

非圧縮流体の解析力学と流体の運動の行列表示

あらきけいすけ (ARAKI Keisuke)
岡山理大・工 (Okayama Univ. Sci.)

1 動機付け

非発散流体力学の Riemann 幾何学的解析をはじめるとあって、Arnold は次のように述べている：

有限次元 Lie 群上の測地線の性質を、無限次元の場合に形式的に引き移すとどんな結論が得られるか、を考えることは興味あることである。(文献 [1], p.314)

われわれはこの動機を共有し、少し基礎的な論点に戻って次のように問うてみることにしよう：

有限次元 Lie 群の場合に現れる行列の無限次元アナログは何なのか、「行列」の各成分はどのようなものか、この「行列」を用いたときに流体の方程式はどう書き下されるか。

本研究では流体力学の配位空間を考察しその結果を Navier-Stokes 方程式に当てはめる。流体力学の配位空間は微分同相写像群である。これは「全ラグランジアン・マーカークの配位」を微分幾何学のコトバで言ったに過ぎない。では計算に入ろう。

2 frozen-in 再考

ここでは「流体に凍結した場」の意味を再吟味する。流体の「容器」を M と表記する。

まず流体粒子 (ラグランジアン・マーカーク) の軌道を追跡しよう。ある予め与えられた「速度」場の履歴 $\{u_t; \mathfrak{X}(M), 0 \leq t \leq 1\}$ による移流を考えよう¹。初期位置 $\vec{a} \in M$ の時刻 t での位置を $g_t \vec{a}$ と書くと、 g_t は再帰的に次式で与えられる：

$$g_t \vec{a} = \vec{a} + \int_0^t u_s(g_s \vec{a}) ds. \quad (1)$$

以下、 g_t を流体粒子の位置 $\vec{a}$ に作用する作用素とみなす。ここで記号 e^{tu} を定義しておこう。 e^{tu} は定常な場 u による移流を表すものとする、すなわち：

$$e^{tu} \vec{a} = \vec{a} + \int_0^t u(e^{su} \vec{a}) ds. \quad (2)$$

作用素 g_t は形式的に群の計算ルールを満たしている。ここで与えた移流の表現はラグランジアン・マーカークの位置に直接作用する、すなわち、群の自然表現の無限次元アナログになっている²。この記述法はマーカークの位置を全部記述しなくては行けないので、群の作用の計算をする上では不便である。そこで場の量に対する作用を考えよう。以下で2点で定義される場 (2点の差)、3点で定義される場 (2点の差のベクトル積) の移流を考えよう³。

まず2点の差によって定義される場 $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ を考えよう (Fig.1(a) 参照)。点 $\vec{a}$ とそれをベクトル場 ξ により時間 δ 移流した点 $\vec{b}$ を考えよう：

$$\vec{b} = \vec{a} + \delta \xi(\vec{a}) + O(\delta^2) = e^{\delta \xi} \vec{a} + O(\delta^2). \quad (3)$$

線要素場の移流 $g_t^{[L]}$ を場を定義する2点の g_t による移流で定義しよう⁴：

$$(g_t^{[L]} \xi)(g_t \vec{a}) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{g_t \vec{b} - g_t \vec{a}}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(g_t e^{\delta \xi} g_t^{-1}) g_t \vec{a} - g_t \vec{a}}{\delta}. \quad (4)$$

¹本稿ではこれらの場の量の引数は Euler 的に与えるものとする。したがって Lagrange 速度場は $u(g_t \vec{a})$ というように、引数にマーカークの値を代入することで表現する。

²マーカークの位置 $\vec{a}$ に関する線形性はもちろん無い。

³この考え方に基いて、1点で定義される場 (示量性変数の場)、3点で定義される場 (2点の差の三重積) で与えられる場 (これは示量性変数の場ではない) の移流をおのおの考えることができる。

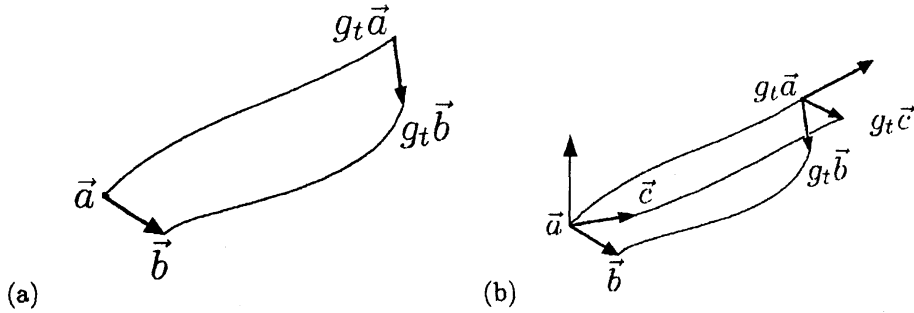


Figure 1: 点の移流に伴うベクトル場の移流：(a) 2点の移流、線要素ベクトル場；(b) 3点の移流、面要素ベクトル場。

これより2点の差により定義される場の移流 $g_t^{[L]} \xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ の具体的な計算は次式で与えられる：

$$g_t^{[L]} \xi = \left. \frac{d}{d\delta} g_t e^{\delta \xi} g_t^{-1} \right|_{\delta=0}. \quad (5)$$

これより $g_t^{[L]} \xi$ は Lie 群 G の随伴表現 $\text{Ad}_{g_t} \xi$ に他ならないことがわかる⁵。ここで $g_t^{[L]} \xi =: \xi_t^i \partial_i$ と書くと、各成分の発展方程式は次式で与えられる⁶：

$$\frac{\partial \xi_t^i}{\partial t} + u_t^j \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^j} = \xi_t^j \frac{\partial u_t^i}{\partial x^j}. \quad (6)$$

この表現ならば表現空間 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ に基底を張って、「行列の成分」を書き下すことができる。このベクトル場は流体に凍りついた線の微分として与えられるので、凍結場 (frozen-in field) としばしば呼ばれる。またこの方程式は $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ の元に対する Lie 微分 L を用いて書き下すことが出来る： $(\partial_t + L_u) \xi_t = 0$ 。

次に3点で決まる場の移流を考えよう (Fig.1(b) 参照)。ベクトル場 $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ を用いて三点 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を次のように決めよう：

$$\vec{b} = \vec{a} + \delta \xi(\vec{a}) + O(\delta^2), \quad \vec{c} = \vec{a} + \delta \eta(\vec{a}) + O(\delta^2). \quad (7)$$

面要素ベクトル場 $\tilde{S}(\vec{a}) := \xi(\vec{a}) \times \eta(\vec{a})$ の g_t による移流 $(g_t^{[S]} \tilde{S})$ をこの3点の移流によって定義しよう：

$$(g_t^{[S]} \tilde{S})(g_t \vec{a}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(g_t \vec{b} - g_t \vec{a}) \times (g_t \vec{c} - g_t \vec{a})}{\delta^2}. \quad (8)$$

定義より明らかに $g_t^{[S]}$ も g_t の持つ性質を受け継いでいる。言い換えると $g_t^{[S]}$ は $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \wedge \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \subset T\mathcal{M} \otimes T\mathcal{M}$ を表現空間とする群の表現である。したがってこれも Navier-Stokes 方程式 (NSE) の解

⁴これはベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ を表現空間とする微分同相写像群の表現である。

⁵この式は g_t の Jacobian を用いて次のように書ける、これは Cauchy 積分と呼ばれる：

$$\xi_t^i(g_t \vec{a}) = \frac{\partial (g_t \vec{a})^i}{\partial a^j} \xi_0^j(\vec{a}).$$

この式の右辺は $\xi_0 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ が g_t により左移動されたときの成分の変換則を表しているとも言うことができる。

⁶記号の定義： $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ 。この発展方程式の計算は次の通り：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_t}{\partial t} &= \left. \frac{d^2}{d\delta d\epsilon} g_{t+\epsilon} e^{\delta \xi} g_{t+\epsilon}^{-1} \right|_{(\delta, \epsilon)=(0,0)} = \left. \frac{d^2}{d\delta d\epsilon} e^{\epsilon u_t} g_t e^{\delta \xi} g_t^{-1} e^{-\epsilon u_t} \right|_{(\delta, \epsilon)=(0,0)} \\ &= \left. \frac{d^2}{d\delta d\epsilon} e^{\epsilon u_t} e^{\delta \xi_t} e^{-\epsilon u_t} \right|_{(\delta, \epsilon)=(0,0)} = \left. \frac{d^2}{d\delta d\epsilon} e^{\epsilon u_t + \delta \xi_t + \epsilon \delta [u_t, \xi_t] + \dots} \right|_{(\delta, \epsilon)=(0,0)} = [u_t, \xi_t]. \end{aligned}$$

最後から2番目の式変形で Hausdorff の公式 $\exp(\epsilon a) \exp(\delta b) = \exp(\epsilon a + \delta b + (\epsilon \delta / 2)[a, b] + \dots)$ を用いた。この公式が成り立つためには Lie 括弧の定義として $[a, b] = (b^j \partial_j a^i - a^j \partial_j b^i) \partial_i$ を取らねばならない。

$\{u_t; t \in [0, 1]\}$ で決まる g_t の性質を探る道具として使える。この場の成分の従う方程式を求めよう。面要素場 $\tilde{S}$ を基底を用いて

$$g_t^{[S]} \tilde{S} = \tilde{S}_{t,1} \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^3} + \tilde{S}_{t,2} \frac{\partial}{\partial x^3} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} + \tilde{S}_{t,3} \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \quad (9)$$

と書くことにすると、各成分の発展方程式は次式で与えられる⁷:

$$\frac{\partial \tilde{S}_{t,i}}{\partial t} + u_t^j \frac{\partial \tilde{S}_{t,i}}{\partial x^j} = -\tilde{S}_{t,j} \frac{\partial u_t^j}{\partial x^i} - \tilde{S}_{t,i} \frac{\partial u_t^i}{\partial x^j}. \quad (10)$$

この方程式は $\mathfrak{X}(\mathcal{M}) \wedge \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ の元に対する Lie 微分を用いて表すと $(\partial_t + L_u) \tilde{S}_t = 0$ となる。以上で移流に関する準備的考察は済んだ。

3 行列表現の準備：内積と随伴表現

本節では非圧縮 Navier-Stokes 方程式を群の元の成分表現を用いて書き下すための準備をする。

まずベクトル場 $\xi = \xi^i \partial_i$, $\eta = \eta^i \partial_i$ ($\in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$) の内積を次の式で定義する ($\overline{\quad}$ は複素共役):

$$\langle \xi | \eta \rangle := \int \left(\overline{\xi^1(\vec{x})} \eta^1(\vec{x}) + \overline{\xi^2(\vec{x})} \eta^2(\vec{x}) + \overline{\xi^3(\vec{x})} \eta^3(\vec{x}) \right) d^3 \vec{x}. \quad (11)$$

内積を定義するのに伴って随伴表現に双対な表現を定義することができる。随伴表現 Ad に双対な表現 (以下、随伴双対表現と呼ぶことにする) $\text{Ad}^\dagger$ を次式で定義する:

$$\langle \text{Ad}_{g_t}^\dagger \xi | \text{Ad}_{g_t} \eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle. \quad (12)$$

場がソレノイダル (b s.t. $\exists a, b = \nabla \times a$) ならば (体積保存より) $\text{Ad}^\dagger$ は面要素ベクトル場の移流 $g_t^{[S]}$ である。ここで通常の余随伴表現の定義と流儀を逆に行っている。その理由は $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ を表現空間とする群の (反表現ではなく) 表現を定義したいからである。

つぎにソレノイダルなベクトル場の空間の基底を考えよう。以下、領域は一辺の長さ L の周期境界条件とし、基底として複素ヘリカル波をとる ($e_\theta(\vec{k})$, $e_\phi(\vec{k})$ は波数空間の球座標の基底)

$$\phi_{\vec{k}, \sigma_k}(\vec{x}) := \frac{e_\theta(\vec{k}) + \sigma_k e_\phi(\vec{k})}{\sqrt{2}} \exp \left(\frac{2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}}{L} \right), \quad (13)$$

ここで $\vec{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$, $\sigma_k \in \{1, -1\}$. 複素ヘリカル波は curl の固有関数である: $\nabla \times \phi_{\vec{k}, \sigma_k} = \sigma_k |\vec{k}| \phi_{\vec{k}, \sigma_k}$. この性質を Laplacian の計算で用いる。ブラケット表示を次のように定義する:

$$|\vec{k}, \sigma_k\rangle := \phi_{\vec{k}, \sigma_k}(\vec{x}), \quad \langle \vec{k}, \sigma_k | * \rangle := \int \overline{\phi_{\vec{k}, \sigma_k}(\vec{x})} * d^3 \vec{x} \quad (14)$$

ベクトル場がソレノイダルならば、 g_t の随伴表現で表される場 $\xi_t := \text{Ad}_{g_t} \xi$ の時刻 t での発展方程式は次式で与えられる:

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial t} = \nabla \times (u_t \times \xi_t). \quad (15)$$

一方、随伴双対表現で表される場 $\xi_t := \text{Ad}_{g_t}^\dagger \xi = (\nabla \times)^{-1} \text{Ad}_{g_t} \nabla \times \xi$ の発展方程式は次式で与えられる:

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial t} = (u_t \times (\nabla \times \xi_t))_S, \quad (16)$$

ここで $(\quad)_S$ はソレノイダル成分への射影である;

$$(a)_S := \sum_{\vec{k}, \sigma_k} |\vec{k}, \sigma_k\rangle \langle \vec{k}, \sigma_k | a \rangle. \quad (17)$$

⁷ 計算は $S_i = \epsilon^{ijk} \xi^j \eta^k$ に対し $\partial_t S_i = \epsilon^{ijk} \partial_t \xi^j \eta^k + \epsilon^{ijk} \xi^j \partial_t \eta^k$ を計算する。 $\partial_t \xi^j$, $\partial_t \eta^k$ には Eq.(6) を代入する。これは Lie 微分がテンソルの積に対し derivation として作用し、テンソルの形を変えないこと、縮約と可換であることを利用していることに他ならない (文献 [2], p.29, proposition 3.2)。

4 複素ヘリカル波基底を用いた移流の行列表現

それでは複素ヘリカル波を移流してつくられる2種類の関数系について考えよう:

$$\text{随伴基底: } \{ \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{k}, \sigma_k}; \vec{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\vec{0}\}, \sigma_k \in \{1, -1\} \}; \quad (18)$$

$$\text{随伴双対基底: } \{ \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{k}, \sigma_k}; \vec{k} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{\vec{0}\}, \sigma_k \in \{1, -1\} \}. \quad (19)$$

これらは内積 $\langle * | * \rangle$ に関して互いに双対な基底である。これらは移流の履歴毎に違う系列を生成する。ではこれらの基底をヘリカル波で展開しなそう:

$$\text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{k}, \sigma_k} = \sum_{\vec{p}, \sigma_p} \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t | \vec{k}, \sigma_k \rangle \phi_{\vec{p}, \sigma_p}(\vec{x}), \quad \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{k}, \sigma_k} = \sum_{\vec{p}, \sigma_p} \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \phi_{\vec{p}, \sigma_p}(\vec{x}). \quad (20)$$

この各々の表現に現れる行列の成分は次式で定義されている:

$$\langle \vec{p}, \sigma_p | g_t | \vec{k}, \sigma_k \rangle = \int \overline{\phi_{\vec{p}, \sigma_p}(\vec{x})} \cdot \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{k}, \sigma_k} d^3 \vec{x}, \quad \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle = \int \overline{\phi_{\vec{p}, \sigma_p}(\vec{x})} \cdot \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{k}, \sigma_k} d^3 \vec{x}. \quad (21)$$

この行列の成分に関して興味深い関係式が得られる;

定理: 行列の成分に関して次の関係式が成り立っている。

$$|\vec{p}| > |\vec{k}| \implies \left| \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t | \vec{k}, \sigma_k \rangle \right| > \left| \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \right|. \quad (22)$$

証明: これは複素ヘリカル波が curl 演算子の固有関数であることを用いて求められる:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle &= \int_{\vec{x} \in D} \phi_{\vec{p}, \sigma_p}^*(\vec{x}) \cdot (\nabla \times)^{-1} \text{Ad}_{g_t} \nabla \times \phi_{\vec{k}, \sigma_k}(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_{\vec{x} \in D} (\nabla \times)^{-1} \phi_{\vec{p}, \sigma_p}^*(\vec{x}) \cdot \text{Ad}_{g_t} \nabla \times \phi_{\vec{k}, \sigma_k}(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= -\frac{\sigma_k |\vec{k}|}{\sigma_p |\vec{p}|} \int_{\vec{x} \in D} \phi_{\vec{p}, \sigma_p}^*(\vec{x}) \cdot \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{k}, \sigma_k}(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= -\frac{\sigma_k |\vec{k}|}{\sigma_p |\vec{p}|} \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t | \vec{k}, \sigma_k \rangle. \end{aligned}$$

この式の絶対値を考慮すればよい。■

もちろんここから短絡的に「線要素の移流の方が、面要素の移流に比べて、高波数側の励起の度合いが激しい」という一般的な結論は出せない。しかし流体による「移流」の一般的な性質のなんらかの表現なのであろう。

5 Navier-Stokes 方程式の行列表現

では随伴双対基底を用いて速度場を展開しよう⁸:

$$\mathbf{u}_t := \sum_{\vec{k}, \sigma_k} \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{k}, \sigma_k}, \quad \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) := \left\langle \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{k}, \sigma_k} \middle| \mathbf{u}_t \right\rangle \quad (23)$$

これを非圧縮の Navier-Stokes 方程式に代入してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{u}_t(\vec{q}, \sigma_q) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{q}, \sigma_q} \middle| \mathbf{u}_t \right\rangle + \left\langle \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{q}, \sigma_q} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_t \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla \times (\mathbf{u}_t \times \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{q}, \sigma_q}) \middle| \mathbf{u}_t \right\rangle + \left\langle \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{q}, \sigma_q} \middle| (\mathbf{u}_t \times (\nabla \times \mathbf{u}_t))_S - \nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_t) \right\rangle \\ &= -\nu \left\langle \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{q}, \sigma_q} \middle| \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

⁸ これは Euler 方程式の解が Lie 群上の余随伴軌道で与えられることにヒントを得ている。

随伴基底と随伴双対基底の双対性より、非線形項の寄与は表に出なくなる。Laplacian の計算を進めよう:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla \times \underline{u}_t) &= \nabla \times \nabla \times \sum_{\vec{k}, \sigma_k} \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{k}, \sigma_k} \\
 &= \nabla \times \nabla \times \sum_{\vec{k}, \sigma_k} \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \left(\sum_{\vec{p}, \sigma_p} \phi_{\vec{p}, \sigma_p} \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \right) \\
 &= \sum_{\vec{p}, \sigma_p} \sum_{\vec{k}, \sigma_k} |\vec{p}|^2 \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \phi_{\vec{p}, \sigma_p}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

これを内積の表現に代入しよう:

$$\begin{aligned}
 &\langle \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{q}, \sigma_q} | \nabla \times (\nabla \times \underline{u}_t) \rangle \\
 &= \langle \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{q}, \sigma_q} | \sum_{\vec{p}, \sigma_p} \sum_{\vec{k}, \sigma_k} |\vec{p}|^2 \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \phi_{\vec{p}, \sigma_p} \rangle \\
 &= \sum_{\vec{p}, \sigma_p} \sum_{\vec{k}, \sigma_k} |\vec{p}|^2 \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \langle \text{Ad}_{g_t} \phi_{\vec{q}, \sigma_q} | \phi_{\vec{p}, \sigma_p} \rangle \\
 &= \sum_{\vec{p}, \sigma_p} \sum_{\vec{k}, \sigma_k} |\vec{p}|^2 \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \langle \phi_{\vec{q}, \sigma_q} | \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{p}, \sigma_p} \rangle \\
 &= \sum_{\vec{p}, \sigma_p} \sum_{\vec{k}, \sigma_k} |\vec{p}|^2 \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \langle \vec{q}, \sigma_q | (g_t^{-1})^\dagger | \vec{p}, \sigma_p \rangle.
 \end{aligned} \tag{26}$$

つぎに行列要素の時間発展を求めよう:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle &= \left\langle \phi_{\vec{p}, \sigma_p}(\vec{x}) \left| \frac{\partial}{\partial t} \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{k}, \sigma_k} \right. \right\rangle \\
 &= \left\langle \vec{p}, \sigma_p \left| \underline{u}_t \times (\nabla \times \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{k}, \sigma_k}) \right. \right\rangle \\
 &= \left\langle \vec{p}, \sigma_p \left| \left(\sum_{\vec{r}, \sigma_r} \underline{u}_t(\vec{r}, \sigma_r) \langle \vec{s}, \sigma_s | g_t^\dagger | \vec{r}, \sigma_r \rangle \phi_{\vec{s}, \sigma_s} \right) \times (\nabla \times \sum_{\vec{q}, \sigma_q} \langle \vec{q}, \sigma_q | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle \phi_{\vec{q}, \sigma_q}) \right. \right\rangle \\
 &= \sum_{\vec{r}, \sigma_r} \sum_{\vec{q}, \sigma_q} \sigma_q |\vec{q}| \langle \vec{p}, \sigma_p | \phi_{\vec{s}, \sigma_s} \times \phi_{\vec{q}, \sigma_q} \rangle \underline{u}_t(\vec{r}, \sigma_r) \langle \vec{s}, \sigma_s | g_t^\dagger | \vec{r}, \sigma_r \rangle \langle \vec{q}, \sigma_q | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle.
 \end{aligned} \tag{27}$$

これは群の表現であることの言い換えになっている。すなわち次の表現を ϵ に関して微分したものである:

$$\langle \vec{p}, \sigma_p | g_{t+\epsilon}^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle = \sum_{\vec{q}, \sigma_q} \langle \vec{p}, \sigma_p | (e^{\epsilon \underline{u}_t})^\dagger | \vec{q}, \sigma_q \rangle \langle \vec{q}, \sigma_q | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle$$

以上をまとめてNSEのダイナミクスを記述する式はLagrangian historyを反映した変数 $\underline{u}_t(\vec{q}, \sigma_q)$, $\langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle$ に関する次の閉じた方程式系:

$$\frac{d}{dt} \underline{u}_t(\vec{q}, \sigma_q) = -\nu \sum_{\vec{p}, \sigma_p} \sum_{\vec{k}, \sigma_k} \underbrace{\langle \vec{q}, \sigma_q | (g_t^{-1})^\dagger | \vec{p}, \sigma_p \rangle |\vec{p}|^2 \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle}_{\text{Lagrangian history を全部繰り込んだ Laplacian}} \underline{u}_t(\vec{k}, \sigma_k) \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{p}, \sigma_p | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle = \sum_{\vec{r}, \sigma_r} \sum_{\vec{q}, \sigma_q} \sigma_q |\vec{q}| \langle \vec{p}, \sigma_p | \phi_{\vec{s}, \sigma_s} \times \phi_{\vec{q}, \sigma_q} \rangle \underline{u}_t(\vec{r}, \sigma_r) \langle \vec{s}, \sigma_s | g_t^\dagger | \vec{r}, \sigma_r \rangle \langle \vec{q}, \sigma_q | g_t^\dagger | \vec{k}, \sigma_k \rangle. \tag{29}$$

この式は非粘性、すなわち $\nu = 0$ のとき随伴双対基底の係数の保存則の形をとる:

$$\frac{d}{dt} \underline{u}_t(\vec{q}, \sigma_q) = 0. \tag{30}$$

これは(たぶん)Kelvinの循環定理の別の表現になっていると思われる。

6 アナロジー

Arnold は剛体の力学が Lie 群上の力学系として記述できることを、形式的に一般化し流体の力学が同じ形式で書けることを示した (cf. 文献 [1])。このアナロジーを本研究に当てはめると、流体において複素ヘリカル波の係数での表現から随伴双対基底の係数での表現への変換は、剛体の力学では剛体に固定された系から空間に固定された系への変換に相当する。このアナロジーをたどると、流体の Euler 方程式での随伴双対基底の係数の保存は、剛体の運動方程式での空間系での角運動量の保存に対応する。剛体と流体とで随伴表現と余随伴表現が入れ替わっているがこれは、剛体の剛体系での記述が g_t の接ベクトルの左移動で、流体の Euler 的記述が g_t の接ベクトルの右移動で与えられていたことを反映している。このアナロジーを表にしたものを以下に付す;

流体	剛体
非圧縮流体の Euler 方程式 $\frac{du_t^i(\vec{k}, \sigma_k)}{dt} = \sum_{\vec{p}, \vec{q}}^{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \sigma_q \vec{q} \langle \vec{k}, \sigma_k \phi_{\vec{p}, \sigma_p} \times \phi_{\vec{q}, \sigma_q} \rangle$ $\times u_t^k(\vec{p}, \sigma_p) u_t^j(\vec{q}, \sigma_q)$ ↓ ベクトル場の基底の変換: $\phi_{\vec{p}, \sigma_p} \rightarrow \text{Ad}_{g_t}^\dagger \phi_{\vec{p}, \sigma_p}$ ↓ 随伴基底に関する係数の保存 $\frac{d}{dt} u_t(\vec{q}, \sigma_q) = 0$	剛体の主軸系での Euler 方程式 $I_i \frac{d\omega_c^i}{dt} = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} I_j \omega_c^j \omega_c^k$ ↓ 行列の基底の変換: $\omega_c \rightarrow \text{Ad}_{g_t} \omega_c$ ↓ 実験室系での角運動量保存則 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$

References

- [1] アーノルド著, 安藤, 蟹江, 丹羽訳, 『古典力学の数学的方法』, (岩波書店, 1980).
- [2] Kobayashi and Nomizu, "Foundations of differential geometry", Vol.1, (John Wiley and Sons, 1963).