

複素曲面についての いくつかの未解決の問題

東大 理 小平邦彦

曲面の理論でこれから残っているいくつかの問題について述べる。

曲面といえは 2 次元の compact complex manifold を意味するものとする。これを一般に S で表す。以下又一種の例外曲線を含むない S のみを考える。すると次のような表が得られる (Kodaira: On the structure of complex analytic surfaces IV, Amer. J. Math. 90 (1968), 1048-1066).

Class		b_1	P_{12}	P_2	K	$C_1^2 = K^2$	Kähler か
1	$\mathbb{P}^2$ or ruled	偶	0	0			yes
2	K3	0	1	1	0	0	?
3	complex torus	4	1	1	0	0	yes
4	elliptic	偶	正		$\neq 0$	正	?
5	一般型の代数曲面	偶	正	正	$\neq 0$	正	yes
6	elliptic	奇	正			0	no
7	?	1	0	0		≤ 0	no

$b_p = p$ 次元 Betti 数, $c_i = i$ -th Chern class,

$K =$ canonical divisor class,

$$P_m = \dim H^0(S, \mathcal{O}([mK])).$$

これらの類は deformation で変らない. 1 から 5 まで
 すでに Enriques の本 (Le Superficie Algebriche, 1949)
 でも論じられた. 6 と 7 は代数曲面ではないから勿論
 Enriques にはのっていない.

問題 I. number of moduli $\mu(S)$.

定義 S をふくむ effectively parametrized complete
 family $\{S_t \mid t \in \mathbb{C}^1, |t| < \varepsilon\}$, $S = S_0$, が存在するとき
 $\mu(S) = \mu$ と定義する.

(Class 1, 7 では $\mu(S)$ が定義されないものが多い.)

倉西の定理によれば

$\dim H^1(S, \Theta) \geq \mu(S) \geq \dim H^1(S, \Theta) - \dim H^2(S, \Theta)$,
 ただし Θ は holomorphic vector field の sheaf で
 ある. この式の右辺は RR 定理により

$$\dim H^1(\Theta) - \dim H^2(\Theta) = 10(p_g + 1) - 2c_1^2 - \dim H^0(\Theta)$$

と書ける.

問題 “一般に” $\mu(S) = \dim H^1(S, \Theta)$ か?

$H^2(\Theta) = 0$ なら確かに成立する話である.

class 1, 2 では $H^2(\Theta) = 0$, よって O.K.

" 3 では O.K.

" 4, 6 では, A. Kas の研究で, 一般に O.K. となる反例があることが判った.

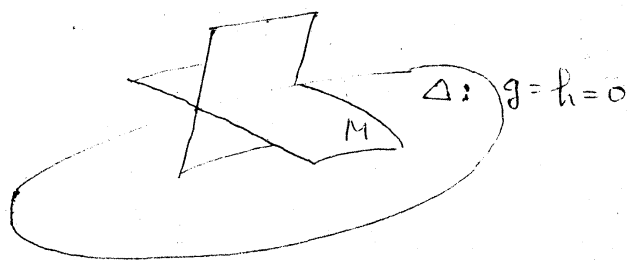
" 7 では, 知られた曲面は Hopf surface しかなく, その時には $H^2(\Theta) = 0$ で O.K.

[Hopf surface とは, universal covering space が $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ になるような曲面である.]

よって, class 5 即ち一般型の代数曲面に対して $\mu(S) = \dim H^1(\Theta)$?

代数曲面 S の双有理モデル $M \subset \mathbb{P}^3 : f(z_0, z_1, z_2, z_3) = 0$ を考える. 方程式 f が generic なら M は non-singular, よって $S = M$ となり, この場合は $\mu = \dim H^1(\Theta)$ が定められる. もっと複雑な場合を考えよう.

i) $f = g^2 + Ag^2h + Bh^2$, ここで g は r 次, h は $\Delta (< r)$ 次, A は $r-\Delta$ 次, B は $2(r-\Delta)$ 次の, それを generic な同次式とする. この M の singular locus Δ は $g=h=0$ で, M は Δ に沿って図のように簡単な特異性を有し, 3重点をもちない.



このとき

$$\mu(S) = \binom{r+3}{3} + \binom{\Delta+3}{3} + \binom{2r-2\Delta+3}{3} - \binom{r-2\Delta+3}{3} \\ - 4\delta_{r,\Delta+1} - 17.$$

$\dim H^1(\mathcal{O})$ の方は計算できていない.

$r = \Delta + 1$ のとき S は $\mathbb{P}^4$ の中の complete intersection になり, $\mu(S) = \dim H^1(\mathcal{O})$ が成立.

$r > \Delta + 1$ のときはよく判らない. μ を求めるために cohomological 存量 $H^1(\mathcal{O})$ 等を用いるという立場からすれば, $H^1(\mathcal{O})$ より μ の方が計算し易いのは皮肉なことがある.

Max Noether が number of moduli として与えた公式は

$$\mu = 10(p_a + 1) - 2c_1^2 \quad (= -\chi(\mathcal{O}))$$

であって, 彼の計算した例はすべて都合よく $H^2(\mathcal{O}) = 0$ になっている.

$$g^2 + Ag^2h + Bh^2 = 0$$

$r = \Delta + 1$ のとき

r	3	4	5	6	7
$\mu(S)$	20 (K3)	44	80	129	193
$\dim H^2(\Theta)$	0	0	10	25	81

Noether の例

$\Delta = 1$ のとき

r	3	4	5
μ	38	96	188
$-X(\Theta) = 10(p_g + 1) - 2c_1^2$	38	58	100
$\dim H^2(\Theta)$	0 以下	+	

Noether

ii) S が $\mathbb{P}^2$ の cyclic branched covering で branch curve が non-singular の場合.

Wavrik: Amer. J. Math. 90 (1968) が計算して $\mu = \dim H^1(\Theta)$ を示した.

iii) 稀な S . 曲面 S の index $\tau(S)$ は, Hirzebruch の定理によって $\frac{1}{3}[c_1^2 - 2c_2]$ に等しい. して
A.J.H.M. Van de Ven (On the Chern numbers of

certain complex and almost complex manifolds,
 PNAS. 55 (1966), 1624-1627) によれば, たいい
 の知られた S に対して $\tau(S) \leq 0$ である. $\tau(S)$ が正に
 なるような, 必ずらしい S は, 2つの種類が知られている.
 ひとつは Hirzebruch が調へたもので, universal
 covering $\tilde{S}$ が disk $D = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1\}$
 になるもの, 即ち $S = D/G$ の形の曲面である. これについ
 ては Calabi-Vesentini の定理から $H^1(\mathbb{C}) = 0$ ことから
 $\mu = 0$ になる. (Hirzebruch: Autom. Formen u. der Satz von
 Riemann-Roch, Symp. Inter. Top. Alg., Mexico.)
 もうひとつは Kodaira と Atiyah が調へたもので, S か
 ら non-singular curve C への holomorphic map
 $\pi: S \rightarrow C$ があり, π は singular fibre をとたず,
 2つの fibres は一般に解析的同型でないものがある.
 (Kodaira, A certain type of irregular
 algebraic surface, J. d'Analyse Math., 19 (1967)).
 これについては A. Kas: On deformations of a
 certain type of irregular algebraic surface,
 Amer. J. Math. 90 (1968), 789-804) によつて $\mu =$
 $\dim H^1(\Theta)$ が証明された.

問題 II. 1次元 Betti 数が偶数なら曲面は Kähler か.

class 2 (K3) と class 4 (elliptic) とが問題になる. Kas に出いたが判らなかつた. これらは代数曲面の deformation になっているから, "Kähler surface の deformation は Kähler か?" という問題にもなる. 3次元以上では Kähler の変形が Kähler にならない広中の反例がある.

問題 III. (Topology). 曲面 S_0 が与えられたとき, S_0 と homeomorphic な S を全部求めよ.

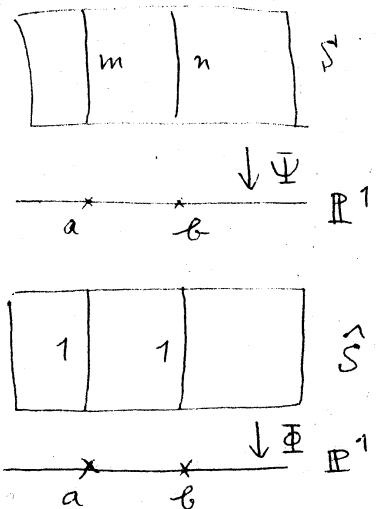
これはむづかしい問題で, $S_0 = \mathbb{P}^2$ の時でさえまだ完全に解けていない.

class 2 について: K3 surface と homotopy type が同じものは i) K3 または ii) elliptic surface S で高々 2 つの multiple fibres を含むもの

$$S_{m,n} = L_m L_n(\hat{S})$$

($\hat{S}$ の fibre を multiple fibre にあてかえる)

で m, n 奇, $(m, n) = 1$.



(to appear : de Rham 65才記念論文集)

問題は, $S_{m,n}$ と S_0 は topological に homeomorphic かという topology の問題になる. $P_m(S_{1,n}) = \left[\frac{m(n-1)}{n} \right]$ になるので, plurigenera P_m が topological invariant ~~かどうか~~ ならば $S_{1,n}$ は S_0 と位相同型である. P_m は食及高によれば deformation で不変であるか; topological invariant かどうか判っていない.

註 ($P_1 = p_g$, q , c_1^2 等は topological invariant である. $\tau(S) = \frac{1}{3}[c_1^2 - 2c_2]$ で $c_2 = \text{Euler 標数}$, τ は位相的不变量 τ から c_1^2 は位相不変量. 従って $\chi(C_S) = p_g - q + 1 = \frac{1}{12}[c_1^2 + c_2]$ は位相不変量で, $q = \frac{1}{2}b_1$ から p_g は位相不変量.)

IV. Pluri-canonical model.

S を一般型の代数曲面とする. $\mathcal{L}_m = H^0(S, \mathcal{O}([mK]))$ の base $\{ \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$, $n = P_m - 1$, を用いて meromorphic map $\Phi_m : S \rightarrow \mathbb{P}^n$ が作られる. m が十分大きければ Φ_m は holomorphic かつ birational で, 像 $\Phi_m(S)$ は normal variety である.

Kodaira: Pluricanonical system on alg. surfaces of general type, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), (彌永記念号) に得られた結果は

- Th. i) $m \geq 6$ なら Φ_m は holo. birat.
 ii) $p_g \geq 4$ なら $m \geq 3$ で同じことがいえる

その後得た結果では

- Th. 1) $m \geq 9$ なら $\Phi_m(S)$ は normal
 2) $K^2 = 1$ で $p_g = q = 0$ のときを除けば, $m \geq 8$ で $\Phi_m(S)$ が normal になる
 3) $p_a = p_g - q \geq 3$ ならば $m \geq 6$ で normal

問題: m の下限を下げるか, 又は下げられない例を作り.

(註. 10月に小平教授が名大で行われた講義では, 今の定理は

- Th. i) $m \geq 5$ なら Φ_m は holo. birat.,
 ii) $K^2 \geq 2$ なら Φ_4 が holo. birat.,
 iii) $K^2 \geq 3$ で $p_g \geq 3$ なら Φ_3 が holo. birat.

と改良され, これが best possible であることも述べられた.
 $\Phi_m(S)$ の normality についてはまだ問題が残っている
 ようである.)

S が $\pi(C) = 0$, $C^2 = -2$, なる既約曲線 C を含むとき,
 $K \cdot C = 0$ ため $\Phi_m(C)$ は 1 点になり, S は仮定により 1 種

例外曲線も含まないから $\Phi_m(C)$ は $\Phi_m(S)$ の特異点である。よって、こういう C が存在する時には m をいくら大きくしても $\Phi_m(S)$ は *non-singular* にはならないが、 $\bigcup C_i$ もこのような C のすべての和とすると、 Φ_m は $m \geq 6$ に対し $S - \bigcup C_i$ 上で *biregular* になる。

(以上、小生のノートに基づいて、講演と質疑のとき小年教授の話されたこととを適当にまとめ多少の註をつけたもので、文責は松村にあります。名大、松村英之記。)