

λ -幾何における3点の最小スタイナ木について On Three Point Steiner Minimum Tree in λ -Geometry

岡山県立大学情報工学部 早瀬道芳 (Michiyoshi Hayase)

Abstract: The condition for the addition of the Steiner point and its optimum location in the Steiner minimum tree (SMT) for three given points in the λ -geometry plane are shown. SMT's are important to layout LSI's and Printed Boards in rectilinear geometry and construct networks with the shortest paths in Euclid geometry. λ -geometry introduced to fill the gap between both geometries allows only orientations with angles $(i\pi/\lambda)$ for all i , where i and $\lambda (\geq 2)$ are integers. First, the optimum location of the Steiner point is shown for three point SMT whose total length of edges is shorter than that of the corresponding minimum spanning tree (MST). It is surprising that when $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ there are infinite candidate points of the Steiner point. Next, the condition for the locations of the three points is shown for the SMT coinciding with the corresponding MST.

1 はじめに

スタイナ木は、 $x-y$ 平面上に与えられた点の集合に必要な応じて新たな点 (スタイナ点と呼ぶ) を追加して、点間を枝で接続した木である。特に、枝の長さの和が最小になる木を最小スタイナ木 (Steiner Minimum Tree, 以下 SMT と略す) と言う。SMT 問題は、ネットワーク配置や VLSI の配線の最短経路問題として発展してきた。前者は、任意方向の線分を許すユークリッド幾何における最短経路を求める問題であり、後者は、水平方向と垂直方向の線分のみを許す直交幾何における最短経路を求める問題である。

最近、ユークリッド幾何と、直交幾何の間をつなぐ概念として、「 λ -幾何」の発表がされた [1][2][3]。 λ -幾何は、線分を方向を水平方向と $\pi/\lambda (\lambda \geq 2)$ の整数倍の方向のみに限定した幾何である (図 1 参照)。2-幾何 ($\lambda = 2$) は直交幾何、 ∞ -幾何 ($\lambda = \infty$) はユークリッド幾何である。

一般の SMT 問題はユークリッド幾何でも直交幾何でも NP-完全である [4][5]。 λ -幾何 ($3 \leq \lambda < \infty$) でも NP-完全と予想されている [2]。 λ -幾何の基本的性質として、文献 [1] は距離に関するボロノイ図の作成法や凸多角形間の最小距離の求め方を述べている。また、文献 [2] は SMT の次数や最小全域木との最大比の予想を述べている。しかし、最も単純な場合である、与えられた 3 点に対する SMT のスタイナ点の有無とその位置については、2-幾何の場合 [6] と

∞ -幾何の場合しか知られていない。このため、 λ -幾何 ($2 \leq \lambda \leq \infty$) における、3 点を与えられた時の SMT のスタイナ点の有無とその位置について述べる。

本論文では、第 2 章で λ -幾何の距離とユークリッド距離の関係について述べる。第 3 章では与えられた 3 点に対して、最小全域木より枝長和が小さくなる SMT のスタイナ点の位置を述べる。そして、第 4 章で SMT が最小全域木と一致する場合の 3 点の相対位置について述べる。以下、スタイナ木と全域木は λ -幾何の木であり、枝は直線とみなす。各枝を 1 本以上の軸方向線分で置き換えると軸方向線分からなる λ -幾何の木になる。

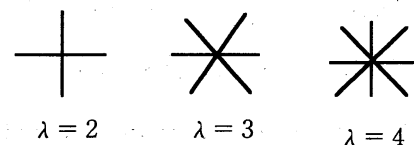


図 1. λ -幾何の軸方向
Fig. 1 Orientations of λ -Geometry

2 λ -幾何の距離

λ -幾何は水平方向と π/λ の整数倍の方向の線分のみが許される。この許される方向を軸方向と呼ぶ。そして、2 点間の λ -距離 d^λ は次のように定義する [1]。ユークリッド距離は ∞ -距離 d^∞ である。

[定義 1] 2 点 p_1, p_2 間を軸方向の線分 $l_1, l_2, \dots, l_m$ でつなぎ、各線分 l_i の長さを d_i^∞ とする。2 点 p_1, p_2 間の λ -距離 d^λ は、

$$d^\lambda = \min\{\sum d_i^\infty\},$$

とする.

[補題1][7] 2点間の λ -距離 d^λ と ∞ -距離 d^∞ の間には次の関係式が成り立つ.

$$d^\lambda = d^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{2\lambda} - \epsilon)}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}}.$$

である. 但し, ϵ ($0 \leq \epsilon \leq \pi/\lambda$) は2点を結ぶ直線が直近の軸方向となす角度である.

図2に示すように点 p_1 を通り点 p_2 をはさむ2つの隣接した軸方向線の夾角を2等分する中心線を引くと, 2点 p_1, p_2 間の λ -距離 d^λ は, この中心線に沿う直線 $p_1 p_2$ の射影を $\cos \pi/(2\lambda)$ で割った値である. d^λ は, 2点間の直線の方法が中心線の方法に近い(軸方向より遠い)程 d^∞ より大きくなり, 直線の方法が軸方向と一致すると d^∞ と一致する. 補題1の関係式を用いれば, 枝長の λ -距離を2点間の ∞ -距離と2点間の直線の方法から求めることができる.

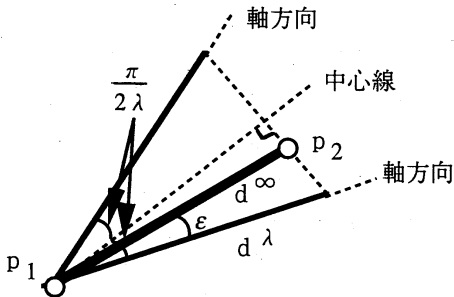
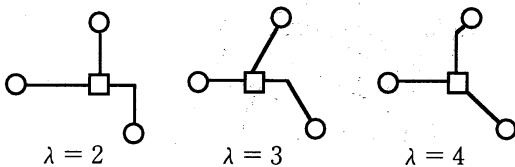


図2. λ -幾何の2点間の距離

Fig.2 Distance between two points in λ -geometry

3 最小スタイナ木のスタイナ点の位置

本章では与えられた3点のSMTのスタイナ点の位置をを求める. SMTのスタイナ点の次数は3または4である[2]ので, 3点に対してスタイナ点は高々1個である. 図3に $\lambda = 2, 3, 4$ の場合のSMTの例を示す.



□はスタイナ点

図3. 3点のSMTの例

Fig.3 Examples of three point SMT

xy 平面上に3点 a, b, c が与えられたとし, 各座標を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ とする

(図4参照). 追加するスタイナ点 s の座標を (x_s, y_s) とし, 点 s と3点 a, b, c を枝でつなぐ. 以下では, 3点 a, b, c に関する添字を1, 2, 3で表わし, 共通の場合の添字を i で表わす. 枝 as, bs, cs の各長さを ∞ -距離で $w_1^\infty, w_2^\infty, w_3^\infty$ とし, 各点 a, b, c から点 s への直線方向と水平方向との反時計方向角度を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とする. また, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を角度 π/λ 単位に切り上げた角度を ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 とする. すなわち, $\phi_i = \lceil \lambda \theta_i / \pi \rceil (\pi/\lambda)$ である.

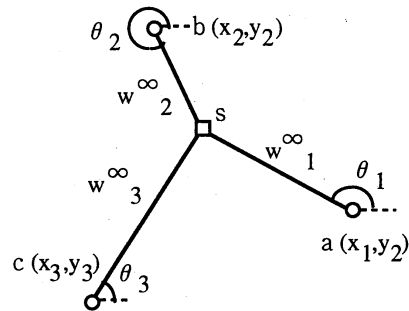


図4. 3点のスタイナ木

Fig.4 Three point Steiner tree

3点 a, b, c のスタイナ木の λ -距離による枝長和 W^λ は, 補題1を用いて, 次式で表される.

$$\begin{aligned} W^\lambda &= w_1^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{2\lambda} - \phi_1 + \theta_1)}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}} + w_2^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{2\lambda} - \phi_2 + \theta_2)}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}} \\ &\quad + w_3^\infty \frac{\cos(\frac{\pi}{2\lambda} - \phi_3 + \theta_3)}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}} \\ &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}} \{ (x_s - x_1) \cos(\phi_1 - \frac{\pi}{2\lambda}) + (y_s - y_1) \sin(\phi_1 - \frac{\pi}{2\lambda}) \\ &\quad + (x_s - x_2) \cos(\phi_2 - \frac{\pi}{2\lambda}) + (y_s - y_2) \sin(\phi_2 - \frac{\pi}{2\lambda}) \\ &\quad + (x_s - x_3) \cos(\phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + (y_s - y_3) \sin(\phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) \}. \end{aligned}$$

W^λ をスタイナ点 s の座標 (x_s, y_s) に関して偏微分すると,

$$\frac{\partial W^\lambda}{\partial x_s} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}} \{ \cos(\phi_1 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) \}.$$

$$\frac{\partial W^\lambda}{\partial y_s} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}} \{ \sin(\phi_1 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \sin(\phi_2 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \sin(\phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) \}.$$

である。点 s における勾配ベクトル $\text{grad } W^\lambda$ は、角度 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の値のみで決まる。 ϕ_i は π/λ の整数倍であるので、与えられた点を通り水平方向との角度 ϕ_i の直線は、その点を通る軸方向線の一つと一致する。与えられた 1 点を通るすべての軸方向線を引くと、 2λ 個の放射状の領域に分かれる。また図 5 に示すように、3 点を通る軸方向線をすべて引くと、更に細分割された領域に分かれる。これらの領域を定義する。

[定義 2] 与えられた 1 点 a を通る一つの軸方向の線をその点からの 2 つの半直線とみなし、無限遠方向が水平方向から反時計方向角度 ξ_i をなす半直線を点 a からの ξ_i -半軸方向線と呼び、 $La(\xi_i)$ と表わす。

1 点を通るすべての半軸方向線を引くと、 2λ 個の放射状の領域に分かれる。 $La(\xi_i)$ と $La(\xi_i - \pi/\lambda)$ ではさまれた領域を点 a からの ξ_i -放射領域（境界線は含めない）と呼び、 $Ra(\xi_i)$ と表わす。

2 点 a, b からの 2 つの放射領域の共通部分 $Ra(\xi_1) \cap Rb(\xi_2)$ を $Rab(\xi_1, \xi_2)$ と表わす。

3 点から半軸方向線をすべて引くと、各放射領域は更に細分割された領域に分かれる。 $Ra(\xi_1) \cap R(\xi_2) \cap R(\xi_3)$ を (ξ_1, ξ_2, ξ_3) -分割領域（境界線は含めない）と呼び、 $R(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ と表わす。

特に、境界線を含めた閉集合を表わす場合は、それぞれ、 $Qa(\xi_i), Qab(\xi_i, \xi_j), Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ と表わす。また、点 c が領域 $Ra(\xi_i)$ に含まれることを示す場合は $c \in Ra(\xi_i)$ などと書く。

どの分割領域内にスタイナ点を置くかのみにより、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の値の組が決まり、勾配ベクトル $\text{grad } W^\lambda$ の値が決まるので、各分割領域内の勾配ベクトル $\text{grad } W^\lambda$ の値は一定である。従って、 W^λ の値を z 軸方向に描くと、各分割領域内では W^λ の値は平面になる。更に、 W^λ の値は分割領域の境界線上で連続である。

分割領域の境界線上での W^λ の偏微分係数は、隣接するいずれの分割領域から境界線に近づくかにより値が異なり、境界線上で不連続である。しかし、 W^λ の境界線の向きの方向微分係数は、隣接するいずれの分割領域から境界線に近づいても一致する。境界線が $Lc(\xi)$ とすると、 W^λ の境界線分上の点における角度 ξ 向きの方向微分係数 $D_\xi W^\lambda$ は、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} D_\xi W^\lambda &= \frac{\partial W^\lambda}{\partial x_s} \cos \xi + \frac{\partial W^\lambda}{\partial y_s} \sin \xi \\ &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2\lambda}} \{ \cos(\phi_1 - \xi - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \xi - \frac{\pi}{2\lambda}) \} \end{aligned}$$

$$+ \cos(\phi_3 - \xi - \frac{\pi}{2\lambda}) \}.$$

以下では、方向微分係数の正負零を判定する式の表現において定数 $1/\cos(\pi/2\lambda)$ を省略する。

W^λ が最小になるスタイナ点の位置を求める。

[補題 2] スタイナ木の枝長和 W^λ の勾配ベクトル $\text{grad } W^\lambda$ が 0 になるのは、 $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ 、且つ、スタイナ点がある。

$$|\phi_1 - \phi_2| = |\phi_2 - \phi_3| = |\phi_3 - \phi_1| = \frac{2\pi}{3},$$

を満たす $Q(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ 内にある場合である。

(証明)

$$\text{grad } W^\lambda = 0 \text{ ie. } \frac{\partial W^\lambda}{\partial x_s} = \frac{\partial W^\lambda}{\partial y_s} = 0,$$

であればよい。この式より、

$$\cos \phi_1 + \cos \phi_2 + \cos \phi_3 = \sin \phi_1 + \sin \phi_2 + \sin \phi_3 = 0,$$

が得られる。この解は、

$$|\phi_1 - \phi_2| = |\phi_2 - \phi_3| = |\phi_3 - \phi_1| = \frac{2\pi}{3},$$

である。しかし、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は π/λ の整数倍であるので、この解が成り立つのは $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ の場合のみである。境界は W^λ の連続性により含める。□

図 5 に、 $\lambda = 6$ の場合の $\text{grad } W^\lambda = 0$ となる分割領域の例を網かけで示す。さらに、相互に $2\pi/3$ で交叉する半軸方向線 $La(\phi_1), Lb(\phi_2), Lc(\phi_3)$ を矢印付き線で示す。驚くことに、 $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ の場合には、 $\text{grad } W^\lambda = 0$ の分割領域が面になる場合、SMT のスタイナ点の候補位置は無限個存在する。

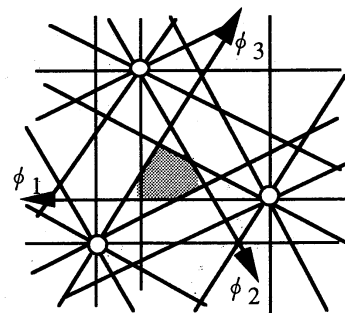


図 5. 軸方向線による領域分割と
 $\text{grad } W^\lambda = 0$ の領域 ($\lambda=6$)
Fig.5 Partition by legal orientation lines
and the area where $\text{grad } W^\lambda = 0$ ($\lambda=6$)

$\lambda \equiv 1$ 及び $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合、 2π の 3 等分角は

π/λ の整数倍にはならないので、軸方向に合わせて切り上げた角度を α 、切り捨てた角度を β と表す。

[定義3] $\alpha = \lceil 2\lambda/3 \rceil (\pi/\lambda)$, $\beta = \lfloor 2\lambda/3 \rfloor (\pi/\lambda)$.
また, $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$ の場合 $\gamma = \alpha$. $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合 $\gamma = \beta$. $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ の場合 $\gamma = \alpha = \beta = 2\pi/3$ とする.

例えば, $\lambda = 4$ では $\alpha = \gamma = 3\pi/4$, $\beta = \pi/2$ であり, $\lambda = 5$ では $\alpha = 4\pi/5$, $\beta = \gamma = 3\pi/5$ である.そして, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ である.

$\lambda \equiv 1$ 及び $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合, SMT のスタイナ点の位置は分割領域内にないので, 残るのは境界線分上と境界線の交点である. 先ず, 分割領域の境界線分 (境界線の交点を除く) 上が SMT のスタイナ点の位置である条件を考察する. 境界線分上の点における W^1 の境界線分の向きへの方向微分係数が 0 になればよい. 境界線分の軸方向を ϕ_3 とすると,

$$\cos(\phi_1 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} = 0,$$

この式を満たし, π/λ の整数倍となる ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の組は, 補題 2 で示した $\text{grad } W^1 = 0$ の解と同じであり, $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ の場合のみ成り立つ. 従って, $\lambda \equiv 1$ 及び $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合, 境界線分上は SMT のスタイナ点の位置でない.

次に, 境界線の交点が SMT のスタイナ点の位置である条件を考察する. 境界線の交点で W^1 が最小になることを示すには, 交点におけるすべての境界線分の外向きへの方向微分係数が正であることを示せば十分である. 交点における境界線の向きへの方向微分係数が正ならば, 分割領域内の向きへの方向微分係数も正になる.

[補題 3] $\lambda \equiv 1$ 及び $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合, すべての境界線分の向きへの方向微分係数が正である境界線の交点の位置は,

$\phi_2 - \phi_1 = \alpha$, and $\phi_1 - \phi_3 = \gamma$, and $\phi_3 - \phi_2 = \beta$,
を満たす $L a(\phi_1)$ と $L b(\phi_2)$ と $L c(\phi_3)$ の 3 つの線の交点, または, $R b(\phi_2)$ 内にある $L a(\phi_1)$ と $L c(\phi_3)$ の交点である.

または, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を互換した条件である.

(証明)

先ず, 3 本の半軸方向線が 1 点で交叉する場合の条件を求める. 図 6 (a) のように, $L a(\phi_1)$ と $L b(\phi_2)$ と $L c(\phi_3)$ が 1 点で交叉するとする. 交点の周りの分割領域 1 と 2, 2 と 3, 3 と 4, 4 と 5, 5 と 6, 6 と 1 には含まれた各境界線の向きへの方向微分係数が正

であれば十分である. その 6 個の式を次に示す.

$$\cos(\phi_1 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \phi_3 + \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} > 0,$$

$$\cos(\phi_1 - \phi_2 - \pi - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} + \cos(\phi_3 - \phi_2 - \pi + \frac{\pi}{2\lambda}) > 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{2\lambda} + \cos(\phi_2 - \phi_1 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_3 - \phi_1 + \frac{\pi}{2\lambda}) > 0,$$

$$\cos(\phi_1 - \phi_3 - \pi + \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \phi_3 - \pi - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} > 0,$$

$$\cos(\phi_1 - \phi_2 + \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} + \cos(\phi_3 - \phi_2 - \frac{\pi}{2\lambda}) > 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{2\lambda} + \cos(\phi_2 - \phi_1 - \pi + \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_3 - \phi_1 - \pi - \frac{\pi}{2\lambda}) > 0,$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が π/λ の整数倍であることから, この連立不等式の解は, $2 \leq \lambda \leq \infty$ に対して,

$$\phi_2 - \phi_1 = \alpha, \text{ and } \phi_1 - \phi_3 = \gamma, \text{ and } \phi_3 - \phi_2 = \beta,$$

である. または, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を互換した解である. $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ の場合の解は補題 2 で示した $\text{grad } W^1 = 0$ なる領域が点に縮退したものである.

次に, 2 本の半軸方向線が 1 点で交叉する場合の条件を求める. 図 6 (b) のように, $R b(\phi_2)$ 内で $L a(\phi_1)$ と $L c(\phi_3)$ が交叉するとする. 交点の周りの分割領域 1 と 2, 2 と 3, 3 と 4, 4 と 1 に挟まれた各境界線の外向きの方向微分係数が正であれば十分である. その 6 個の式を次に示す.

$$\cos(\phi_1 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \phi_3 + \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} > 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{2\lambda} + \cos(\phi_2 - \phi_1 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_3 - \phi_1 + \frac{\pi}{2\lambda}) > 0,$$

$$\cos(\phi_1 - \phi_3 - \pi + \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \phi_3 - \pi - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} > 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{2\lambda} + \cos(\phi_2 - \phi_1 - \pi + \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_3 - \phi_1 - \pi - \frac{\pi}{2\lambda}) > 0,$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が π/λ の整数倍であるので, この連立不等式の解は, $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$ 及び $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合,

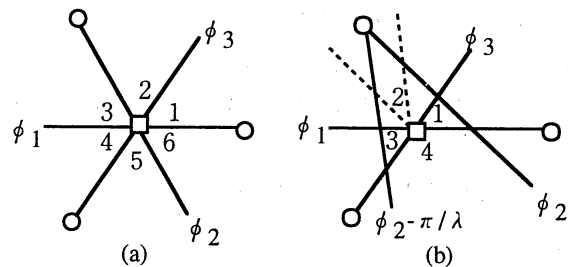


図 6. 最小スタイナ木のスタイナ点位置
fig.6 Location of the Steiner point of SMT

$$\phi_2 - \phi_1 = \alpha, \text{ and } \phi_1 - \phi_3 = \gamma, \text{ and } \phi_3 - \phi_2 = \beta,$$

である. $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ の場合は解がない. $\square$

スタイナ点を中心にして見ると, スタイナ点の周りの3つの角度の1つは軸方向線の夾角 γ である. 残り2つの角度は共に α と β の間の値である. 図6(b)の $\square$ で示したスタイナ点から $Lb(\phi_2)$ と $Lb(\phi_2 - \pi/\lambda)$ との平行線 (図中の点線) を補助線として引くと分かる.

SMTのスタイナ点が与えられた点と重ならない場合は最小全域木より枝長和が小さいので, 補題2と補題3より, 次の定理を得る.

[定理1] 与えられた3点に対して, 最小全域木より枝長和が小さいSMTのスタイナ点は次の条件を満たす位置である.

(1) $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ の場合,

$$|\phi_1 - \phi_2| = |\phi_2 - \phi_3| = |\phi_3 - \phi_1| = \frac{2\pi}{3},$$

を満たす $Q(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ 内である. 但し, 与えられた点が接する分割領域とその境界線を除く.

(2) $\lambda \equiv 1$ 及び $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合, 2点からの半軸方向線が角度 γ で交叉する点で, 且つ, この点につながる枝の3つの夾角が, $\gamma, \beta + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2 (0 \leq \epsilon_1, \epsilon_2 \leq \pi/\lambda, \epsilon_1 + \epsilon_2 = \pi/\lambda)$ となる点である.

この定理が既知の結果[6]と一致することを示す. $\lambda = \infty$ の場合, スタイナ点の周りの3つの角度はすべて $\alpha = \beta = 2\pi/3$ になる. $\lambda = 2$ の場合, スタイナ点の周りの角度は $\pi/2, \pi/2 + \epsilon_1, \pi/2 + \epsilon_2$ になるので, スタイナ点の x, y 座標は与えられた3点の x, y 座標のメディアンになる.

4 最小スタイナ木と最小全域木の一致

3点が与えられた時, スタイナ点追加が不要, 即ち, SMTが最小全域木と一致する条件を考察する. 与えられた3点の一つにスタイナ点を重ねた場合にSMTになる条件を求めればよい. このためには, スタイナ点を重ねた点におけるすべての向きの方微分係数が正であればよい. 従って, 次の定理を得る. 但し, 角度は0を中心にして $\pm\pi$ の範囲で測る.

[定理2] 2点 a, b が先に与えられた時, 第3点 c の位置が次の条件のいずれかであればSMTは最小全域木と一致する.

$$(1) \quad c \in \{Q_{ab}(\phi_1, \phi_2) \mid |\phi_1 - \phi_2| \geq \alpha\}.$$

(2) 第2点 b が $Ra(\Phi_1)$ 内にある場合,

$$c \in \{Q_b(\phi_2) \mid |\phi_2 - \Phi_1| \leq \pi - \alpha\}$$

$$\cup \{Q_a(\phi_1) \mid |\phi_1 - \Phi_1| \geq \alpha\}.$$

(3) 第2点 b が $La(\Phi_1)$ 上にある場合,

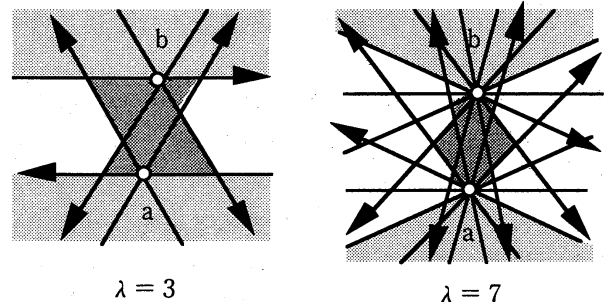
$$c \in \{Q_b(\phi_2) \mid -\pi + \alpha \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq \pi - \alpha + \frac{\pi}{\lambda}\}$$

$$\cup \{Q_a(\phi_1) \mid \phi_1 - \Phi_1 \leq -\alpha + \frac{\pi}{\lambda} \text{ or } \phi_1 - \Phi_1 \geq \alpha\}.$$

(証明は付録)

定理2の条件(1)はSMTのスタイナ点が重なる第3点 c の位置を表わし, 条件(2)(3)は, 先に置いた点 a または点 b にSMTのスタイナ点が重なる場合の第3点 c の位置を表わしている.

図7に $\lambda = 3$ と $\lambda = 7$ の場合の条件(1)を満たす領域の例を2点 a, b の中間位置にある濃い網かけ領域で示す. (a)は2点 a, b が同一軸方向線上にない場合であり, (b)は2点 a, b が同一軸方向線上にある場合である. 点 a, b から出る矢印付き半軸方向線は, それぞれ $|\phi_1 - \phi_2| \geq \alpha$ を満たす $Q_{ab}(\phi_1, \phi_2)$ に対応するすべての $La(\phi_1)$ と $Lb(\phi_2)$ を示す. なお, 条件(1)を満たす領域は, $La(\phi_1)$ と $Lb(\phi_2)$ が角度 $(\alpha - \pi/\lambda)$ で交叉する交点と与えられた2点 a, b からなる三角形の集合和にもなっている.

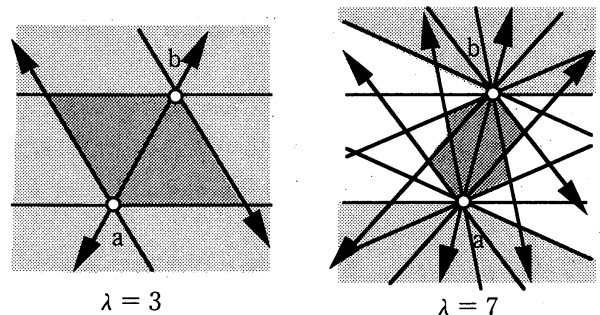


$\lambda = 3$

$\lambda = 7$

(a) 2点が軸方向線上にない場合

(a) Two points not on a legal orientation line



$\lambda = 3$

$\lambda = 7$

(b) 2点が軸方向線上にある場合

(b) Two points on a legal orientation line

図7. 最小スタイナ木と最小全域木が一致する場合の第3点の領域

Fig.7 Areas of the third point when SMT coincides with Minimum Spanning Tree

また、条件(2)(3)を満たす領域の例を点 a , b の外側の薄い網かけ領域で示す。 $\lambda = 3$ で点 a , b が一つの軸方向線上にある場合、定理2で示した領域の集合和は全平面を覆うので、第3点 c を任意の位置に置いても SMT と最小全域木の枝長和は一致する。

定理2の領域の集合和の補集合は、スタイナ点を追加することにより最小全域木より枝長和が小さい SMT ができる場合の第3点 c が存在する領域である。従って、次の系を得る。

[系1] 2点 a , b が先に与えられた時、第3点 c の位置が次の条件のいずれかであれば、最小全域木より枝長和が小さい SMT が存在する。但し、スタイナ点を追加する。

(1) 第2点 b が $Ra(\Phi_1)$ 内にある場合、

$$\begin{aligned} c \in & \{Q_{ab}(\phi_1, \phi_2) \mid |\phi_1 - \phi_2| < \alpha\} \\ & \cap \{Q_b(\phi_2) \mid |\phi_2 - \Phi_1| > \pi - \alpha\} \\ & \cap \{Q_a(\phi_1) \mid |\phi_1 - \Phi_1| < \alpha\}. \end{aligned}$$

(2) 第2点 b が $La(\Phi_1)$ 上にある場合、

$$\begin{aligned} c \in & \{Q_{ab}(\phi_1, \phi_2) \mid |\phi_1 - \phi_2| < \alpha\} \\ & \cap \{Q_b(\phi_2) \mid \pi - \alpha + \frac{\pi}{\lambda} < \phi_2 - \Phi_1 < -\pi + \alpha\} \\ & \cap \{Q_a(\phi_1) \mid -\alpha + \frac{\pi}{\lambda} < \phi_1 - \Phi_1 < \alpha\}. \end{aligned}$$

但し、(1)(2)の領域の周囲の境界線は除く。

図7の網かけのない領域(定理2で示した領域との境界線を除く)が、系1で示した領域である。

5 まとめ

本論文では、線分方向を水平方向と π/λ の整数倍の方向のみに限定した λ -幾何において、任意に与えられた3点に対する λ -幾何の SMT のスタイナ点の有無及びその位置を示した。3点に対する SMT のスタイナ点は高々1個であるので、スタイナ点の位置を決めれば SMT は決まる。先ず、SMT の枝長和が最小全域木のそれより小さくなる場合のスタイナ点の位置と3点の位置関係の条件を示した。そして、 $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ の場合には、SMT のスタイナ点の候補位置が、驚くことに無限個あり得ることを示した。次いで、SMT が最小全域木と一致する場合の3点の位置関係の条件も示した。 $\lambda = 3$ で2点の一つの軸方向線上にある場合、第3点をどの位置に置いても SMT と最小全域木の枝長和は一致する。

謝辞 有益な助言と絶えざる励ましを頂いた京都大学上林弥彦教授に感謝する。

参考文献

- [1] Windmayer, P., Wu, Y.F. and Wong, C.K.: On Same Distance Problem in Fixed Orientations, SIAM J. Comput., Vol.16, No.4, pp.728-746 (1987).
- [2] Sarrafzadeh, M. and Wong, C.K.: Hierarchical Steiner Construction in Uniform Orientations, IEEE Trans. on Comput.-Aided Des. Integrated Circuits & Syst., Vol.11, No.9, pp.1095-1103, (1992).
- [3] Burman, S., Chen, H. and Sherwani, N.: Improved Global Routing using λ -Geometry, Proc. of 29th Annual Allerton Conf. on Communications, Computing and Controls, pp.1083-1092, (1991).
- [4] Garey, M.R., Graham, R.L. and Johnson, D.S.: The Complexity of Computing Steiner Minimal Tree, SIAM J. Appl. Math., vol.32, no.4, (1977).
- [5] Garey, M.R. and Johnson, D.S.: The Rectilinear Steiner Tree Problem is NP-complete, SIAM J. Appl. Math., vol.32, no.4, pp.37-58, (1977).
- [6] Hannan, M.: On Steiner's Problem with Rectilinear Distance, SIAM J. Appl. Math., Vol.14, No.2, pp.255-265, (1977).
- [7] 早瀬道芳, 目本信太郎: λ -幾何のスタイナ木作成法, 情報処理学会論文誌, Vol.38, No.4, (1997) (掲載予定).

付 録

(定理2の条件(1)の証明)

(A) 図8(a)のように2点 a , b が先に与えられたとして、点 c が網かけで示した $Rab(\phi_1, \phi_2)$ 内にあり、スタイナ点と重なっているとする。点 c における ϕ_3 の向き方向微分係数は次式になる。

$$\begin{aligned} & \cos(\phi_1 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} \quad (A.1) \\ & = 2\cos(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda})\cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda}. \end{aligned}$$

この式が全ての ϕ_3 の値に対して正になるためには、

$$-2\cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} > 0, \quad (A.2)$$

であればよい。すなわち、

$$0 < \cos(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}) < \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2\lambda} \leq \frac{1}{2}.$$

ϕ_1 と ϕ_2 は π/λ の整数倍であるので、

$$|\phi_1 - \phi_2| \geq \alpha \geq \frac{2\pi}{3}, \quad (A.3)$$

であれば, 点 $c \in \text{Rab}(\phi_1, \phi_2)$ におけるすべての ϕ_3 の向きの方向微分係数は正になる.

(II) 次に, 点 c が $\text{Rab}(\phi_1, \phi_2)$ の境界線の $\text{La}(\phi_1)$ または $\text{La}(\phi_1 - \pi/\lambda)$ 上にある場合について考察する.

(II-1) 先ず, 図 8 (b) のように, 点 c が $\text{La}(\phi_1)$ 上にある場合. 先ず, $\text{Rab}(\phi_1, \phi_2)$ 側は, 方向微分係数が式 (A.1) と同じで, 正になる条件も同じである. 次に, 反対側の $\text{Rab}(\phi_1 + \pi/\lambda, \phi_2)$ 側の ϕ_3 の角度範囲

$$\phi_1 \leq \phi_3 \leq \phi_1 + \pi \quad \text{ie. } 0 \leq \phi_3 - \phi_1 \leq \pi$$

について, 点 c における ϕ_3 の向きの方向微分係数,

$$\cos(\phi_1 + \frac{\pi}{\lambda} - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda}, \quad (A.4)$$

が正であればよい. 式 (A.1) と (A.4) の差分をとると, 第 1 項の差になり, (A.3) を満たせば,

$$\begin{aligned} & \cos(\phi_1 + \frac{\pi}{\lambda} - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) - \cos(\phi_1 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{2\lambda} \sin(\phi_3 - \phi_1) \geq 0. \end{aligned}$$

となり, 方向微分係数は正である. 従って, 式 (A.3) が成立すれば, 点 $c \in \text{La}(\phi_1)$ におけるすべての ϕ_3 の向きの方向微分係数は正である.

(II-2) 次に, 点 c が $\text{La}(\phi_1 - \pi/\lambda)$ 上にある場合. 先ず, $\text{Rab}(\phi_1, \phi_2)$ 側は, 方向微分係数が式 (A.1) と同じで, 正になる条件も同じである. 次に, 反対側の $\text{Rab}(\phi_1 - \pi/\lambda, \phi_2)$ 側の ϕ_3 の角度範囲

$$\phi_1 - \pi/\lambda - \pi \leq \phi_3 \leq \phi_1 - \pi/\lambda \quad \text{ie. } 0 \leq \phi_3 - \phi_1 - \pi/\lambda \leq \pi$$

について, 点 c における ϕ_3 の向きの方向微分係数,

$$\cos(\phi_1 - \frac{\pi}{\lambda} - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_2 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda}, \quad (A.5)$$

が正であればよい. 式 (A.1) と (A.5) の差分をとると, 第 1 項の差になり, 式 (A.3) を満たせば,

$$\begin{aligned} & \cos(\phi_1 - \frac{\pi}{\lambda} - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) - \cos(\phi_1 - \phi_3 - \frac{\pi}{2\lambda}) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{2\lambda} \sin(\phi_3 - \phi_1 - \frac{\pi}{\lambda}) \geq 0. \end{aligned}$$

となり, 方向微分係数は正である. 従って, 式 (A.3) が成立すれば, 点 $c \in \text{La}(\phi_1 - \pi/\lambda)$ におけるすべての ϕ_3 の向きの方向微分係数は正である.

また, 点 c が $\text{Rab}(\phi_1, \phi_2)$ の他の境界線の $\text{Lb}(\phi_2)$, $\text{Lb}(\phi_2 - \pi/\lambda)$ 上, および, 境界線の交点上の場合も同様にすべての ϕ_3 の向きの方向微分係数が正になる. 以上より,

$$c \in \{Q_{ab}(\phi_1, \phi_2) \mid |\phi_1 - \phi_2| \geq \alpha\}.$$

であれば, SMT のスタイナ点は点 c と重なる. $\square$

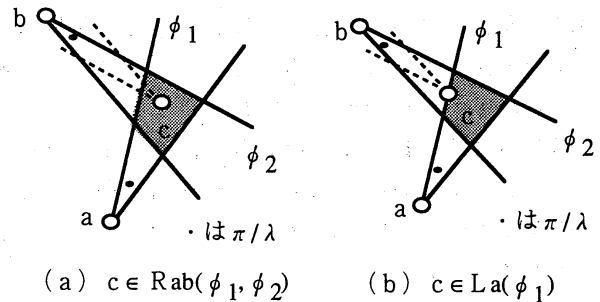


図 8. 定理 2 の証明

Fig.8 Proof of Theorem 2

(定理 2 の条件 (2) の証明)

点 b に SMT のスタイナ点が重なる場合は, 図 8 (a) の点 b と c を入れ換えた場合に対応する. 点 $b \in \text{Rac}(\phi_1, \phi_3)$ とする. 条件 (1) より点 a と点 c に関して $|\phi_1 - \phi_3| \geq \alpha$ である. 点 c を含む $Q_b(\phi_2)$ と点 b を含む $Q_c(\phi_3)$ とは, $\phi_3 = \phi_2 \pm \pi$ の関係にあるので,

$$c \in \{Q_b(\phi_2) \mid |\phi_2 - \phi_1| \leq \pi - \alpha\}$$

であれば, SMT のスタイナ点は点 b に重なる.

点 a に SMT のスタイナ点が重なる場合は, 更に点 b と a を入れ換えて同じ議論ができる. 点 $a \in \text{Rab}(\phi_1, \phi_2)$ とする. 条件 (1) より点 a と点 b に関して, $|\phi_2 - \phi_1| \leq \pi - \alpha$ である. 点 b を含む $Q_a(\phi_1)$ と点 a を含む $Q_b(\phi_1 \pm \pi)$ は, $\phi_1 = \phi_2 \pm \pi$ の関係にあるので,

$$c \in \{Q_a(\phi_1) \mid |\phi_1 - \phi_1| \geq \alpha\},$$

であれば, SMT のスタイナ点は点 a に重なる. $\square$

(定理 2 の条件 (3) の証明)

点 b に SMT のスタイナ点が重なる場合は, 図 8 (b) の点 b と c を入れ換えた場合に対応する. 点 $b \in \text{La}(\phi_1)$ とする. 点 b におけるすべての ϕ_2 の向きの方向微分係数が正になればよい. $\text{La}(\phi_1)$ の両側の $Q_{ac}(\phi_1, \phi_3)$ と $Q_{ac}(\phi_1 + \pi/\lambda, \phi_3)$ について方向微分係数を調べる.

(I) 先ず, $Q_{ac}(\phi_1, \phi_3)$ 側について.

点 b における ϕ_2 の向きの方向微分係数

$$\begin{aligned} & \cos(\phi_1 - \phi_2 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_3 - \phi_2 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda} \\ &= 2 \cos(\frac{\phi_1 - \phi_3}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} - \phi_2 + \phi_1) \cos(\frac{\phi_1 - \phi_3}{2}) + \cos \frac{\pi}{2\lambda}, \end{aligned}$$

が ϕ_2 の角度範囲

$$\phi_1 - \pi \leq \phi_2 \leq \phi_1 \quad \text{ie. } -\pi \leq \phi_2 - \phi_1 \leq 0$$

で正になる条件を 2 つの場合に分けて求める.

(I-1)

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leq 0 \quad \text{ie.} \quad \frac{\pi}{\lambda} \leq \Phi_3 - \Phi_1 \leq \pi + \frac{\pi}{\lambda}$$

の場合，方向微分係数の最小値が正になる条件は，

$$-2\cos\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2\lambda} > 0,$$

である．これは式(A.2)と同じであるので， ϕ_3 の範囲と合わせて，

$$\alpha \leq \phi_3 - \Phi_1 \leq \pi + \frac{\pi}{\lambda},$$

である．点cを含む $Qb(\phi_2)$ と点bを含む $Qc(\phi_3)$ とは， $\phi_3 = \phi_2 \pm \pi$ の関係にあるので，次式が成立する．

$$-\pi + \alpha \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq \frac{\pi}{\lambda}, \quad (\text{A.6})$$

(I-2)

$$0 \leq \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ie.} \quad -\pi + \frac{\pi}{\lambda} \leq \phi_3 - \Phi_1 \leq \frac{\pi}{\lambda}$$

の場合，方向微分係数の最小値が正になる条件は，

$$\begin{aligned} & -2\cos\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}\right) \cos\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2\lambda} \\ & = -\cos(\Phi_1 - \Phi_3 + \frac{\pi}{2\lambda}) > 0, \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

である．これより， ϕ_3 の範囲と合わせて，

$$-\pi + \frac{\pi}{\lambda} \leq \phi_3 - \Phi_1 \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda},$$

である．点cを含む $Qb(\phi_2)$ と点bを含む $Qc(\phi_3)$ とは， $\phi_3 = \phi_2 \pm \pi$ の関係にあるので，次式が成立する．

$$\frac{\pi}{\lambda} \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}, \quad (\text{A.8})$$

故に， $Qac(\Phi_1, \phi_3)$ 側で方向微分係数が正になる条件は，式(A.6)と(A.8)の範囲を合わせて，次式となる．

$$-\pi + \alpha \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda}, \quad (\text{A.9})$$

(II) $Qac(\Phi_1 + \pi/\lambda, \phi_3)$ 側について．

点bにおける ϕ_2 の向きの方微分係数，

$$\begin{aligned} & \cos(\Phi_1 - \phi_2 + \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos(\phi_3 - \phi_2 - \frac{\pi}{2\lambda}) + \cos\frac{\pi}{2\lambda} \\ & = 2\cos\left(\frac{\phi_3 - \Phi_1}{2} - \phi_2 + \Phi_1\right) \cos\left(\frac{\Phi_1 - \phi_3}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}\right) + \cos\frac{\pi}{2\lambda}, \end{aligned}$$

が ϕ_2 の角度範囲

$$\Phi_1 \leq \phi_2 \leq \Phi_1 + \pi \quad \text{ie.} \quad 0 \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq \pi$$

で正になる条件を2つの場合に分けて求める．

(II-1)

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\phi_3 - \Phi_1}{2} \leq 0 \quad \text{ie.} \quad -\pi \leq \phi_3 - \Phi_1 \leq 0$$

の場合，方向微分係数の最小値が正になる条件は，

$$-2\cos\left(\frac{\Phi_1 - \phi_3}{2} + \frac{\pi}{2\lambda}\right) + \cos\frac{\pi}{2\lambda} > 0,$$

である．これは式(A.2)と同じ形であるので， ϕ_3 の範囲と合わせて，

$$-\pi \leq \phi_3 - \Phi_1 \leq -\alpha + \frac{\pi}{\lambda},$$

である．点cを含む $Qb(\phi_2)$ と点bを含む $Qc(\phi_3)$ とは， $\phi_3 = \phi_2 \pm \pi$ の関係にあるので，次式が成立する．

$$0 \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq \pi - \alpha + \frac{\pi}{\lambda}, \quad (\text{A.10})$$

(II-2)

$$0 \leq \frac{\Phi_1 - \phi_3}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ie.} \quad 0 \leq \phi_3 - \Phi_1 \leq \pi$$

の場合，方向微分係数の最小値が正になる条件は式(A.7)と同じである． ϕ_2 の範囲は，

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leq \phi_3 - \Phi_1 \leq \pi,$$

である．点cを含む $Qb(\phi_2)$ と点bを含む $Qc(\phi_3)$ とは， $\phi_3 = \phi_2 \pm \pi$ の関係にあるので，

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq 0, \quad (\text{A.11})$$

故に， $Qac(\Phi_1 + \pi/\lambda, \phi_3)$ 側で方向微分係数が正になる条件は，式(A.10)と(A.11)の範囲を合わせて，次式が成立する．

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\lambda} \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq \pi - \alpha + \frac{\pi}{\lambda}, \quad (\text{A.12})$$

以上(I)の(A.9)と(II)の(A.12)の条件の範囲の共通部分をとって，

$$c \in \{Qb(\phi_2) \mid -\pi + \alpha \leq \phi_2 - \Phi_1 \leq \pi - \alpha + \frac{\pi}{\lambda}\}$$

であれば，SMTのスタイナ点は点bに重なる．

点aにSMTのスタイナ点が重なる場合は，更に点bと点aを入れ換えて同じ議論をする．点 $a \in Rb(\Phi_2)$ とすると，

$$-\pi + \alpha \leq \phi_1 - \Phi_2 \leq \pi - \alpha + \frac{\pi}{\lambda},$$

である．点bを含む $Qa(\Phi_1)$ と点aを含む $Qb(\Phi_2)$ は， $\Phi_1 = \Phi_2 \pm \pi$ の関係にあるので，

$$c \in \{Qa(\phi_1) \mid \phi_1 - \Phi_1 \leq -\alpha + \frac{\pi}{\lambda} \text{ or } \phi_1 - \Phi_1 \geq \alpha\},$$

であれば，SMTのスタイナ点は点aに重なる．□