

高次元単純フロップと非可換クレパント解消

原 和平

2000 年代はじめに Michel Van den Bergh によって導入された非可換クレパント解消 (= NCCR) の概念は、従来より知られていた McKay 対応の概念を商特異点とは限らないより広いクラスの特異点に拡張することを可能にした。特に 3 次元フロップ収縮に現れる Gorenstein 末端特異点^{*1}の非可換クレパント解消に関しては近年でも多くの研究がなされている。

本稿ではまず非可換クレパント解消の定義や知られている事実について紹介したのち、いくつかの高次元単純フロップの収縮に現れる特異点の非可換クレパント解消についての、著者の結果を紹介する。講演では向井フロップについてお話しさせていただいたが、本稿では時間の都合で触れることが出来なかった他の例についても紹介する。

1 非可換クレパント解消

R を Gorenstein な (可換) 正規 $\mathbb{C}$ 整域とする。 R 加群 M が反射加群であるとは、 M から二重双対 $M^{\vee\vee}$ への自然な射 $M \rightarrow M^{\vee\vee}$ が同型になることである。

定義 1 ([VdB04b]) 反射 R 加群 M が非可換クレパント解消 (=NCCR) を与えるとは、 M の自己準同型のなす環 $\Lambda = \text{End}_R(M)$ が次の性質を満たすことである。

- (1) Λ の有限生成右加群のなすアーベル圏は有限大域次元である。
- (2) Λ は R 加群として極大 Cohen-Macaulay である。

「非可換」と聞くと、既存の可換なものを包含した一般的な概念をイメージする方もいると思うが、非可換クレパント解消 (=NCCR) に関してはそうではない。略称の NCCR は Non-Commutative Crepant Resolution の頭文字を取ったものである。NCCR と対比するため、幾何学の意味でのクレパント解消を Commutative Crepant Resolution を略して **CCR** と呼ぶ流儀もある。

例 2 (1) 環 R が正則なら、 R 自身を R 加群とみなした加群は NCCR R を与える。

- (2) 特殊線形群の有限部分群 $G \subset \text{SL}(n, \mathbb{C})$ を考える。このとき、自然な表現を通して G は多項式環 $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ に作用している。この作用に関する不変式環 S^G は、商多様体 $\mathbb{C}^n/G$ のアフィン座標環である。ここで、加群としてのテンソル積 $G \otimes S$ に次のような積を定義して得られる環 $G * S$ を考える。

$$(g \otimes f)(g' \otimes f') := gg' \otimes fg(f').$$

環 $G * S$ は一般に非可換環であり、歪み環と呼ばれる。歪み環 $G * S$ は次のような性質を持つ。

^{*1} 末端特異点と書いてある文献もありますが、ここでは [川又] や [戸田] に合わせて末端特異点と呼ぶことにします。

- (a) アーベル圏の同型 $\text{mod}(G * S) \simeq \text{coh}^G(\mathbb{C}^n)$ が存在する。ここで、 $\text{mod}(G * S)$ は有限生成右加群の圏、 $\text{coh}^G(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の G 同変連接層の圏である。特に、 $\text{mod}(G * S)$ は有限大域次元である。
- (b) S^G 代数の同型 $G * S \simeq \text{End}_{S^G}(S)$ が存在する。 $\text{End}_{S^G}(S)$ は極大 Cohen-Macaulay S^G -加群であることが知られている。

以上から、この場合、 S^G 加群 S が NCCR $G * S$ を与える。

McKay 対応の重要な結果の一つが、 $n \leq 3$ の場合に Gorenstein 商特異点 $\mathbb{C}^n / G$ の CCR (のひとつ) が G -ヒルベルトスキーム $\text{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ として構成できることであるが、この $\text{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ は先ほど言及した圏同値 $\text{mod}(G * S) \simeq \text{coh}^G(\mathbb{C}^n)$ を通して右 $G * S$ 加群のモジュライ空間だと思えることができる。Van den Bergh はこれを以下のように拡張した。

定理 3 ([VdB04b]) 3 次元以下の Gorenstein $\mathbb{C}$ 整域 R が NCCR Λ を持つとする。このとき、右 Λ 加群のモジュライ空間として $\text{Spec } R$ の CCR が構成できる。特に、3 次元以下において、NCCR が存在すれば CCR が存在する。

どこかの論文に明示的に書かれているわけではないが、おそらく一般に次のようなことが期待されており、NCCR の研究の大きな動機付けのひとつになっていると思う。

期待 4 アフィン代数多様体 $\text{Spec } R$ が CCR と NCCR の両方をもつなら、NCCR の加群のモジュライ空間として CCR がひとつ得られるだろう。

NCCR から CCR を得るときにはモジュライを経由するが、CCR から NCCR を得る方法も知られており、それには傾斜ベクトル束というものをを用いる。ここで導来圏が現れてくる。

定義 5 $Y \rightarrow \text{Spec } R$ を射影的な射とする。 Y 上のベクトル束 T が傾斜ベクトル束であるとは、次の条件が満たされることである。

- (1) T は非有界導来圏 $D(\text{Qcoh}(Y))$ の生成対象である。すなわち、任意の $E \in D(\text{Qcoh}(Y))$ に対して、 $\text{RHom}_Y(T, E) \simeq 0$ なら $E \simeq 0$ が成り立つ。
- (2) エクステンションの消滅 $\text{Ext}_Y^i(T, T) = 0$ が $i \neq 0$ に対して成り立つ。

命題 6 (cf. [TU10]) $Y \rightarrow \text{Spec } R$ を射影的な射、 T を Y 上の傾斜ベクトル束とする。このとき、次の関手が圏同値を与える。

$$\text{RHom}(T, -) : D^b(\text{coh}(Y)) \xrightarrow{\sim} D^b(\text{mod}(\text{End}_Y(T))).$$

傾斜ベクトル束と NCCR との関係は次で与えられる。

命題 7 $\phi : Y \rightarrow \text{Spec } R$ を CCR、 T を Y 上の傾斜ベクトル束とする。このとき、 R 代数の同型 $\text{End}_R((\phi_*(T))^{\vee\vee}) \simeq \text{End}_Y(T)$ が存在し、加群 $(\phi_*(T))^{\vee\vee}$ は R の NCCR $\text{End}_Y(T)$ を与える。

双有理射 ϕ の例外集合が因子を含まない、または T が自明直線束 $\mathcal{O}_Y$ を直和因子にもつならば、 $\phi_*(T)$ は反射的 R 加群で、二重双対を取る必要はない。

CCR Y 上の傾斜ベクトル束 T から作られた NCCR $\text{End}_Y(T)$ は、傾斜ベクトル束の性質によって Y と導来同値になる。より一般に次のことが予想されている。

予想 8 R (または $\text{Spec } R$) のすべての CCR と NCCR は互いに導来同値になるだろう。

この予想は 3 次元以下では正しいことが知られている。

注意 9 NCCR を持つ正規 Gorenstein 特異点は自動的に有理特異点（すなわち標準特異点）になることが知られている。3 次元の場合には、正規 Gorenstein 標準特異点が CCR を持つことと NCCR を持つことが同値であると予想されている。NCCR を持つならば CCR を持つことは Van den Bergh によって示されているので、未解決なのは CCR を持つならば NCCR を持つかという点である。上で述べたように、これは CCR が傾斜ベクトル束を持つかという問題と強く関連している。特異点が特に末端特異点ならば傾斜ベクトル束の存在は Van den Bergh によって示されている [VdB04a]。標準特異点の場合にも、いくつかの条件下では傾斜ベクトル束の存在が知られている (cf. [TU10, IU16])。

ちなみに、この予想の自然な高次元化は反例が存在し偽である。NCCR を持つが CCR を持たない例と、CCR を持つが NCCR を持たない例 (cf. [IW14b]) の両方がすでに知られている。

CCR と NCCR の導来同値は、CCR と NCCR の様々な関連付けの親玉的存在であると考えられる。例えば、CCR Y 上に傾斜ベクトル束 T があれば、導来同値によって閉点 $y \in Y$ の構造層 $\mathcal{O}_y$ は有限次元の $\text{End}_Y(T)$ 加群 $\text{RHom}_Y(T, \mathcal{O}_y) = T^\vee \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_y$ に移る。諸々省いてかなり雑に言えば、この対応が NCCR から加群のモジュライとして Y を構成できるという現象を説明している。

他にも、導来同値によって CCR の幾何と NCCR の環論が様々な形で対応する。以下では、CCR 間の導来同値が NCCR の環論の言葉でどのように表すことができるか、という話題に絞って紹介する。

2 CCR のフロップと NCCR のミューテーション

CCR や NCCR は存在しても一意とは限らず、3 次元以上では一般に複数存在する。ふたつの CCR はフロップでつながることが知られている。一方で、NCCR から別の NCCR を構成する方法が伊山-Wemyss によって発見されている [IW14a]。この操作は NCCR のミューテーションと呼ばれる。NCCR のミューテーションは、3 次元の場合フロップと密接に関係する。この節ではまずミューテーションの定義と基本性質について紹介し、その後 3 次元フロップの場合に関する Donovan-Wemyss の研究と、いくつかの高次元の場合における著者の結果を紹介したい。

以下、 $\text{D}^b(X)$ で $\text{D}^b(\text{coh}(X))$ を、 $\text{D}^b(A)$ で $\text{D}^b(\text{mod}(A))$ を表すことにする。

2.1 NCCR のミューテーション

R を可換な正規 Gorenstein $\mathbb{C}$ 整域とし、 M を反射的 R 加群で $\text{NCCR } \text{End}_R(M)$ を与えるものとする。ミューテーションという操作は、 M の直和因子 N に対して定義される。まず、 $M = N \oplus N^\circ$ と表示したとき、 N° の右 $(\text{add } N)$ -approximation

$$a : N_0 \rightarrow N^\circ$$

を取る。 $a : N_0 \rightarrow N^\circ$ が右 $(\text{add } N)$ -approximation であるとは、 N_0 が $\text{add}(N)$ の要素であり、かつ $\text{Hom}(N, -)$ を適用して得られる射

$$\text{Hom}(N, a) : \text{Hom}(N, N_0) \rightarrow \text{Hom}(N, N^\circ)$$

が全射になることを言う。ここで、 M の N によるミューテーションは

$$\mu_N(M) := N \oplus \text{Ker}(a)$$

で定義される*2. approximation の取り方は一般に一意ではないが、得られる加群は add-閉包の差を除いて一意である。つまり、森田同値によりアーベル圏 $\text{mod}(\text{End}_R(\mu_N(M)))$ は approximation の取り方に依らない。

注意 10 $\mu_N(M)$ は再び N を直和因子にもつので、 $\mu_N(M)$ をさらに N でミューテーションするという繰り返し操作が可能になる。この事実は後に重要になってくる。

ミューテーションについて以下のことが成り立つ。

定理 11 ([IW14a]) R を可換な正規 Gorenstein $\mathbb{C}$ 整域、 M を反射的 R 加群で $\text{NCCR } \text{End}_R(M)$ を与えるもの、 N を M の直和因子とする。

- (1) $\mu_N(M)$ も R の NCCR を与える。
- (2) 導来同値 $\Phi_N : \text{D}^b(\text{End}_R(M)) \rightarrow \text{D}^b(\text{End}_R(\mu_N(M)))$ が存在する。

NCCR (を与える加群) から新しい NCCR (を与える加群) を構成し、導来同値まで与えることができるミューテーションは、NCCR の分類問題の観点からも非常に興味深い操作である。例えば、中嶋は反射的ポリゴンから定まる 3 次元 Gorenstein トーリック特異点に対し、そのトーリック NCCR がすべてミューテーションで繋がることを示している [Nak16]。他の場合にも、重要な NCCR 同士がミューテーションで繋がるかということを問うのは面白い問題であると思う。

2.2 3 次元フロップの場合

$\phi : Y \rightarrow X = \text{Spec } R$ を有理曲線 $C \subset Y$ のフロップ収縮であるとする。このとき、偏屈接続層のアーベル圏 ${}^0\text{Per}(Y/X)$ というものが導来圏 $\text{D}^b(Y)$ の核として定義される。このアーベル圏 ${}^0\text{Per}(Y/X)$ は射影生成対象 T を持ち、導来同値

$$\Psi_T := \text{RHom}_Y(T, -) : \text{D}^b(Y) \rightarrow \text{D}^b(\text{End}_Y(T))$$

であって $\Psi_T({}^0\text{Per}(Y/X)) = \text{mod}(\text{End}_Y(T))$ であるものを与えることが³、Van den Bergh によって示されている [VdB04a]。射影生成対象 T は実は Y 上の傾斜ベクトル束であり、 R 加群 $\phi_*(T)$ は反射的で $\text{NCCR } \text{End}_Y(T)$ を与える。加群 $\phi_*(T)$ はある加群 M を用いて $\phi_*(T) = R \oplus M$ という形をしている。

一方、フロップ $\phi' : Y' \rightarrow X$ と Y の間には、ファイバー積 $Y \times_X Y'$ の構造層を核とするフーリエ・向井型の導来同値

$$\mathbf{Flop} : \text{D}^b(Y) \rightarrow \text{D}^b(Y')$$

が存在することが Bridgeland-Chen によって示されている。実はこの導来同値 $\mathbf{Flop}$ は次のようにミューテーションの言葉で以下のように解釈できることが Wemyss によって示されている。フロップ Y' 側にも同様の方法で構成される偏屈接続層のアーベル圏 ${}^0\text{Per}(Y'/X)$ があり、これの射影生成対象として傾斜ベクトル束 T' が得られる。NCCR $\text{End}_{Y'}(T')$ を与える加群 $\phi'_*(T')$ は、ある加群 M' を用いて $\phi'_*(T') = R \oplus M'$ と書けるが、 $M \neq M'$ である。しかし、次のことが言える。

*2 講演では左ミューテーションを定義したが、このノートでは右ミューテーションを使う。得られる関手は右と左で互いに逆関手になる。

定理 12 ([Wem17]) $\mu_R(\phi_*(T)) = \phi'_*(T')$ であり, 関手同型

$$\Phi_R \simeq \Psi'_{T'} \circ \mathbf{Flop} \circ \Psi_T^{-1} : \mathrm{D}^b(\mathrm{End}_Y(T)) \rightarrow \mathrm{D}^b(\mathrm{End}_{Y'}(T'))$$

が存在する. ここで Φ_R はミューテーションに付随する導来同値である.

つまり, ${}^0\mathrm{Per}$ を用いて CCR と NCCR を標準的に関連付けた際, ミューテーションはフロップの対応物になっている.

例 13 3 次元 Atiyah フロップの場合に具体的に計算して上記の定理のミューテーションの計算を確認してみる. Y と Y' は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus 2}$ の全空間で, フロップ収縮では零切断 $\mathbb{P}^1$ が収縮する. 収縮に現れるのは A_1 単純特異点を持つアフィン代数多様体 $X = \mathrm{Spec} \mathbb{C}[x, y, z, w]/(xy - zw)$ である. Y や Y' は Picard 数 1 で, それぞれのアンプル生成元を $\mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_{Y'}(1)$ で表す. 構成を追えば $T = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1)$, $T' = \mathcal{O}_{Y'} \oplus \mathcal{O}_{Y'}(-1)$ であることが分かる. フロップであることから $M_a := \phi_* \mathcal{O}_Y(a) \simeq \phi'_* \mathcal{O}_{Y'}(-a)$ なので, $\phi_*(T) = R \oplus M_{-1} \neq \phi'_*(T') = R \oplus M_1$ である. 二つの加群 $\phi_*(T), \phi'_*(T')$ がミューテーションで繋がっていることを見よう. まず Y' が $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束の全空間であることから, Y' 上には自然な完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(1) \rightarrow 0$$

がある. これを ϕ' で押し出すことで, R 加群の完全列

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow R^{\oplus 2} \rightarrow M_{-1} \rightarrow 0$$

が得られる. 簡単な計算から $R^{\oplus 2} \rightarrow M_{-1}$ は M_{-1} の右 (add R)-approximation であることが分かり, よって

$$\mu_R(\phi_*(T)) = \mu_R(R \oplus M_{-1}) = R \oplus M_1 = \phi'_*(T')$$

と計算できる. 同様に Y 側の幾何を用いて完全列

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow R^{\oplus 2} \rightarrow M_{-1} \rightarrow 0$$

が得られるが, この場合も $R^{\oplus 2} \rightarrow M_{-1}$ が右 (add R)-approximation であることが分かり, よって

$$\mu_R(\phi'_*(T')) = \phi_*(T)$$

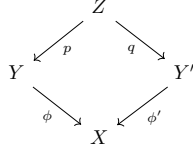
であることが分かる. 特に $\mu_R \mu_R(\phi_*(T)) = \phi_*(T)$ となり, R でのミューテーションが周期 2 を持っていることが分かる. これは 3 次元特有の現象で, 実はツイスト関手と関係することを後で見る.

2.3 向井フロップの場合

3 次元の場合には NCCR のミューテーションが CCR のフロップの環論的な対応物になっていた. 著者は高次元の場合にもこういった現象が観察できるかに興味を持って研究を行った. 結論としては, 高次元の場合も取り扱った例についてはフロップの導来同値をミューテーションの言葉で表すことは可能だったが, 3 次元の場合とは異なりたくさんのミューテーションの合成がフロップの導来同値と関連していた. 以下でそのことを説明する.

まず向井フロップの局所モデルの幾何を復習する. $n \geq 2$ に対して V を $n+1$ 次元ベクトル空間とし, n 次元射影空間 $P := \mathbb{P}(V)$ と双対射影空間 $P^\vee := \mathbb{P}(V^\vee)$ を考える. それぞれの余接束の全空間を $Y := \mathrm{Tot}(\Omega_P)$,

$Y' := \text{Tot}(\Omega_{P^\vee})$ で表すことにする．それぞれの零切断でのブローアップは同じ多様体 Z を与え，双有理対応



が得られる．ふたつのブローアップ p と q の例外因子は一致し，これを E で表す．この図式から誘導される双有理写像 $Y \dashrightarrow Y'$ を向井フロップと呼ぶ．フロップ収縮に現れる特異アフィン多様体 X は A 型極小冪零軌道閉包と呼ばれる特異シンプレクティック多様体で唯一の孤立特異点を持つ．

このフロップに対して，Wemyss による 3 次元フロップの場合の類似の結果が得られることを見る．そのためには偏屈接続層のアーベル圏 ${}^0\text{Per}(Y/X)$ がなければならない．高次元フロップ収縮に対してアーベル圏 ${}^0\text{Per}(Y/X)$ を一般的に定義する方法は知られていないが，向井フロップの場合には戸田-上原によって ${}^0\text{Per}(Y/X)$ が与えられている [TU10]．

${}^0\text{Per}(Y/X)$ と ${}^0\text{Per}(Y'/X)$ の射影生成対象はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 T &:= \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1) \oplus \cdots \mathcal{O}_Y(-n) \\
 T' &:= \mathcal{O}_{Y'} \oplus \mathcal{O}_{Y'}(-1) \oplus \cdots \mathcal{O}_{Y'}(-n)
 \end{aligned}$$

で与えられる．ここで， $\mathcal{O}_Y(1)$ や $\mathcal{O}_{Y'}(1)$ はアンブル生成元を表す．フロップなので $\phi_*\mathcal{O}_Y(a) \simeq \phi'_*\mathcal{O}_{Y'}(-a)$ が $a \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つから， $\phi_*T \simeq \phi'_*((T')^\vee)$ であるが一方で $\phi_*T \neq \phi'_*T'$ である．以下で ϕ_*T と ϕ'_*T' がミューテーションで繋がることを見る．3 次元の場合の Wemyss によるミューテーションの計算は 3 次元の特殊事情に強く依存しており，高次元化することは難しい．しかし，NCCR が傾斜ベクトル束から来ていることに着目すれば，CCR 上のベクトル束の幾何を用いてミューテーションが計算できることを示した．具体的には次のようなことが成り立つ．

命題 14 ([H17b]) $\phi: Z \rightarrow V = \text{Spec}(R)$ を CCR とする． W を Z 上のベクトル束，

$$0 \rightarrow E_l \xrightarrow{f_l} E_{l-1} \xrightarrow{f_{l-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} E_1 \xrightarrow{f_1} E_0 \rightarrow 0$$

を Z 上のベクトル束の完全列で以下の条件を満たすものとする．

- (i) $T_1 = E_0 \oplus W$ と $T_l = E_l \oplus W$ は Z 上の傾斜ベクトル束である．
- (ii) W は $\mathcal{O}_Z$ を直和因子として含む．
- (iii) $1 \leq i \leq l-1$ に対し， E_i は W の add-閉包 $\text{add}(W)$ に含まれる．

このとき，次のことが成り立つ．

- (1) $1 \leq i \leq l$ に対し $T_i := W \oplus \text{Im}(f_i)$ は傾斜ベクトル束である．
- (2) $N := \phi_*(W)$ ， $M_i := \phi_*(T_i)$ などとくと，

$$\mu_N(M_i) \simeq M_{i+1}$$

が $1 \leq i \leq l-1$ に対して成り立つ．

(3) 関手同型

$$\Phi_N \simeq \mathrm{RHom}_{\mathrm{End}(M_i)}(\mathrm{Hom}_Z(T_i, T_{i+1}), -) : D^b(\mathrm{mod}(\mathrm{End}(M_i))) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathrm{mod}(\mathrm{End}(M_{i+1})))$$

が成り立ち、特に $\Psi_i := \mathrm{RHom}_Z(T_i, -)$ とおくと

$$\begin{array}{ccc} D^b(Z) & \xrightarrow{\Psi_i} & D^b(\mathrm{End}(M_i)) \\ & \searrow \Psi_{i+1} & \downarrow \Phi_N \\ & & D^b(\mathrm{End}(M_{i+1})) \end{array}$$

が可換になる.

この命題を用いて向井フロップの場合にミューテーションを計算しよう. 計算に用いる完全列は Y' 上の長オイラー系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(n-1)^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(n) \rightarrow 0$$

である. $W'_0 := \mathcal{O}_{Y'} \oplus \cdots \mathcal{O}_{Y'}(n-1)$, $N_0 := \phi'_*(W'_0)$ とすると, 命題により N_0 での n 回のミューテーションの繰り返し $\mu_{N_0} \cdots \mu_{N_0}(\phi'_*((T')^\vee))$ は

$$\mu_{N_0} \cdots \mu_{N_0}(\phi'_*((T')^\vee)) =: \mu_{N_0}^n(\phi'_*((T')^\vee)) = \phi'_*((T')^\vee \otimes \mathcal{O}_{Y'}(-1))$$

となる. $W'_i := W'_0 \otimes \mathcal{O}_{Y'}(-i)$, $N_i := \phi'_*(W'_i)$ などにおいて同様の議論をすると, 結局

$$\mu_{N_{n-1}}^n \cdots \mu_{N_1}^n \mu_{N_0}^n(\phi'_*((T')^\vee)) \simeq \phi'_*((T')^\vee \otimes \mathcal{O}_{Y'}(-n)) \simeq \phi'_*(T')$$

となる. $\phi_*(T) \simeq \phi'_*((T')^\vee)$ だったので,

$$\mu_{N_{n-1}}^n \cdots \mu_{N_1}^n \mu_{N_0}^n(\phi_*(T)) \simeq \phi'_*(T')$$

となる. これで ϕ_*T と ϕ'_*T' をつなぐミューテーションが見つかった. ミューテーションは幾何学から来る自然なものだが, 3次元の場合と異なりたくさんのミューテーションを繰り返す必要がある. ミューテーションから定義される導来同値を用いて, 導来同値

$$\begin{array}{ccc} D^b(Y) & & \\ \mathrm{RHom}_Y(T, -) \downarrow & & \\ D^b(\mathrm{End}(\phi_*T)) & \xrightarrow{\Phi_{N_{n-1}}^n \circ \cdots \circ \Phi_{N_1}^n \circ \Phi_{N_0}^n} & D^b(\mathrm{End}(\phi'_*T')) \\ & & \downarrow \mathrm{RHom}_{Y'}(T', -)^{-1} \\ & & D^b(Y') \end{array}$$

が得られる. 次の定理は3次元の場合の類似である.

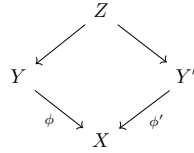
定理 15 ([H17a], cf. [Kaw02, Nam03]) 上記のようにして得た導来同値は, ファイバー積 $Y \times_X Y'$ の構造層を核とするフーリエ・向井変換と関手同型になる.

注意 16 全く同様の議論で, 高次元の Atiyah フロップ (= standard フロップ) の場合も同様の結果が得られる.

2.4 Abuaf フロップの場合

最近 Abuaf によって 5 次元の単純フロップの例が発見された [Seg16]^{*3}. Li によれば, 5 次元以下の単純フロップは Atiyah フロップ, 向井フロップ, Abuaf フロップに限られる [Li17].

Abuaf フロップの局所モデルは次のようにして構成される. V を 4 次元シンプレクティックベクトル空間とする. ラグランジアングラスマン $\mathrm{LGr} := \mathrm{LGr}(2, V)$ は 3 次元 2 次超曲面で, その普遍束 S に対して全空間 $Y := \mathrm{Tot}(S(-1))$ は 5 次元局所 Calabi-Yau 多様体になる. 一方, 射影化 $\mathbb{P} := \mathbb{P}(V)$ 上ではシンプレクティック形式がバンドル写像 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}}(1)$ を定めるが, これを用いて $Y' := \mathrm{Tot}((\Omega(1)/\mathcal{O}(-1)) \otimes \mathcal{O}(-2))$ と定義するとこれも 5 次元局所 Calabi-Yau 多様体になる. Y と Y' をそれぞれ零切断でブローアップすると同じ多様体 Z が得られ, 双有理対応が与えられる. この双有理対応



が Abuaf フロップである. Abuaf フロップは, それぞれフロップ収縮の例外集合が $\mathrm{LGr} \simeq Q_3$ と $\mathbb{P} = \mathbb{P}^3$ であり, 特に互いに同型でないという特徴を持つ.

紙数の都合で詳細は省くが, 以下のことを示すことができた.

- 定理 17 ([H17b]) (1) Abuaf フロップの場合にも, 戸田-上原の偏屈接続層のアーベル圏 ${}^0\mathrm{Per}(Y/X)$ や ${}^0\mathrm{Per}(Y'/X)$ が構成できる (cf. [TU10]).
- (2) ${}^0\mathrm{Per}(Y/X)$ の射影生成対象の傾斜ベクトル束は

$$T = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1) \oplus \mathcal{O}_Y(-2) \oplus S(-2)$$

である. ここで S は普遍束の Y への引き戻しである. ${}^0\mathrm{Per}(Y'/X)$ の射影生成対象の傾斜ベクトル束は

$$T' = \mathcal{O}_{Y'} \oplus \mathcal{O}_{Y'}(-1) \oplus \mathcal{O}_{Y'}(-2) \oplus \Sigma(-2)$$

である. ここで, $H^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}(-3)) \simeq \mathbb{C}$ であり, Σ は非自明な拡大

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \rightarrow \Sigma \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(2) \rightarrow 0$$

で得られるベクトル束である.

- (3) $\phi_*(T)$ と $\phi'(T')$ はミューテーションで繋がり, 向井フロップの場合と同様にして得られる CCR の導来同値のフーリエ・向井核は, ファイバー積 $Y \times_X Y'$ の構造層と与えられる.

ここでのミューテーションの計算には, LGr の例外生成列の理論を使う. この場合の計算は複雑なので省略するが, 後にツイスト関手との関係を述べる際に計算の仕方を説明する.

^{*3} このフロップはプライベートコミュニケーションの中で Segal と共有され, [Seg16] で研究された.

3 ツイスト関手と NCCR のミューテーション

ミューテーションは、CCR 間の導来同値以外にも、ツイスト系の自己同値関手 (cf. [ST01, HT06]) とも関連する。

3.1 3 次元の場合

2.2 節と同じ記号を用いる。特に、 T, T' でそれぞれ Y, Y' 上の Van den Bergh の傾斜ベクトル束を表す。2.2 説では、ミューテーションが[‡] $\mu_R(\phi_*(T)) \simeq \phi_*(T')$ と計算されることを言い、このミューテーションから得られる Y と Y' の間の導来同値が Bridgeland-Chen の導来同値と関係することを述べた。

一方、 Y と Y' を入れ替えれば、 $\mu_R(\phi_*(T')) \simeq \mu_R(\phi_*(T))$ であることも分かる。つまり、

$$\mu_R \mu_R(\phi_*(T)) \simeq \phi_*(T)$$

となり、 R でのミューテーションは周期 2 をもつ。各ミューテーションで得られる導来同値を合成することで、 $\text{End}_Y(T)$ の導来自己同値

$$\Phi_R^2 \in \text{Auteq}(\text{D}^b(\text{End}_Y(T)))$$

が得られる。2.2 よりこれはフロップ-フロップと呼ばれる導来自己同値関手

$$\mathbf{Flop} \circ \mathbf{Flop} \in \text{Auteq}(\text{D}^b(Y))$$

と関手同型になる。Donovan-Wemyss はこの導来自己同値に関して次を示した：

定理 18 ([DW16]) フロップ収縮する有理曲線 $C \simeq \mathbb{P}^1$ に対し、 $E = \mathcal{O}_C(-1)$ とする。ミューテーションから定まる自己同値関手 $\Phi_R^2 \in \text{Auteq}(\text{D}^b(\text{End}_Y(T)))$ は導来同値 $\text{RHom}_Y(T, -) : \text{D}^b(Y) \rightarrow \text{D}^b(\text{End}_Y(T))$ のもとでフロップ-フロップ自己同値関手 $\mathbf{Flop} \circ \mathbf{Flop} \in \text{Auteq}(\text{D}^b(Y))$ と対応し、さらに $\mathbf{Flop} \circ \mathbf{Flop}$ は E から定まる非可換ツイスト関手 T_E^{nc} の逆関手と関手同型になる。

つまり、NCCR の R での周期 2 のミューテーションから定まる自己同値関手（の逆関手）としてツイスト関手を解釈できる。

C が $(-1, -1)$ -型の曲線の場合は、 E は $\text{D}^b(Y)$ 球面対象であり、非可換変形関手は E で定義される球面ツイスト T_E 、すなわち完全三角

$$\text{RHom}_Y(E, -) \otimes E \rightarrow \text{id} \rightarrow T_E$$

で表されるものになる。 C が $(-1, -1)$ -型でない場合は、 $\text{Ext}_Y^1(E, E) \neq 0$ となり E は球面対象ではないが、この $\text{Ext}_Y^1(E, E)$ に対応する非可換変形の普遍層 $\mathcal{E} \in \text{D}^b(Y)$ が存在して、非可換変形関手 T_E^{nc} は完全三角

$$\text{RHom}_Y(\mathcal{E}, -) \otimes_{\Lambda_{\text{con}}} \mathcal{E} \rightarrow \text{id} \rightarrow T_E$$

に現れる関手になる。ここで Λ_{con} はコントラクション代数と呼ばれる（一般には非可換な）Artin 環である。詳細は原論文を参照。

例 19 例 13 と同様、Atiyah フロップの場合を考える。例 13 では、 Y' 上のベクトル束の完全列を用いて

$$\mu_R(\phi_*(T)) = \mu_R(R \oplus M_{-1}) = R \oplus M_1 = \phi'_*(T')$$

と計算した。一方、例 13 の最後で述べたように、 Y 上で対応する完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-1) \rightarrow \mathcal{O}_Y^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}_Y(1) \rightarrow 0$$

を考え、これを $\text{Spec } R$ 上に押し出すと、完全列

$$0 \rightarrow M_{-1} \rightarrow R^{\oplus 2} \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

が得られる。例 13 と同様この $R^{\oplus 2} \rightarrow M_1$ が右 $\text{add}(R)$ -approximation であり、よって

$$\mu_R(\phi'_*(T')) = \mu_R(R \oplus M_1) = R \oplus M_{-1} = \phi_*(T)$$

となる。すなわち、

$$\mu_R \mu_R(\phi_*(T)) = \phi_*(T)$$

となる。ミューテーションから得られる自己同値関手 $\Phi_R^2 \in \text{Auteq}(\text{D}^b(\text{End}_Y(T)))$ は、導来同値 $\text{RHom}_Y(T, -) : \text{D}^b(Y) \rightarrow \text{D}^b(\text{End}_Y(T))$ のもとで、零切断 $\mathbb{P}^1 \simeq Y_0 \subset Y$ 上の直線束 $\mathcal{O}_{Y_0}(-1)$ から定まる球面ツイスト関手の逆関手に関手同型になる。

3.2 向井フロップの場合

向井フロップの場合にも、3 次元の場合と類似の現象が観測できる。

2.3 節では Y' 上の長オイラー系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(n-1)^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(n) \rightarrow 0$$

と $W'_0 := \mathcal{O}_{Y'} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{Y'}(n-1)$, $N_0 := \phi'_*(W'_0)$ に対して、 N_0 での n 回のミューテーションの繰り返し $\mu_{N_0} \cdots \mu_{N_0}(\phi'_*((T')^\vee))$ を

$$\mu_{N_0} \cdots \mu_{N_0}(\phi_*(T)) =: \mu_{N_0}^n(\phi'_*((T')^\vee)) = \phi_*(T \otimes \mathcal{O}_Y(1))$$

と計算したのであった。同様に、 Y 上の長オイラー系列 Y' 上の長オイラー系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-n) \rightarrow \mathcal{O}_Y(-n+1)^{\oplus n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_Y^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{O}_Y(1) \rightarrow 0$$

を用いて、 $W_0 = \mathcal{O}_Y \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_Y(-n+1)$ に対して命題 14 を用いると、 $\phi_*(W_0) \simeq N_0$ なので、NCCR を与える加群 $\phi_*(T \otimes \mathcal{O}_Y(1))$ の N_0 における n 回のミューテーションが

$$\mu_{N_0} \circ \cdots \circ \mu_{N_0}(\phi_*(T \otimes \mathcal{O}_Y(1))) =: \mu_{N_0}^n(\phi_*(T \otimes \mathcal{O}_Y(1))) = \phi_*(W_0 \oplus \mathcal{O}_Y(-n)) = \phi_*(T)$$

と計算できる。最初の計算と合わせると、

$$\mu_{N_0}^{2n}(\phi_*(T)) = \phi_*(T)$$

となり、 $\phi_*(T)$ の N_0 におけるミューテーションは周期 $2n$ を持つ。次のことが示せる。

定理 20 ([H17a]) $\phi_*(T)$ の N_0 における $2n$ 回のミューテーションから定まる導来自己同値関手 $\Phi_{N_0}^{2n} \in \text{Auteq}(\text{D}^b(\text{End}_Y(T)))$ は、導来同値 $\text{RHom}_Y(T, -) : \text{D}^b(Y) \rightarrow \text{D}^b(\text{End}_Y(T))$ のもとで、 $\mathcal{O}_{Y_0}(-n)$ から定まる P-ツイスト関手の逆関手に関手同型になる。

つまり、向井フロップの場合もツイスト関手は NCCR のミューテーションの周期から定まる自己同値関手として解釈できる。

注意 21 P-ツイストと向井フロップの関係については [ADM15] も参照せよ。

3.3 Abuaf フロップの場合

Abuaf フロップの場合も類似の現象が観察できる.

Y' 上の傾斜ベクトル束

$$S'_0 = \mathcal{O}_{Y'}(1) \oplus \mathcal{O}_{Y'} \oplus \mathcal{O}_{Y'}(-1) \oplus \Sigma(-1)$$

と S'_0 から定まる $\mathrm{NCCR} \mathrm{End}_{Y'}(S'_0)$ からスタートする. これは 2.4 節で与えた傾斜ベクトル束とは異なるが, S'_0 も傾斜ベクトル束になることは簡単なコホモロジーの計算でわかる. $W' = \mathcal{O}_{Y'} \oplus \mathcal{O}_{Y'}(-1) \oplus \Sigma(-1)$ とおくと, $S'_1 := W' \oplus \mathcal{O}_{Y'}(-2)$ も傾斜ベクトル束になることが分かり, よって Σ を定義した単完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-2) \rightarrow \Sigma(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}(1) \rightarrow 0$$

に命題 14 が適用できる. これによって, $N := \phi_*(W)$ とおいたとき, $\mu_N(\phi'_*(S'_0)) \simeq \phi'_*(S'_1)$ が分かる. 一方で, Y 上のベクトル束

$$S_1 := \mathcal{O}_Y(2) \oplus \mathcal{O}_Y(1) \oplus \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{S}(1)$$

を考えると, これも Y 上の傾斜ベクトル束で, $\phi_*(S_1) \simeq \phi'_*(S'_1)$ となることが分かる^{*4}. ($\phi_*(\mathcal{O}_Y(a)) \simeq \phi'_*(\mathcal{O}_{Y'}(-a))$, $\phi_*(\mathcal{S}(a)) \simeq \phi'_*(\Sigma(-a))$ が成り立つ.)

$$W := \mathcal{O}_Y(1) \oplus \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{S}(1)$$

と置いたとき, $S_0 := W \oplus \mathcal{O}_Y(-1)$ も Y 上のベクトル束である.

次の補題は重要である.

補題 22 (cf. [H17b]) Y 上にはベクトル束の長完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-1) \rightarrow \mathcal{O}_Y^{\oplus 5} \rightarrow \mathcal{S}(1)^{\oplus 4} \rightarrow \mathcal{O}_Y(1)^{\oplus 5} \rightarrow \mathcal{O}_Y(2) \rightarrow 0$$

が存在する.

上記のことを合わせると, この完全列と W に対して命題 14 が適用できる. $\phi_*(W) \simeq N$ なので, ミューテーションの計算は

$$\mu_N^3(\phi_*(S_1)) \simeq \phi_*(S_0)$$

となる. $\phi_*(S_0) \simeq \phi_*(S'_0)$, $\phi_*(S_1) \simeq \phi'_*(S'_1)$ なので, 結果として周期 4 のミューテーション

$$\mu_N^4(\phi_*(S_1)) \simeq \phi_*(S_1)$$

が見つかったことになる.

次のことが示せる.

定理 23 ([H17b]) 上記のミューテーションの周期から定まる自己同値

$$\Phi_N^4 \in \mathrm{Auteq}(\mathrm{D}^b(\mathrm{End}_Y(S_1)))$$

は, 導来同値 $\mathrm{RHom}_Y(S_1, -) : \mathrm{D}^b(Y) \rightarrow \mathrm{D}^b(\mathrm{End}_Y(S_1))$ のもとで, 零切断 $\mathrm{LGr} \simeq Y_0 \subset Y$ 上の直線束 $\mathcal{O}_{Y_0}(-1)$ から定まる球面ツイスト関手の逆関手に関手同型になる.

^{*4} S_1 や S'_1 は [Seg16] の中で研究された傾斜ベクトル束である.

補題について。上記の補題で述べた完全列は、幾何学的方法ではなく、LGr の導来圏の例外生成列

$$D^b(\text{LGr}) = \langle \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}_Y, S(1), \mathcal{O}(1) \rangle$$

から別の例外生成列

$$D^b(\text{LGr}) = \langle \mathcal{O}_Y, S(1), \mathcal{O}(1), \mathcal{O}_Y(2) \rangle$$

へ「例外生成列のミューテーション」する計算を追跡することで発見できる。このように、NCCR のミューテーションと例外生成列のミューテーションは状況によっては完全にパラレルになっている。向井フロップの場合の計算に用いた長オイラー列も、射影空間の Beilinson 例外生成列のミューテーションに現れるものである。

3.4 Gorenstein 巡回商特異点の CCR 場合

$Y = \text{Tot}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1))$ とする。 Y は Gorenstein 孤立巡回商特異点 $X = \mathbb{A}^{n+1}/G$ の CCR である。 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)$ の Y への引き戻しを $\mathcal{O}_Y(a)$ と書くと、

$$T = \mathcal{O}_Y \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_Y(-n+1) \oplus \mathcal{O}_Y(-n)$$

は Y 上の傾斜ベクトル束である。零切断 $Y_0 \subset Y$ は Y の因子で、 $\mathcal{O}_Y(Y_0) \simeq \mathcal{O}_Y(-n-1)$ である。よって、 $U = Y \setminus Y_0$ とすると、 $\mathcal{O}_U \simeq \mathcal{O}_Y(n+1)$ であり、このことから

$$\phi_*(\mathcal{O}_Y(a)) \simeq \phi_*(\mathcal{O}_Y(a+n+1))$$

が $-n \leq a \leq -1$ に対して成り立つ。今、長オイラー列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(-n) \rightarrow \mathcal{O}_Y(-n+1)^{\oplus n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}_Y^{\oplus n+1} \rightarrow \mathcal{O}_Y(1) \rightarrow 0$$

と $W_0 = \mathcal{O}_Y \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_Y(-n+1)$ に対して命題 14 を用いると、 $N = \phi_*(W)$ に対して

$$\mu_N^n(\phi_*(T)) \simeq \phi_*(W \oplus \mathcal{O}_Y(1)) \simeq \phi_*(W) \oplus \phi_*(\mathcal{O}_Y(1)) \simeq \phi_*(T)$$

となる。これによって導来自己同値 $\Phi_N^n \in \text{Auteq}(\text{End}_Y(T))$ が得られる。これは導来同値 $\text{RHom}_Y(T, -) : D^b(Y) \rightarrow D^b(\text{End}_Y(T))$ のもとで、零切断 $Y_0 \subset Y$ 上の直線束 $\mathcal{O}_{Y_0}(-n)$ から定まる球面ツイスト関手の逆関手に関手同型になる。

参考文献

- [ADM15] N. Addington, W. Donovan, C. Meachan, *Mukai flops and P-twists*, preprint (2015), <https://arxiv.org/abs/1507.02595>.
- [DW16] W. Donovan, M. Wemyss, *Noncommutative deformations and flops*, Duke Math. J., **165**(8) (2016), 1397–1474.
- [H17a] W. Hara, *Non-commutative crepant resolution of minimal nilpotent orbit closures of type A and Mukai flops*, Adv. Math., **318** (2017), 355–410.
- [H17b] W. Hara, *On derived equivalence for Abouaf flop: mutation of non-commutative crepant resolutions and spherical twists*, preprint, <https://arxiv.org/abs/1706.04417>.

- [HT06] D. Huybrechts, R. Thomas, *$\mathbb{P}$ -objects and autoequivalences of derived categories*, Math. Res. Lett., **13**(1) (2006), 87–98.
- [IU16] A. Ishii, K. Ueda, *Dimer models and crepant resolutions*, Hokkaido Math. J. **45**(1) (2016), 1–42.
- [IW14a] O. Iyama, M. Wemyss, *Maximal modifications and Auslander-Reiten duality for non-isolated singularities*, Invent. Math., **197**(3) (2014), 521–586.
- [IW14b] O. Iyama, M. Wemyss, *Singular derived categories of $\mathbb{Q}$ -factorial terminalizations and maximal modification algebras*, Adv. Math., **261** (2014), 85–121.
- [Kaw02] Y. Kawamata, *D-equivalence and K-equivalence*, J. Differential Geom., **61**(1) (2002), 147–171.
- [Li17] D. Li, *On certain K-equivalent birational maps*, preprint 2017, <https://arxiv.org/abs/1701.04054>.
- [Nak16] Y. Nakajima, *Mutations of splitting maximal modifying modules: The case of reflexive polygons*, preprint (2016), <https://arxiv.org/abs/1601.05203>, to appear in IMRN.
- [Nam03] Y. Namikawa, *Mukai flops and derived categories*, J. Reine Angew. Math., **560** (2003), 65–76.
- [ST01] P. Seidel, R. Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke. Math. J., **108** (2001), 37–108.
- [Seg16] E. Segal, *A new 5-fold flop and derived equivalence*, Bull. Lond. Math. Soc., **48**(3) (2016), 533–538.
- [TU10] Y. Toda, H. Uehara, *Tilting generators via ample line bundles*, Adv. Math., **223**(1) (2010), 1–29.
- [VdB04a] M. Van den Bergh, *Three-dimensional flops and noncommutative rings*, Duke Math. J., **122**(3) (2004), 423–455.
- [VdB04b] M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions*, The legacy of Niels Henrik Abel, 749–770, Springer, Berlin, 2004.
- [Wem17] M. Wemyss, *Flops and Clusters in the Homological Minimal Model Programme*, Invent. Math. **211**(2) (2018), 435–521.
- [川又] 川又雄二郎, 高次元代数多様体論, 岩波数学叢書, 岩波書店, 2014.
- [戸田] 戸田幸伸, 連接層の導来圏に関わる諸問題, 問題・予想・原理の数学 1, 数学書房, 2016.