionale de Alta Mat., Symp. Mat. Vol. XIII, 1974, p. 395-413.

[5] H. Enomoto, Japan. J. Math. 2, 1976, p. 191-248.

[6] ———, The characters of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of characteristic 2, preprint.

[7] W. Feit, Characters of finite groups, Benjamin, 1967.

[8] Z. Ohmori, Quart. J. Math. Oxford (2), 28, 1977, p. 357-361.