

Boltyanskii-Kodama の例と関連する話題について

小山 晃 (早稲田大学)
Akira Koyama (Waseda University)

概要

定理 (Menger, 1928). 任意のコンパクト距離空間 X, Y について, $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ である. したがって, 特に, $\dim X^2 = \dim(X \times X) \leq 2n$ である.

ここで, $\dim X^2 = \dim(X \times X) = 2n$ であるコンパクト距離空間を (dimensionally) **standard**, **standard** ではないコンパクト距離空間を **exceptional** とよぶことにする.

は「次元論の積定理」としてよく知られている. ここで示されているのは不等式であって等式ではない. 実際, 最初の不等式で等号が成り立たないことは, Pontryagin (1930) が素数 $p \neq q$ に対して 2 次元コンパクト距離空間 Π_p, Π_q , $\dim(\Pi_p \times \Pi_q) = 3$ を構成し, 示された.

一方, 多面体や位相多様体のみならず, すべてのコンパクト ANR が **standard** であり, 上記の Pontryagin の例 Π_p も **standard** である. **exceptional** なコンパクト距離空間の存在は, Boltyanskii (1949) と児玉 (1958) が独立に, 今日「Boltyanskii-Kodama の例」と呼ばれる 2 次元コンパクト距離空間 X , $\dim X^2 = 3$ を構成し, 証明された. しかし, 彼らの原論文は難解である. ここではその例を

K. Nagami, *Dimension Theory*, Pure and Applied Mathematics vol. 37, Academic Press, New York, 1970.

の児玉による Appendix, Cohomological Dimension Theory をもとに再構成し, その本質的な箇所を明確化する.

なお, コホモロジー次元の定義および必要な定理を Appendix にまとめておく.

1 (a, b) -Modifications

二つの連続写像: $X \xleftarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ の **double mapping cylinder** を, 商空間

$$M(f, g) = \left(X \sqcup Y \times [0, 1] \sqcup Z \right) / \sim, \quad \text{ただし, } f(y) \sim (y, 0), \quad g(y) \sim (y, 1) \text{ for } y \in Y$$

と定義する. 例えば, $X = Y$, $f = \text{id}_X$ ならば, $M(f, g)$ は g の **mapping cylinder**, Z が一点空間ならば, $M(f, g)$ は f の **mapping cone** $\text{Cone}(f)$ である. ここで, X, Z は自然に $M(f, g)$ の閉部分集合と同一視する.

連続写像 $Y \ni y \mapsto (y, 1/2) \in M(f, g)$

は自然な埋め込みとなる. また, Y を自然に同一視することで, $M(f, g) = M(f) \cup M(g)$ と見なせる. X を $M(f, g)$ の境界と呼ぶことにして, $\partial M(f, g)$ と書くことにする.

X, Y, Z が多面体, f, g が PL 写像ならば, $M(f, g)$ が X, Z を部分多面体として含む多面体である. さらに, f が X の単体分割 τ_K , Y の単体分割 τ_L について単体的 ならば, $\tau_K \cup \tau_L \subset \tau$ である $M(f, g)$ の単体分割 τ が存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \downarrow h_X & & \downarrow h_Y & & \downarrow h_Z \\
 X' & \xleftarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z'
 \end{array} \quad (D)$$

命題 1.1. (1) 図式 (D) がホモトピー可換ならば, 連続写像 $h : M(f, g) \rightarrow M(f', g')$,

$$h(x) = h_X(x) \quad \text{for all } x \in X \quad \text{and} \quad h(z) = h_Z(z) \quad \text{for all } z \in Z,$$

$$h([y, 1/2]) = [h_Y(y), 1/2] \quad \text{for all } y \in Y$$

が存在する.

(2) 図式 (D) が可換ならば, 連続写像 $h : M(f, g) \rightarrow M(f', g')$ はさらに,

$$h([y, t]) = [h_Y(y), t] \quad \text{for all } (y, t) \in Y \times [0, 1]$$

であるようにとれる.

(1), (2) いずれの場合も h は $M(f, g)$ の境界 X 上で h_X と一致するので, h を h_X の拡張と呼ぶ.

命題 1.1 は次の補題から直ちにわかる.

補題 1.2. 図式 (D) の左四角がホモトピー可換 ならば, 連続写像 $h : M(f) \rightarrow M(f')$,

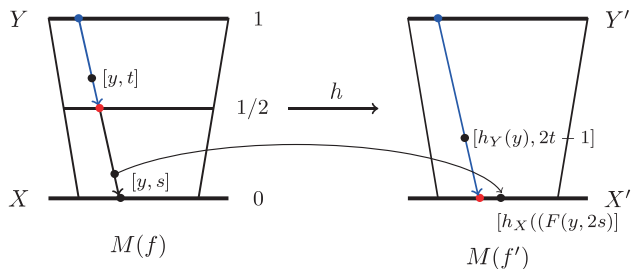
$$h(x) = h_X(x) \quad \text{for all } x \in X \quad \text{and} \quad h(y) = h_Y(y) \quad \text{for all } y \in Y$$

が存在する.

証明. ホモトピー $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X'$, $F_0 = h_X \circ f$, $F_1 = f' \circ h_Y$ をとり, 連続写像 $h : M(f) \rightarrow M(f')$ を次のように定義すればよい.

$$h([y, t]) = \begin{cases} [h_Y(y), 2t - 1] & \text{for } t \in [0, 1/2], \\ [F(y, 2t)] & \text{for } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$h([x]) = [h_X(x)] \quad \text{for } x \in X.$$



□

“ $X = Y = Z = \mathbb{S}^{n-1}$, ただし, $n \geq 2$ ”である場合を考えよう. 任意の整数 $a \neq 0$ に対して, 次数 a の連続写像 $\mu_a : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ とする. ただし, $a = 0$ のとき, $\mu_0 = \text{the constant map}$ とする. $n = 2$ のとき, $M(2, 1)$ は Möbius band なので, 任意の整数 a, b に対して, $M(\mu_a, \mu_b)$ を, タイプ (a, b) の n 次元 **Möbius band** と呼び, $M(a, b)$ と書く. 特に, $M(a, 0)$ は μ_a の mapping cone である.

n 次元 polyhedron $|K|$, $n \geq 2$, 整数 $a \neq 0, b$ とする. 任意の n -単体 Δ に対して, $(M_\Delta, \partial M_\Delta)$ を n -dimensional Möbius band $M(a, b)$ のコピーと subpolyhedron の組として, ∂M_Δ は M_Δ の triangulation T_Δ によって ∂M_Δ と $\partial \Delta$ は単体同型であるようにとる. このとき, 単体同型写像 $h_\Delta : \partial M_\Delta \xrightarrow{\cong} \partial \Delta$ として, M_Δ を $K^{(n-1)}$ に貼り付ける. このようにして得られる n 次元 polyhedron

$$Y = |K^{(n-1)}| \cup \bigcup_{\dim \Delta = n} M_\Delta,$$

として, 連続写像 $f : Y \rightarrow |K|$,

$$f|_{|K^{(n-1)}|} = \text{id}_{|K^{(n-1)}|}, \text{ and } f(M_\Delta \setminus \partial M_\Delta) \subset \Delta \setminus \partial \Delta \text{ for each } n\text{-simplex } \Delta$$

と定義する. この n 次元 polyhedron Y と連続写像 $f : Y \rightarrow |K|$ の組を K の (a, b) -**modification** と呼ぶ.

定義 1.3. 単体的複体 K, L とする. 連続写像 $f : |K| \rightarrow |L|$ が組合せ的 (combinatorial) であるとは, L の任意の部分複体 L_0 について, $f^{-1}(L_0)$ が K の部分複体であることをいう.

K の (a, b) -modification Y の単体分割 τ_Y は, $|\tau_Y^{(n-1)}| \supset |K^{(n-1)}|$ であるようにとると, $f : (Y, \tau_Y) \rightarrow (|K|, K)$ は組合せ的である.

射影的極限のコホモロジー次元を評価するために連続写像のコホモロジー次元の概念と次の補題を用いる.

定義 1.4. 多面体 K, L として, L の単体分割を T_L とする. 連続写像 $f : K \rightarrow L$ について, $\dim_G(f, T) \leq n$ であるとは, T に関する任意の部分多面体 $L_0 \subset L$ と任意の連続写像 $\alpha : L_0 \rightarrow K(G, n)$ に対して, 連続写像 $\beta : K \rightarrow K(G, n)$,

$$\beta|_{f^{-1}(L_0)} = \alpha \circ f|_{f^{-1}(L_0)}$$

が存在することをいう.

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{f} & L & & \\ \uparrow \cup & \dashrightarrow & \uparrow \cup & \searrow \beta & \\ f^{-1}(L_0) & \xrightarrow{f|_{f^{-1}(L_0)}} & L_0 & \xrightarrow{\alpha} & K(G, n) \end{array}$$

命題 1.5. $n > 1$, $\mathbb{S}^{n-1} \xleftarrow{\mu_a} \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\mu_b} \mathbb{S}^{n-1}$ とする.

(1) a は p -divisible ならば, 任意の連続写像 $f : \partial M(a, b) \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ が連続写像 $\tilde{f} : M(a, b) \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ へ拡張できる.

(2) G が p -divisible な可換群, $b = p^j$, $j > 0$ ならば, 任意の連続写像 $f : \partial M(a, b) \rightarrow K(G, n-1)$ が連続写像 $\tilde{f} : M(a, b) \rightarrow K(G, n-1)$ へ拡張できる

証明. (1) $\deg \mu_a$ は p -divisible だから, $\deg(f \circ \mu_a)$ も p -divisible. よって, $f \circ \mu_a \simeq 0$. したがって, 次の図式はホモトピー可換であり, 命題 1.1 から, f は $\bar{f} : M(a, b) \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, n) \times \mathbb{I}$ へ拡張できる. $\tilde{f} = \pi \circ \bar{f} : M(a, b) \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ へ拡張できる.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{S}^{n-1} & \xleftarrow{\mu_a} & \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\mu_b} & \mathbb{S}^{n-1} \\
 \downarrow f & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
 K(\mathbb{Z}_p, n-1) & \xleftarrow{1} & K(\mathbb{Z}_p, n-1) & \xrightarrow{1} & K(\mathbb{Z}_p, n-1)
 \end{array}$$

(2) $[f \circ \mu_a] \in G = \pi_{n-1}(K(G, n-1))$ は p -divisible だから, 連続写像 $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow K(G, n-1)$, $\deg(g \circ \mu_b) = \deg(f \circ \mu_a)$ が存在する. したがって, 次の図式はホモトピー可換であり, (1) と同様に, f は $\tilde{f} : M(a, b) \rightarrow K(G, n-1)$ へ拡張できる.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{S}^{n-1} & \xleftarrow{\mu_a} & \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\mu_b} & \mathbb{S}^{n-1} \\
 \downarrow f & & \downarrow f \circ \mu_a & & \downarrow g \\
 K(G, n-1) & \xleftarrow{1} & K(G, n-1) & \xrightarrow{1} & K(G, n-1)
 \end{array}$$

□

補題 1.6. n 次元多面体 K ($n \geq 2$) とその単体分割 τ , 整数 $a \neq 0$, b とする. K の (a, b) -modification $f_K : Y \rightarrow K$ について,

(1) a は p -divisible ならば, $\dim_{\mathbb{Z}_p}(f_K, \tau) \leq n-1$.

(2) G が p -divisible な可換群, $b = p^j$, $j > 0$ ならば, $\dim_G(f_K, \tau) \leq n-1$.

証明. (1) K の任意の部分多面体 $K_0 \subset K$ と連続写像 $\varphi : K_0 \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ をとる. このとき, $K_0 \supset |\tau^{(n-1)}|$ であると仮定してよい. よって, 任意の n 単体 $\Delta \in \tau$, $\Delta \not\subset K_0$ に対して $\varphi \circ f_K|_{f^{-1}(\partial\Delta)} : f_K^{-1}(\partial\Delta) \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ が, $f_K^{-1}(\Delta)$ へ拡張できることを示せばよい.

$f_K^{-1}(\Delta) = M(a, b) \subset \partial M(a, b) = \partial\Delta = f_K^{-1}(\partial\Delta)$, $f_K|_{f_K^{-1}(\partial\Delta)} = \text{id}_{f_K^{-1}(\partial\Delta)}$ だから, $\varphi|_{\partial M(a, b)} : \partial M(a, b) \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ が $M(a, b)$ へ拡張できればよい. 実際, a は p -divisible だから, 命題 1.5 (1) から, $\varphi|_{\partial M(a, b)}$ は $M(a, b)$ へ拡張できる. したがって, $\dim_{\mathbb{Z}_p}(f_K, \tau) \leq n-1$ である.

同様に, 命題 1.5 (2) が, (2) を導く.

□

2 Boltyanskii-Kodama's examples

この節では, 整数 $n \geq 2$, 素数 p を固定して考えている. 補題 1.6 の整数の組 (a, b) で意味をもつ最小の組はそれぞれ $(p, 0)$, $(1, p)$ であり, 次のように書き下せる.

命題 2.1. n 次元多面体 K ($n \geq 2$) とその単体分割 τ とする.

(1) K の $(p, 0)$ -modification $\psi_K : K_{(p,0)} \rightarrow K$ について, $\dim_{\mathbb{Z}_p}(\psi_K, \tau) \leq n-1$.

(2) K の $(1, p)$ -modification $\varphi_K : K_{(1,p)} \rightarrow K$ について, $\dim_G(\varphi_K, \tau) \leq n-1$ for any p -divisible abelian group G .

n 次元コンパクト多面体と組合せ的連続写像からなる射影列 $\{X_i, f_{i-1,i}\}$ を次のように帰納的に定義する.

$X_0 = (\text{the Moore space } \mathbb{S}^{n-1} \cup_{\mu_p} \mathbb{D}^n)$ とその単体分割 τ_0 , $\text{mesh}[\tau_0] \leq 1$, $\mathbb{S}^{n-1} \subset |\tau_0^{(n-1)}|$ をとる.
 $i > 0$ について, n 次元コンパクト多面体 X_{i-1} と単体分割 τ_{i-1} , $\text{mesh}[\tau_{i-1}] \leq 1/2^{i-1}$ が得られていると仮定する.

Case 1°. $i \geq 1$ が奇数のとき, (X_{i-1}, τ_{i-1}) の $(1, p)$ -modification:

$$f_{i-1,i} = \varphi_{X_{i-1}} : X_i = (X_{i-1})_{(1,p)} \rightarrow X_{i-1}$$

をとり, X_i の単体分割 τ_i , $\text{mesh}[\tau_i] \leq 1/2^i$ をとる.

Case 2°. $i > 1$ が偶数のとき, (X_{i-1}, τ_{i-1}) の $(p, 0)$ -modification:

$$f_{i-1,i} = \psi_{X_{i-1}} : X_i = (X_{i-1})_{(p,0)} \rightarrow X_{i-1}$$

をとり, X_i の単体分割 τ_i , $\text{mesh}[\tau_i] \leq 1/2^i$ をとる.

コンパクト距離空間

$$X(p) = \varprojlim \{X_i, f_{i-1,i}\}$$

を定義して, $X(p)$ が exceptional な n 次元コンパクト距離空間であることを示していく.

今, $\dim X_i = n$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) だから,

$$\dim Z(p) \leq n.$$

$\mathbb{S}^{n-1} \subset |\tau_0^{(n-1)}| \subset |\tau_1^{(n-1)}| \subset \dots$ だから, $\mathbb{S}^{n-1} \subset X(p)$. よって, 任意の可換群 H について,

$$n-1 = \dim_H \mathbb{S}^{n-1} \leq \dim_H X(p) \leq \dim X(p) \leq n.$$

また, 命題 2.1 と次に示す補題 2.2 から,

(1) $\dim_{\mathbb{Z}_p} X(p) = n-1$.

(2) G が p -divisible ならば, $\dim_G X(p) = n-1$.

i.e. $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X(p) = \dim_{\mathbb{Q}} X(p) = n-1$,

任意の素数 $q \neq p$ について, $\dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} X(p) = \dim_{\mathbb{Z}_q} X(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} X(p) = n-1$.

である. (1), (2) は, $X(p)$ が exceptional であることを示すには十分なコホモロジー次元の条件を与えているが, $\dim X(p) = n$ であるか现阶段ではわからない. 実際, $\dim X(p) = n$ を示すにはこのままでは材料不足である. そのために (a, b) -modification の代数的性質を明らかにしていく.

ここで, $\mathcal{C}$ をすべての有限群から成る Serre class, $\mathcal{C}_p$ は有限 p -群から成る Serre class とする.

補題 2.2. コンパクト距離空間 X はコンパクト多面体の射影系 $\{K_i, f_{i,i+1}\}$ の極限とする. おのこの K_i は単体分割 τ_i と距離 ρ_i が与えられ,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{mesh}[f_{k,k+i}(\tau_{k+i})] = 0 \quad \text{for all } k \geq 1$$

とする. このとき, $f_{i,i+1}$ が τ_{i+1} , τ_i に関して組合せ的かつ $\dim_G(f_{i,i+1}, \tau_i) \leq n$ for infinitely many i ならば, $\dim_G X \leq n$ である.

証明. 任意の閉部分集合 $A \subset X$ と連続写像 $\varphi : A \rightarrow K(G, n)$ をとる. $K(G, n)$ は ANR だから,

$$i \geq 1, \text{ 連続写像 } \varphi_i : f_i(A) \rightarrow K(G, n), \varphi_i \circ f_i|_A \simeq \varphi$$

が存在する. さらに,

$$\text{開集合 } U \supset f(A), \text{ 連続写像 } \tilde{\varphi}_i : U \rightarrow K(G, n), \tilde{\varphi}_i|_{f(A)} = \varphi_i$$

が存在する. このとき, 仮定から,

$$j \geq i, \quad f_{i,j}(st(f_j(A), \tau_j)) \subset U$$

が存在する. ここで, K_j の部分複体 $L = st(f_j(A), \tau_j)$ とすると, $\dim_G(f_{j,j+1}, \tau_j) \leq n$ だから,

$$\text{連続写像 } \overline{\varphi}_{j+1} : K_{j+1} \rightarrow K(G, n), \overline{\varphi}_{j+1} : K_{j+1}|_{f_{j,j+1}^{-1}(L)} = \tilde{\varphi}_i \circ f_{i,j+1}|_{f_{j,j+1}^{-1}(L)}$$

が存在する. このとき,

$$(\overline{\varphi}_{j+1} \circ f_{j+1})|_A = \overline{\varphi}_{j+1} \circ (f_{j,j+1}|_A) = \tilde{\varphi}_i \circ f_{i,j+1} \circ (f_{j,j+1}|_A) = \varphi_i \circ (f_i|_A) \simeq \varphi.$$

したがって, $K(G, n)$ の homotopy extension property から, φ は X へ拡張できる. $\square$

命題 2.3. n 次元コンパクト多面体 K とその単体分割 T とする.

- (1) $(p, 0)$ -modification $\psi_K : K_{(p,0)} \rightarrow K$ について, $\psi_K^* : H^n(K) \rightarrow H^n(K_{(p,0)})$ は単射かつ $\mathcal{C}_p$ -同型写像である.
- (2) $(1, p)$ -modification $\varphi_K : Y \rightarrow K$ は同型写像 $\varphi_K^* : H^*(K; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(Y; \mathbb{Z}_p)$. を導く.

証明. (1) 組 $(K, K^{(n-1)})$, $(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)}))$ のコホモロジー完全列から成る可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^{n-1}(\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \longrightarrow & H^n(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \longrightarrow & H^n(K_{(p,0)}) \longrightarrow 0 \\ & & (\psi_K|_{\dots})^* \uparrow & & \psi_K^* \uparrow & & \psi_K^* \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & H^{n-1}(K^{(n-1)}) & \longrightarrow & H^n(K, K^{(n-1)}) & \longrightarrow & H^n(K) \longrightarrow 0 \end{array}$$

定義から, $K_{(p,0)}^{(n-1)} = K^{(n-1)}$, $\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}) = K^{(n-1)}$ かつ $\psi_K|_{K^{(n-1)}} = \text{id}_{K^{(n-1)}}$ だから, $i \leq n-1$ ならば $(\psi_K|_{K^{(n-1)}})^* : H^i(K^{(n-1)}) \cong H^i(\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}))$ かつ $H^n(K^{(n-1)}) = H^n(\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) = 0$. よって,

$$\psi_K^* : H^n(K, K^{(n-1)}) \rightarrow H^n(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)}))$$

が単射かつ $\mathcal{C}_p$ -同型写像であることを示せば十分である.

次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} H^n(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \xleftarrow{\cong} & H^n(K_{(p,0)}/\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) \\ \psi_K^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\psi}_K^* \\ H^n(K, K^{(n-1)}) & \xleftarrow[\cong]{} & H^n(K/K^{(n-1)}) \end{array}$$

ただし, 同型写像は射影 $K_{(p,0)} \rightarrow K_{(p,0)}/\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})$, $K \rightarrow K/K^{(n-1)}$ から導かれる.

連続写像 $\tilde{\psi}_K : K_{(p,0)}/\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}) \rightarrow K/K^{(n-1)}$ は ψ_K から導かれる.

$K/K^{(n-1)}$ は n 次元球面のブーケ $\bigvee_{\Delta} \mathbb{S}_{\Delta}^n$, $K_{(p,0)}/\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})$ は $\mu_p : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ の mapping cone $\text{Cone}(\mu_p)_{\Delta}$ のブーケ $\bigvee_{\Delta} \text{Cone}(\mu_p)_{\Delta}$ である.

$$\begin{array}{ccccc} (K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \longrightarrow & (K_{(p,0)}/\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}), *) & \xlongequal{\quad} & (\bigvee_{\Delta} \text{Cone}(\mu_p)_{\Delta}, *) \\ \psi_K \downarrow & & \tilde{\psi}_K \downarrow & & \bigvee_{\Delta} \tilde{\psi}_K|_{\text{Cone}(\mu_p)_{\Delta}} \downarrow \\ (K_{(p,0)}, K^{(n-1)}) & \longrightarrow & (K_{(p,0)}/K^{(n-1)}, *) & \xlongequal{\quad} & (\bigvee_{\Delta} \mathbb{S}_{\Delta}^n, *) \end{array}$$

おのおのの Δ について, $\psi_K(\text{Cone}(\mu_p)_{\Delta}) \subset \mathbb{S}_{\Delta}^n$ だから, $\tilde{\psi}_K|_{\text{Cone}(\mu_p)_{\Delta}} = \tilde{g}_{\Delta}$.

一方, 準同形写像 $(\tilde{\psi}_K|_{\text{Cone}(\mu_p)})^* : H^n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H^n(\text{Cone}(\mu_p))$ は, $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}$ に対応する. よって, $(\tilde{\psi}_K|_{\text{Cone}(\mu_p)})^*$ は, 単射かつ $\text{Coker}(\tilde{\psi}_K|_{\text{Cone}(\mu_p)})^* = \mathbb{Z}_p$.

$$\begin{array}{ccc} H^n(K_{(p,0)}/\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{\Delta} H^n(\text{Cone}(\mu_p)_{\Delta}) \\ \tilde{\psi}_K^* \uparrow & & \uparrow \bigoplus_{\Delta} \tilde{g}_{\Delta}^* \\ H^n(K_{(p,0)}/K^{(n-1)}) & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{\Delta} H^n(Sp_{\Delta}^n) \end{array}$$

したがって, $\tilde{\psi}_K^* : H^n(K/K^{(n-1)}) \rightarrow H^n(K_{(p,0)}/\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}))$ は単射かつ $\mathcal{C}_p$ -同型写像である.

(2) n 次元多面体 P の n -単体 Δ の対して, Δ に関する $(1, p)$ -modification $\varphi : \tilde{P} = (P \setminus \text{Int } \Delta) \cup M(1, p) \rightarrow P$ として,

$$\varphi^* : H^n(P; \mathbb{Z}_p) \cong H^n(\tilde{P}; \mathbb{Z}_p)$$

であることを示す. $(\tilde{P}; P \setminus \text{Int } \Delta, M(1, p))$, $(P; P \setminus \text{Int } \Delta, \Delta)$ の Mayer-Vietoris 完全列の可換図:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{n-1}(P \setminus \text{Int } \Delta; \mathbb{Z}_p) \oplus H^{n-1}(M(1, p); \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{k_1^* - k_2^*} & H^{n-1}(\partial \Delta; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^n(\tilde{P}; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^n(P \setminus \text{Int } \Delta; \mathbb{Z}_p) \\ \uparrow & & \parallel & & \uparrow f^* & & \parallel \\ H^{n-1}(P \setminus \text{Int } \Delta; \mathbb{Z}_p) \oplus H^{n-1}(\Delta; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{k_1^*} & H^{n-1}(\partial \Delta; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^n(P; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^n(P \setminus \text{Int } \Delta; \mathbb{Z}_p), \end{array}$$

ただし, 包含写像 $k_1 : \partial \Delta \hookrightarrow P \setminus \text{Int } \Delta$, $k_2 : \partial \Delta \hookrightarrow M(1, p)$ とする.

を考えると, $k_2^* : H^{n-1}(M(1, p)) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z} = H^{n-1}(\partial \Delta)$ だから, $k_2^* = 0 : H^{n-1}(M(1, p); \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n-1}(\partial \Delta; \mathbb{Z}_p)$. したがって, Five Lemma から, $\varphi^* : H^n(P; \mathbb{Z}_p) \cong H^n(\tilde{P}; \mathbb{Z}_p)$.

上の fact を P の n -単体の数に関して帰納的に用いると,

$$\varphi_K^* : H^n(K; \mathbb{Z}_p) \cong H^n(K_{(1,p)}; \mathbb{Z}_p)$$

であることがわかる. □

定理 2.4. $\dim X(p) = n$.

証明には次の補題が必要にあるが, 仮定して定理を証明する.

補題 2.5. X, K を n 次元コンパクト多面体とする. 連続写像 $f : X \rightarrow K$ について,

$$f_{\mathbb{Z}_p}^* : H^n(K; \mathbb{Z}_p) \cong H^n(X; \mathbb{Z}_p) \quad \text{かつ} \quad H^n(K) = \text{Tor } H^n(K)$$

ならば, $f^* : H^n(K) \rightarrow H^n(X)$ は $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像である. ここで, $\mathcal{C}_{(p)}$ はすべての q -torsion 群, $q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}$ から成る Serre class とする.

定理 2.4 の証明. $H^n(X(p)) \neq 0$ を示せば十分である.

$$H^n(X_0) = H^n(\mathbb{S}^{n-1} \cup_{\mu_p} \mathbb{D}^n) = \mathbb{Z}_p.$$

命題 2.3 (2) と補題 2.5 から, $f_{0,1}^* : H^n(X_0) \rightarrow H^n(X_1)$ は $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像. よって, $f_{0,1}^*$ は単射準同形写像である. また, $\text{Coker } f_{0,1}^* = H^n(X_1)/f_{0,1}^*(\mathbb{Z}_p) \in \mathcal{C}_{(p)}$ だから, $H^n(X_1)$ は有限群. よって,

$$f_{0,1}^*|_{\mathbb{Z}_p} : \mathbb{Z}_p \cong f_{0,1}^*(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \leq H^n(X_1) \quad (1.1)$$

$$H^n(X_1) = \text{Tor } H^n(X_1) \quad (1.2)$$

次に, 命題 2.3 (1) から, $f_{1,2}^* : H^n(X_1) \rightarrow H^n(X_2)$ は単射準同形写像かつ $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像. よって,

$$f_{1,2}^*|_{\mathbb{Z}_p} : \mathbb{Z}_p \cong f_{1,2}^*(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \leq H^n(X_2) \quad (2.1)$$

$$H^n(X_2) = \text{Tor } H^n(X_2) \quad (2.2)$$

よって, 帰納的に $i \geq 1$ について, i が奇数ならば命題 2.3 (2) と補題 2.5, i が偶数ならば命題 2.3 (1) を用いて次のことがわかる.

$$f_{i-1,i}^*|_{\mathbb{Z}_p} : \mathbb{Z}_p \cong f_{i-1,i}^*(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \leq H^n(X_i) \quad (i.1)$$

$$H^n(X_i) = \text{Tor } H^n(X_i) \quad (i.2)$$

である. したがって, $\mathbb{Z}_p \leq H^n(X(p)) = \varinjlim \{H^n(X_i), f_{i-1,i}^*\}$.

□*Proof of Theorem 2.4*

補題 2.5 の証明. $\dim X = \dim K = n$ だから, 普遍係数定理から, $f_{\mathbb{Z}_p}^*$ と $f^* \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}_p}$ を同一視できる.

$$\begin{array}{ccc} H^n(X; \mathbb{Z}_p) & \xleftarrow{\cong} & H^n(X) \otimes \mathbb{Z}_p \\ f_{\mathbb{Z}_p}^* \uparrow & & \uparrow f^* \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}_p} \\ H^n(K; \mathbb{Z}_p) & \xleftarrow{\cong} & H^n(K) \otimes \mathbb{Z}_p \end{array}$$

今, 完全列:

$$H^n(K) \xrightarrow{f^*} H^n(X) \longrightarrow \text{Coker } f^* \longrightarrow 0$$

と $\mathbb{Z}_p$ とのテンソル積をとると次の完全列が得られる.

$$H^n(K) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f_{\mathbb{Z}_p}^*} H^n(X) \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow \text{Coker } f^* \otimes \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

このとき, $f_{\mathbb{Z}_p}^*$ は同型写像だから, $\text{Coker } f^* \otimes \mathbb{Z}_p = 0$. $H^n(X)$ は有限生成可換群だから, $\text{Coker } f^*$ も有限生成可換群. よって, $\text{Coker } f^* \in \mathcal{C}_{(p)}$.

また, $\text{Coker } f^*$ は有限 torsion 群であり, $H^n(K)$ は有限 torsion 群だから, $H^n(X)$ は有限 torsion 群である. よって,

$$H^n(K) = H_1 \oplus G_1, \quad H^n(X) = H_2 \oplus G_2, \quad \text{ただし, } H_1, H_2 \in \mathcal{C}_p, G_1, G_2 \in \mathcal{C}_{(p)}$$

と表せる. このとき, $f^*(H_1) \subset H_2$, $f^*(G_1) \subset G_2$ であり,

$$f^* = (f^*|_{H_1}) \oplus (f^*|_{G_1}) : H_1 \oplus G_1 \longrightarrow H_2 \oplus G_2.$$

よって, $\text{Coker } f^* \in \mathcal{C}_{(p)}$ だから, $f^*(H_1) = H_2$ である. さらに, $G_1, G_2 \in \mathcal{C}_{(p)}$ だから

$$f_{\mathbb{Z}_p}^* = f^* \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}_p} = ((f^*|_{H_1}) \oplus (f^*|_{G_1})) \otimes \mathbb{Z}_p = (f^*|_{H_1}) \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}_p}.$$

よって, $f^* \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}_p}$ は同型写像なので,

$$\text{Ker}(f^* \otimes \text{id}_{\mathbb{Z}_p}) = (\text{Ker } f^*|_{H_1}) \otimes \mathbb{Z}_p = 0.$$

したがって, $H_1 \in \mathcal{C}_p$ だから, $\text{Ker } f^*|_{H_1} = 0$. であり, $\text{Ker } f^* = \text{Ker } f^*|_{G_1} \leq G_1 \in \mathcal{C}_{(p)}$. ゆえに, f^* は $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像である. $\square_{\text{Proof of Lemma 2.5}}$

定理 2.6 (Boltysanskii-Kodama). $\dim X(p) = n$ であり, $X(p)$ は次のコホモロジー次元をもつ:

- (i) $\dim_{\mathbb{Z}_p} X(\mathbf{p}) = \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X(\mathbf{p}) = \dim_{\mathbb{Q}} X(\mathbf{p}) = n - 1 < n = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X(\mathbf{p}) = \dim X(p)$,
- (ii) p と異なる任意の素数 q について, $\dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} X(\mathbf{p}) = \dim_{\mathbb{Z}_q} X(\mathbf{p}) = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} X(\mathbf{p}) = n - 1$.

したがって, 定理 A.11 と定理 A.13 から, $X(\mathbf{p})$ が exceptional なコンパクト距離空間である.

系 2.7 (Boltysanskii-Kodama). $\dim X(\mathbf{p})^2 = 2n - 1$.

注意 2.8. 児玉の構成 (40-8 Theorem) では, 素数 p に対して, 数列 $(p, p^2, p^4, \dots, p^{2^i}, \dots)$ に対して, 2次元 Möbius band $M(1, p)$ から $(p^{2^{i-1}}, p^{2^i})$ -modifications を繰り返して M_{Q_p} を構成している. このような列を考えた理由は, $\dim M_{Q_p} \geq 2$ を示す必要があったためであった. Appendix (40-8 Theorem) における証明は,

40-5 Lemma. (1) $H^n(M(a, b), \partial M(a, b)) = \mathbb{Z}_b$.

(2) それぞれの生成元 $\beta_n \in H^n(M(a, b), \partial M(a, b))$, $\alpha_n \in H^n(\Delta, \partial \Delta)$ とすると, $f_\Delta^*(\alpha_n) = \pm a \cdot \beta_n$, ただし, $f_\Delta^* = (f|_{M_\Delta})^* : H^n(\Delta, \partial \Delta) \longrightarrow H^n(M(a, b), \partial M(a, b))$.

および列 $(p, p^2, p^4, \dots, p^{2^i}, \dots)$ の性質を利用して M_{Q_p} の閉部分集合の組 $(L, \dot{L}), \check{H}^2(L, \dot{L}; \mathbb{Z}_{(p)}) \neq 0$ の存在を示している. この事実から,

$$2 \leq \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} L \leq \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} M_{Q_p} \leq \dim M_{Q_p} \leq 2$$

したがって, $\dim M_{Q_p} = 2$ を導いた.

実際, L は, $M(1, p)$ の適当な 2 単体 σ をとり, $(L, \dot{L}) = (\pi_1^{-1}(\sigma), \pi_1^{-1}(\dot{\sigma}))$ としている. ここで, 2 単体 σ の $(1, p)$ -modification は Moore space $\mathbb{S}^1 \cup_{\mu_p} \mathbb{D}^2$ だから, $n = 2$ の場合に構成した $X(p)$ と同相である. よって, 本質的に同じ構成と証明をしたいえる.

3 Other examples

Pontryagin's example

Pontryagin (1930) がおのおのの素数 p に対して構成した 2 次元コンパクト距離空間 Π_p は

$$\text{異なる素数 } p, q \text{ について, } \dim(\Pi_p \times \Pi_q) = 3$$

という性質をもち, 次元論における重要な例「 $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ が成り立たない」である. ここで本質的なことは次のコホモロジー次元をもつことであった.

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} \Pi_p = 2, \text{ かつ } G \text{ が } p\text{-divisible ならば, } \dim_G \Pi_p \leq 1$$

$$\text{よって, } \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} \Pi_p = \dim_{\mathbb{Q}} \Pi_p = 1,$$

$$\text{任意の素数 } q \neq p \text{ について, } \dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} \Pi_p = \dim_{\mathbb{Z}_q} \Pi_p = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} \Pi_p = 1.$$

整数 $n \geq 2$ と素数 p について, 同様なタイプのコホモロジー次元:

$$\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} Y(p) = \dim_{\mathbb{Q}} Y(p) = n - 1 < n = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y(p),$$

$$\text{任意の素数 } q \neq p \text{ について, } \dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_q} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} Y(p) = n - 1.$$

をもつ n 次元コンパクト距離空間 $Y(p)$ を n 次元 **Pontryagin** コンパクト距離空間と呼ぶ.

n 次元コンパクト多面体と組合せの連続写像からなる射影列 $\{Y_i, g_{i-1,i}\}$ を次のように帰納的に定義する.

$Y_0 = \mathbb{S}^n$ とその単体分割 τ_0 , $\text{mesh}[\tau_0] \leq 1$ をとる.

$i > 0$ について, n 次元コンパクト多面体 Y_{i-1} と単体分割 τ_{i-1} , $\text{mesh}[\tau_{i-1}] \leq 1/2^{i-1}$ が得られていると仮定する.

(Y_{i-1}, τ_{i-1}) の $(1, p)$ -modification:

$$g_{i-1,i} = \varphi_{Y_{i-1}} : Y_i = (Y_{i-1})_{(1,p)} \longrightarrow Y_{i-1}$$

をとり, Y_i の単体分割 τ_i , $\text{mesh}[\tau_i] \leq 1/2^i$ をとる.

よって, n 次元コンパクト多面体と $(1, p)$ -modifications からなる射影列 $\{Y_i, g_{i-1,i}\}$ が得られるので, コンパクト距離空間

$$Y(p) = \varprojlim \{Y_i, g_{i-1,i}\}$$

を定義して, $Y(p)$ が n 次元 Pontryagin コンパクト距離空間であることを示す.

命題 2.3 (2) から,

$$\check{H}^n(Y(p); \mathbb{Z}_p) \cong \check{H}^n(Y_1; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p.$$

また, 命題 2.1 (2) から,

$$\text{可換群 } G \text{ が } p\text{-divisible ならば, } \dim_G Y(p) \leq n - 1.$$

したがって, これらは次のようにまとめられる.

定理 3.1 (Pontryagin). 整数 $n \geq 2$ と素数 p について, n 次元コンパクト距離空間 $Y(p)$ は次のコホモロジー次元をもつ:

- (i) $\dim_{\mathbb{Z}_p^\infty} Y(p) = \dim_{\mathbb{Q}} Y(p) = n - 1 < n = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} Y(p)$,
- (ii) p と異なる任意の素数 q について, $\dim_{\mathbb{Z}_q^\infty} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_q} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} Y(p) = n - 1$.

異なる素数 p, q とする. このとき, 任意の素数 r について,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}_{(r)}}(Y(p) \times Y(q)) &= 2n - 1 && \text{if } r = p \text{ or } r = q, \\ \dim_{\mathbb{Z}_{(r)}}(Y(p) \times Y(q)) &= 2n - 2 && \text{if } r \neq p, q. \end{aligned}$$

したがって,

系 3.2 (Pontryagin). 任意の素数 $p \neq q$ に対して, $\dim(Y(p) \times Y(q)) = 2n - 1$.

注意 3.3. 定理 A.13 から, Pontryagin の例 $Y(p)$ は *exceptional* ではない. i.e. $\dim Y(p)^2 = 2n$.

Other kind of examples

任意の素数が必ず無限回現れる素数からなる列 $\mathbf{p} = \{p_i\}$ をとる.

$W_0 = \mathbb{S}^n$ として, W_0 の単体分割 T_0 , $\text{mesh}[T_0] \leq 1$ は, 赤道 $\mathbb{S}^{n-1}$ は (W_0, T_0) の $(n-1)$ 次元部分複体であるようにとる.

$i > 0$ について, n 次元コンパクト多面体 W_{i-1} と単体分割 τ_{i-1} , $\text{mesh}[\tau_{i-1}] \leq 1/2^{i-1}$ が得られていると仮定する. ここで, (W_{i-1}, τ_{i-1}) の $(p_i, 0)$ -modification:

$$h_{i-1,i} = \psi_{W_{i-1}} : W_i = (W_{i-1})_{(p_i,0)} \longrightarrow W_{i-1}$$

をとり, W_i の単体分割 T_i , $\text{mesh}[T_i] \leq 1/2^i$ をとる. このとき, 命題 2.1 (1), 命題 2.3 (1) から, $h_{i-1,i} : W_i \longrightarrow W_{i-1}$ は次の性質をもつ.

$$\dim_{\mathbb{Z}_{p_i}}(h_{i-1,i}, \tau_{i-1}) \leq n - 1 \tag{C(i)}$$

$$h_{i-1,i}^* : H^n(W_{i-1}) \longrightarrow H^n(W_i) \text{ は単射かつ } \mathcal{C}_{p_i}\text{-同型写像} \tag{D(i)}$$

帰納的にして n 次元コンパクト多面体と組合せの連続写像からなる射影列 $\{W_i, h_{i-1,i}\}$ が得られるので, コンパクト距離空間

$$W = \varprojlim \{W_i, h_{i-1,i}\}$$

を定義する.

このとき, Boltyanskii-Kodama の例と同様に $\mathbb{S}^{n-1}$ の逆像を考えると, 部分空間 $W_0 \subset W(p)$, $W_0 \cong \mathbb{S}^{n-1}$ が存在する. よって, 任意の可換群 G について,

$$n-1 \leq \dim_G W_0 \leq \dim_G W(p) \leq \dim W(p) \leq n.$$

よって, 性質 (C_i) , 数列 $\mathbf{p}$ の取り方と Bockstein の不等式から,

$$\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} W = \dim_{\mathbb{Z}_p} W = n-1 \quad \text{for every prime } p.$$

Claim 1. $\check{H}^n(W; \mathbb{Q}) \neq 0$.

Proof of Claim 1. すべての $i \geq 1$ について $h_{i-1,i}^* : H^n(W_{i-1}) \rightarrow H^n(W_i)$ は, 条件 $(D(i))$ から, $\mathcal{C}$ -同型写像. また, 普遍係数定理:

$$\begin{array}{ccc} H^n(W_i) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\cong} & H^n(W_i; \mathbb{Q}) \\ h_{i-1,i}^* \otimes \mathbb{Q} \uparrow & & \uparrow (h_{i-1,i}^*)_{\mathbb{Q}} \\ H^n(W_{i-1}) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow[\cong]{} & H^n(W_{i-1}; \mathbb{Q}) \end{array}$$

から, $(h_{i-1,i}^*)_{\mathbb{Q}} : H^n(W_{i-1}; \mathbb{Q}) \rightarrow H^n(W_i; \mathbb{Q})$ は, $h_{i-1,i}^* \otimes \mathbb{Q} : H^n(W_{i-1}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^n(W_i) \otimes \mathbb{Q}$ と同一視できる. よって,

$$h_{i-1,i}^* \otimes \mathbb{Q} : H^n(W_{i-1}) \otimes \mathbb{Q} \cong H^n(W_i) \otimes \mathbb{Q}$$

を示せば, $\check{H}^n(W; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ が得られる.

$H^n(W_j)$ は有限生成可換群だから, $H^n(W_j) = H^n(W_j) / \text{Tor } H^n(W_j) \oplus \text{Tor } H^n(W_j)$ と表され,

$$\begin{aligned} h_{i-1,i}^* : [H^n(W_{i-1}) / \text{Tor } H^n(W_{i-1})] \oplus \text{Tor } H^n(W_{i-1}) \\ \longrightarrow [H^n(W_i) / \text{Tor } H^n(W_i)] \oplus \text{Tor } H^n(W_i) \end{aligned}$$

について, $h_{i-1,i}^*(\text{Tor } H^n(W_{i-1})) \subset \text{Tor } H^n(W_i)$. 一方,

$$h_{i-1,i}^*(H^n(W_{i-1}) / \text{Tor } H^n(W_{i-1})) \not\subset H^n(W_i) / \text{Tor } H^n(W_i)$$

ならば, $H^n(W_{i-1}) / \text{Tor } H^n(W_{i-1}) = \bigoplus_{\text{finite}} \mathbb{Z}$ だから, $0 \neq \text{Ker } h_{i-1,i}^* \cap [H^n(W_{i-1}) / \text{Tor } H^n(W_{i-1})]$ は有限生成自由可換群. ところが, $\text{Ker } h_{i-1,i}^* \in \mathcal{C}$ に矛盾する. よって,

$$h_{i-1,i}^*(H^n(W_{i-1}) / \text{Tor } H^n(W_{i-1})) \subset H^n(W_i) / \text{Tor } H^n(W_i).$$

よって, $h_{i-1,i}^*$ は

$$\alpha \oplus \beta : [H^n(W_{i-1}) / \text{Tor } H^n(W_{i-1})] \oplus \text{Tor } H^n(W_{i-1}) \longrightarrow [H^n(W_i) / \text{Tor } H^n(W_i)] \oplus \text{Tor } H^n(W_i)$$

と準同形写像の直和へ分解できる. このとき, $h_{i-1,i}^*$ は $\mathcal{C}$ -同型写像だから, α は単射かつ $\text{Coker } \alpha \in \mathcal{C}$. したがって,

$$h_{i-1,i}^* \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}} = \alpha \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}} : [H^n(W_{i-1}) / \text{Tor } H^n(W_{i-1})] \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow [H^n(W_i) / \text{Tor } H^n(W_i)] \otimes \mathbb{Q}$$

は同型写像である.

□*Proof of Claim 1*

したがって,

$$\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} W = \dim_{\mathbb{Q}} W = n \quad \text{for every prime } p.$$

定理 3.4 (Boltysanskii-Kodama). 任意の $n \geq 2$ について, 次の条件を満たす n 次元コンパクト距離空間 W が存在する.

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}_p} W &= \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} Z(p) = n - 1, \\ \dim_{\mathbb{Q}} W &= \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} W = n \quad \text{for every prime } p \end{aligned}$$

素数 p をとる. p と異なるすべての素数が必ず無限回現れる素数 $p_i \neq p$ からなる列 $\mathbf{p} = \{p_i\}$ をとる. この点列 $\mathbf{p}$ について上述と同様な構成を行い, n 次元コンパクト距離空間

$$W(p) = \varprojlim \{W_i, h_{i-1,i}\}$$

を定義する. このとき, 同様にして次のことがわかる.

$$\begin{aligned} \text{すべての素数 } q \neq p \text{ について, } n - 1 &= \dim_{\mathbb{Z}_q} W(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} W(p) < \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} W(p) = n, \\ \dim_{\mathbb{Q}} W(p) &= \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} W(p) = n. \end{aligned}$$

Claim 2. $\check{H}^n(W(p); \mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Proof of Claim 2. 証明は *Claim 1* に倣う.

数列 $\mathbf{p}$ の取り方から, すべての $i \geq 1$ について, $h_{i-1,i}^* : H^n(W_{i-1}) \rightarrow H^n(W_i)$ が $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像であることがわかる. よって, $H^n(W_0) = \mathbb{Z}$ から,

$$H^n(Y_i) = \mathbb{Z} \oplus G_i, \quad G_i \in \mathcal{C}_{(p)} \quad \text{for all } i \geq 1 \quad (D_1)$$

である.

なぜならば, 一般に (有限生成可換) 群 H と準同形写像 $f : H \rightarrow \mathbb{Z}$ について, $\text{Tor } H \subset \text{Ker } f$. f が $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像ならば, $\text{Ker } f \in \mathcal{C}_{(p)}$ だから, $\text{Tor } H = \text{Ker } f \in \mathcal{C}_{(p)}$. よって, f が誘導する準同形写像 $\tilde{f} : H/\text{Tor } H \rightarrow \mathbb{Z}$ は単射である. さらに, $\text{Im } \tilde{f} = \text{Im } f$ だから, $\text{Coker } \tilde{f} \in \mathcal{C}_{(p)}$. よって, $\text{Im } \tilde{f} = m\mathbb{Z}$ for some $m > 0$ であり, $\tilde{f} : H/\text{Tor } H \cong m\mathbb{Z}$. したがって, $H \cong (\text{Tor } H) \oplus (H/\text{Tor } H) \cong (\text{Tor } H) \oplus \mathbb{Z}$. また, $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像の合成はまた $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像だから, $i > 1$ についても求める直和分割が得られる.

このとき, *Claim 1* の証明と同様にして, $\mathcal{C}_{(p)}$ -同型写像 $h_{i-1,i}^* : H^n(W_{i-1}) \rightarrow H^n(W_i)$ を直和分割 (D_1) にしたがって

$$\alpha_i \oplus \beta_i : \mathbb{Z} \oplus G_{i-1} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus G_i \quad (D_2)$$

ただし, 準同形写像 $\alpha_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は単射かつ $\text{Coker } \alpha_i = B_i \in \mathcal{C}_{(p)}$

A コホモロジー次元の定義と基本的な定理

本稿はコホモロジー次元論の基本的な結果を既知として用いた。ここで、コホモロジー次元の定義と基本的な結果を記しておく。

コホモロジー次元の定義と基本的な定理

定義 A.1. 整数 $n \geq 0$ とする。距離空間 X の可換群 G に関するコホモロジー次元が n 以下であるとは、任意の閉部分集合 $A \subset X$ について、 $\check{H}^{n+1}(X, A) = 0$ であることをいい、 $\dim_G X \leq n$ と書く。ここで、 $\check{H}^*(-; G)$ は G を係数群とする Čech コホモロジー群である。

$\dim_G X \leq n$ かつ $\dim_G X \not\leq n-1$ ではないとき、 $\dim_G X = n$ と定義する。

$\dim_G X \leq n$ となる n が存在しないとき、 $\dim_G X = \infty$ とする。

定理 A.2. X を距離空間、 G を可換群とする。このとき、次は同値である。

- (1) $\dim_G X \leq n$,
- (2) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ とすべての $k \geq n+1$ について、 $\check{H}^k(X, A) = 0$
- (3) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ について、包含写像 $i: A \hookrightarrow X$ が導く準同形写像 $i^*: \check{H}^n(X; G) \longrightarrow \check{H}^n(A; G)$ が全射である。
- (4) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ と Eilenberg-MacLane 複体 $K(G, n)$ への連続写像 $f: A \longrightarrow K(G, n)$ に対して、連続写像 $\tilde{f}: X \longrightarrow K(G, n)$, $\tilde{f}|_A = f$ が存在する。

定理 A.3. 可換群 $G \neq 0$ と距離空間 X について、次が成り立つ。

- (1) $\dim_G X \leq \dim_{\mathbb{Z}} X \leq \dim X$.
- (2) $\dim X = 0 \iff \dim_G X = 0$.
- (3) $\dim X = 1 \iff \dim_{\mathbb{Z}} X = 1$.

定理 A.4 (Alexandorff). 距離空間 X について、 $\dim X < \infty$ ならば、 $\dim_{\mathbb{Z}} X = \dim X$.

定理 A.5 (Dranishnikov). $\dim_{\mathbb{Z}} X < \infty$ である無限次元コンパクト距離空間が存在する。

定理 A.6. 可換群 G と距離空間 X について、次が成り立つ。

- (1) 任意の部分集合 $A \subset X$ について、 $\dim_G A \leq \dim_G X$.
- (2) 閉部分集合 $K_i \subset X$ ($i = 1, 2, \dots$) について、 $\dim_G (\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) = \max \{\dim_G K_i \mid i = 1, 2, \dots\}$.

Bockstein 族と Bockstein の定理

- $\mathbb{Z}$ を整数と自然な演算による可換群、 $\mathbb{Q}$ を有理数と自然な演算による可換群とする。
- $\mathcal{P}$ を素数全体の集合、素数 $p \in \mathcal{P}$ について、
- $\mathbb{Z}_p$ は位数 m の巡回群、
- p 準巡回群 $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \varinjlim \{\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^3} \xrightarrow{\times p} \dots\}$.
- 加群 $\mathbb{Z}$ に p 局所化 $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid n \text{ is not divisible by } p \right\}$.

と書き、可算族

$$\sigma = \{\mathbb{Q}\} \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \{\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{(p)}\}$$

を **Bockstein 基** と呼ぶ.

これらの群を係数とするコホモロジー次元の関係は以下ようになる.

定理 A.7 (Bockstein の不等式). 任意の距離空間 X について次の不等式が成り立つ.

- (B1) $\dim_{\mathbb{Z}_p} X = \dim_{\mathbb{Z}_{p^2}} X = \dim_{\mathbb{Z}_{p^3}} X \leq \dots$.
- (B2) $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X \leq \dim_{\mathbb{Z}_p} X \leq \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X + 1$.
- (B3) $\dim_{\mathbb{Z}_p} X \leq \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X$.
- (B4) $\dim_{\mathbb{Q}} X \leq \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X$.
- (B5) $\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X \leq \max\{\dim_{\mathbb{Q}} X, \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X + 1\}$.
- (B6) $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X \leq \max\{\dim_{\mathbb{Q}} X, \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X - 1\}$.

任意の可換群 G に対して, **Bockstein 族** $\sigma(G) \subset \sigma$ を次のように定める:

- (1) $\mathbb{Z}_p \in \sigma(G) \iff p\text{-Tor}(G) \neq \{0\}$ is not divisible by p .
- (2) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \sigma(G) \iff p\text{-Tor}(G) \neq \{0\}$ is divisible by p .
- (3) $\mathbb{Z}_{(p)} \in \sigma(G) \iff G/\text{Tor}(G) \neq \{0\}$ is not divisible by p .
- (4) $\mathbb{Q} \in \sigma(G) \iff G/\text{Tor}(G) \neq \{0\}$ is divisible by all primes p .

定理 A.8 (Bockstein の定理). 任意のコンパクト距離空間 X と可換群 G について,

$$\dim_G X = \max\{\dim_K X \mid K \in \sigma(G)\}.$$

例 A.9. (1) $G \in \sigma$ ならば, $\sigma(G) = \{G\}$.

(2) $\sigma(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{Z}_{(p)} \mid p \in \mathcal{P}\}$.

したがって, $\dim_{\mathbb{Z}} X = \max\{\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X \mid p \in \mathcal{P}\}$.

(3) $\mathbb{Z}_{[1/p]} = \{m/p^k \in \mathbb{Q} \mid k \geq 0, m \in \mathbb{Z}\}$ について, $\sigma(\mathbb{Z}_{[1/p]}) = \{\mathbb{Z}_{(q)} \mid q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}\}$.

(4) p -adic integers $\hat{\mathbb{Z}}_p$ について, $\sigma(\hat{\mathbb{Z}}_p) = \{\mathbb{Z}_{(p)}\}$.

(5) p -adic rationals $\mathbb{Q}_p$ について, $\sigma(\mathbb{Q}_p) = \{\mathbb{Q}\}$.

注意 A.10. 上記の *Bockstein* の定理はコンパクト距離空間に限る.

定理 A.11. 任意のコンパクト距離空間 X について, 次が成り立つ.

- (1) $\dim_{\mathbb{Z}}(X \times X) = 2 \dim_{\mathbb{Z}} X$, または $2 \dim X - 1$.
- (2) $\dim_{\mathbb{Z}} X^n = n \dim_{\mathbb{Z}} X$, または $n \dim_{\mathbb{Z}} X + (n - 1)$.

定理 A.12. コンパクト距離空間 X は *standard* である必要十分条件は

$$\dim X = \dim_F X$$

である体 F が存在するである.

定理 A.13. n 次元コンパクト距離空間 X は *exceptional* である必要十分条件は

$$\dim_{\mathbb{Q}} X < n \text{ かつ } \dim_{\mathbb{Z}_p} X = \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X = n - 1 \text{ for all } p \in \mathcal{P}$$

であることである.

コンパクト ANR とコホモロジー次元

定理 A.14. コンパクト ANR M について次が成り立つ.

- (1) 任意の素数 $p \in \mathcal{P}$ について, $\dim_{\mathbb{Z}_p} M = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} M$.
- (2) 任意の可換群 G に対して, $\dim_{\mathbb{Q}} M \leq \dim_G M$.
- (3) (Borsuk) $\dim M < \infty$ ならば, $\dim M = \dim_{\mathbb{Z}_p} M$ である素数 $p \in \mathcal{P}$ が存在する.
- (4) (Watanabe) $\dim M = \dim_{\mathbb{Z}} M$.

定理 A.15. (1) コンパクト ANR M は *standard* である.

- (2) (Kodama) 2次元コンパクト ANR M と任意のコンパクト距離空間 Y について,
 $\dim(M \times Y) = 2 + \dim Y$.
- (3) (Dranishnikov) 4次元コンパクト ANR M_p, M_q , $\dim(M_p \times M_q) = 7$ が存在する.