

$H^p(\mathbb{R}^n)$ と tube domain 上の H^p

茨城大学理学部 藪田公三

ここでは, 次の Carleson-Coifman-Weiss の定理 ([2, p.585] では簡単に証明の概略が与えられている), の証明を与えることを目的とする. $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ が open cone であるとは $\Gamma \neq \emptyset$, $\alpha, \beta > 0$, $x, y \in \Gamma$ ならば $\alpha x + \beta y \in \Gamma$ となること (をい). $\Gamma^* \equiv \{y \in \mathbb{R}^n; x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \geq 0, \forall x \in \Gamma\}$ とおき, Γ の dual cone といふ. Γ^* の内点全体の閉包が Γ^* になるとき, Γ は regular cone といわれる. 以下 Γ は常に regular open cone を表わす. $T_\Gamma \equiv \{z = x + iy = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n; x \in \mathbb{R}^n, y \in \Gamma\}$ とし, $H^p(T_\Gamma) \equiv \{u(x, y) = u(x + iy); \text{holomorphic in } T_\Gamma \text{ \& } \|u\|_{H^p(T_\Gamma)} = \sup_{y \in \Gamma} (\int |u(x + iy)|^p dx)^{1/p} < \infty\}$ とおく. ($p > 0$).

定理 (Carleson-Coifman-Weiss). $0 < p$. $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ は regular open cones として $(\Gamma_1^*)^\circ \cup \dots \cup (\Gamma_k^*)^\circ = \mathbb{R}^n / \{0\}$ とする. すると

$$f \in H^p(\mathbb{R}^n) \iff \exists u_j \in H^p(T_{\Gamma_j}) \quad j=1, 2, \dots, k \quad \text{s.t.} \\ f = \sum_{j=1}^k \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in \Gamma_j}} u_j(x + iy)$$

(右辺の $\lim$ は超函数の意味である.)

証明の準備として, いくつかの定義を述べる.

$$K_P(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i z \cdot \bar{t}} dt \quad (\text{Cauchy kernel})$$

$$P_P(x, y) = \frac{|K_P(x + iy)|^2}{K_P(2iy)} \quad (\text{Poisson kernel})$$

$P_P(x, y)$ の x に関する Fourier 変換は

$$\hat{P}_P(\xi, y) = \frac{e^{-2\pi y \cdot \xi}}{K(2iy)} \int_{\{\xi - \Gamma^*\} \setminus \{-\Gamma^*\}} e^{4\pi y \cdot \bar{t}} dt \quad \left(= e^{-2\pi y \cdot \xi}, \xi \in \Gamma^* \cup \Gamma^* \right)$$

$\tau, \varepsilon < 1$ に $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ (以下常に Γ_0 は ε を表わす) に対しては,

$$P_{\Gamma_0}(x, y) = \prod_{j=1}^n \frac{y_j}{\pi(x_j^2 + y_j^2)}, \quad \hat{P}_{\Gamma_0}(\xi, y) = e^{-2\pi(y_1|\xi_1| + \dots + y_n|\xi_n|)}$$

± τ , 定理の証明の ($\Leftarrow$) に τ は

$$\textcircled{1} \quad u \in H^p(\Gamma_P) \Rightarrow \exists \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in \Gamma}} u(x + iy) \Big|_{\substack{\Delta \\ \lim S}} \in H^p(\mathbb{R}^n)$$

($\Leftarrow$) に τ は $\{|y|=1\}$ の開被覆 $\{(P_j^*)^\circ \cap \{|y|=1\}; j=1, \dots, k\}$ に対する滑らかな ± 1 の分解 $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ を, $\Phi_j(\xi) = \chi_j(\frac{\xi}{|\xi|})$ とおくと,

Fefferman-Stein [5, Th(2)] により $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ ならば $(\Phi_j(\xi) \hat{f}(\xi))^\vee \in H^p(\mathbb{R}^n)$ となる。 ($\tau = 0$) τ

$$\textcircled{2} \quad f \in H^p(\mathbb{R}^n) \text{ \& } \text{supp } \hat{f} \subset \Gamma^* \Rightarrow u(x, y) \equiv \int \hat{f}(\xi) e^{-2\pi y \cdot \xi} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi \in H^p(\Gamma_P)$$

を示せば $\textcircled{1}$ とおって結論を得る。 ± τ , $\textcircled{1}$ の証明に入る。

Lemma 1. $u(x, y) \in H^p(\Gamma_P)$, $\Gamma' \subset \Gamma$ のとき,

$$|u(x, y)| \leq C_p \|u\|_{H^p(\Gamma_P)} |y|^{-\frac{p}{2}} \quad (x, y) \in \Gamma'.$$

$\varepsilon < 1$ に, $\Gamma = \Gamma_0$ かつ ε は

$$|u(x, y)| \leq C_{\Gamma_0} \|u\|_{H^p(\Gamma_0)} (y_1 \cdots y_n)^{-\frac{1}{p}} \quad (x, y) \in \Gamma_0$$

$\therefore \delta = \sup \{ \delta > 0; \{y; |y - y_0| < \delta |y_0|\} \subset \Gamma, \forall y \in \Gamma' \}$ とおき, $\delta > 0$ とおき,

$(x_0, y_0) \in \Gamma_0$ に對し $B = \{ |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \leq (\frac{\delta}{2})^2 |y_0|^2 \}$ とし, $|u(x, y)|^p$

が Γ_0 上各点に ε 以下の subharmonic となり, $\varepsilon < 1$ は subharmonic である

$$\therefore \{ |u(x_0, y_0)|^p \leq \frac{1}{|B|} \iint_B |u(x, y)|^p dx dy \leq \frac{C_{\Gamma_0}^p}{|y_0|^{2n}} \int_{|y - y_0| \leq \frac{\delta}{2} |y_0|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)|^p dx \right) dy$$

$$\leq \frac{C_{\Gamma_0}^p}{|y_0|^{2n}} \|u\|_{H^p(\Gamma_0)}^p \cdot |y_0|^n = C_{\Gamma_0}^p \|u\|_{H^p(\Gamma_0)}^p |y_0|^{-n}$$

Γ_0 に對し $B = \prod_{j=1}^n B_j$, $B_j = \{ |x_j - x_{j0}|^2 + |y_j - y_{j0}|^2 < y_j^2 \}$ に對し, $|u(x, y)|^p$

が各点に ε 以下の subharmonic となることより, 同様の議論を得る。

Lemma 2 $u(x, y) \in H^p(\Gamma_0)$ ならば

$$\exists f \in \mathcal{S}' \text{ s.t. } u(x, y) \rightarrow f(\text{in } \mathcal{S}') \quad (y \rightarrow 0, y \in \Gamma) \text{ \& } \\ \text{supp } \hat{f} \subset \Gamma^*, \hat{f} \in C(\mathbb{R}^n), |\hat{f}(\xi)| \leq A |\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)}$$

ただし $0 < p \leq 1$.

$\therefore$ Lemma 1 より $y \in \Gamma_0$ かつ $u(x, y) \in L^p \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ となる

ため, $\delta \in \Gamma_0$ かつ $u(x, y + \delta) \in H^2(\Gamma_0)$, よって $\text{supp } \hat{u}(\xi, \delta)$

$\subset \Gamma^*$ かつ $u(x, y + \delta) = u(\cdot, \delta) * \hat{p}_\Gamma(\cdot, y)(x)$. したがって $\hat{u}(\xi, y + \delta)$

$= \hat{u}(\xi, \delta) \hat{p}_\Gamma(\xi, \delta) = \hat{u}(\xi, \delta) e^{-2\pi \xi \cdot y}$ (準備の所で注意した) に

Γ^* 上で $\hat{p}_\Gamma(\xi, y) = e^{-2\pi \xi \cdot y}$). よって $\hat{u}_0(\xi) \equiv \hat{u}(\xi, \delta) e^{2\pi \xi \cdot \delta}$ とおくと,

$\hat{u}_0(\xi)$ は $\delta \in \Gamma$ に無関係である。又 Lemma 1 を使って

$$|\hat{u}_0(\xi) e^{-2\pi\xi\cdot\delta}| = |\hat{u}(\xi, \delta)| \leq \int |u(x, \delta)| dx \leq C_\delta (\|u\|_{H^p(T_P)} |\delta|^{-\frac{n}{p}})^{1-p}$$

$$\int |u(x, \delta)|^p dx \leq C_\delta \|u\|_{H^p(T_P)}^p |\delta|^{-\frac{n}{p}(1-p)}. \quad \text{ここで } \eta \in \Gamma \text{ を一つ固定}$$

し, $\delta = \frac{\eta}{|\xi|}$ とすれば C_δ は定数で

$$(1) \quad |\hat{u}_0(\xi)| \leq C_\eta \|u\|_{H^p(T_P)} |\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)}.$$

ところで, $\varphi \in \mathcal{S}$ とすると

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, y) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(\xi) e^{-2\pi\xi\cdot y} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

で, 右辺は $y \rightarrow 0, y \in \Gamma$ へと (1) より $\int \hat{u}_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi$ に収束するから, $f = (\hat{u}_0)^\vee$ とすれば Lemma が成り立つ。

注意 $f=0 \Rightarrow u=0$.

① を示すには後 $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ を示せばよい。 $H^p(\mathbb{R}^n)$ は一次変換で不変なことから, $\Gamma = \Gamma_0$ の場合を示しておけば, $A\Gamma \cap \Gamma_0$ とするよ) に一次変換 A をすれば任意の Γ についていえる。

$$\text{よ} \quad \text{ここで } u(x, y) \in H^p(T_{\Gamma_0}) \quad f = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in \Gamma_0}} u(x, y) \quad (\text{in } \mathcal{S}') \text{ とする。}$$

この時 $|u(x, y)|^{\frac{p}{2}}$ は各 (x, y) について subharmonic で

$$\sup_{y \in \Gamma_0} \int (|u(x, y)|^{\frac{p}{2}})^2 dx < +\infty \quad \text{である}$$

$$|u(x, y+\delta)|^{\frac{p}{2}} \leq \mathcal{P}_\Gamma(\cdot, y) * |u(\cdot, \delta)|^{\frac{p}{2}}(x)$$

$$\delta \rightarrow 0 \text{ と } \exists g \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ s.t. } |u(x, y)|^{\frac{p}{2}} \leq \mathcal{P}_\Gamma(\cdot, y) * g(x).$$

$$(T_2) \text{ かつ } g \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ である}$$

$$(2) \quad \sup_{\substack{|x_j - y_j| < y_j \\ j=1, 2, \dots, n}} |u(x, y)|^{\frac{p}{2}} \leq M_1 M_2 \dots M_n g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

M_j は x_j についての Hardy-Littlewood の maximal function である。

さて, $\varphi(s)$ は $+\infty$ で急減少で $\int_1^\infty \varphi(s) s^k ds = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k=1, 2, \dots \end{cases}$ を満すものとする。このとき,

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \varphi(s) \frac{ts}{x^2 + t^2 s^2} ds \left(= \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{で ある ([5, p.187])}.$$

$$\Phi_t(x) = \prod_{j=1}^n \varphi_t(x_j) \quad \text{とおけば, これは } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ に 入 り, } \Phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \Phi_1\left(\frac{x}{t}\right).$$

$$\text{又 } \hat{\Phi}_t(\xi) = \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \varphi(s_1) \cdots \varphi(s_n) e^{-2\pi i s_1 t |\xi_1|} \cdots e^{-2\pi i s_n t |\xi_n|} ds_1 \cdots ds_n \quad \text{で } \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x) dx = 1$$

である。 $\chi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x, y) \rightarrow f$ in $\mathcal{S}'$ ($y \rightarrow 0, y \in \Gamma$) で, $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \hat{f} \subset \overline{\Gamma_0}$, $\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot y}$ であるから,

$$\begin{aligned} (\Phi_t * f)^\wedge &= \hat{\Phi}_t(\xi) \hat{f}(\xi) = \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \varphi(s_1) \cdots \varphi(s_n) \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i s_1 t |\xi_1|} \cdots e^{-2\pi i s_n t |\xi_n|} ds_1 \cdots ds_n \\ &= \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \varphi(s_1) \cdots \varphi(s_n) \hat{u}(\xi, ts) ds_1 \cdots ds_n. \end{aligned}$$

故に

$$\Phi_t * f = \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \varphi(s_1) \cdots \varphi(s_n) u(x, ts) ds_1 \cdots ds_n$$

より

$$\sup_{t>0} |\Phi_t * f| \leq \sup_{y \in \Gamma_0} |u(x, y)| \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \varphi(s_1) \cdots \varphi(s_n) ds_1 \cdots ds_n = \sup_{y \in \Gamma_0} |u(x, y)|$$

右辺は (2) より $L^p(\mathbb{R}^n)$ に 入 る。 故に [5, Th 11] に より, $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 。

② の 証明

Lemma 3. $p, p > 0$ とする。 $u \in H^p(T_{\Gamma_0})$ で $\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in \Gamma_0}} u(x, y) = f(x)$ であるような x に ついて存在して, 極限函数 $f(x)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ の元である。

$u(x, y) \in H^p(T_{\Gamma_0})$ で

$$\sup_{y \in \Gamma_0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx.$$

証明は [3, Th 5.1] を使って, Stein-Weiss [4, Th 0] の証明のよ
にすればよい。

さて, $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \hat{f} \in \overline{P_0}$ とする。 $u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i \xi \cdot x} e^{2\pi i \xi \cdot y} d\xi$ とおいたとき, $u(x, y) \in H^p(T_{P_0})$ を示すべくこゝとであ
た。 $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}$, $\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \varphi(\frac{x}{\delta})$ とおく。 $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ にか
ら $\sup_{t>0} \|f * \varphi_t(x)\| \in L^p$ Δ $|\hat{f}(\xi)| = O(|\xi|^{n(\frac{1}{p}-1)})$ [5] となる。

したがって, 各 $\delta > 0$ に対して $(f * \varphi_\delta)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-\pi|\delta\xi|^2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$
となるから $f * \varphi_\delta \in L' \cap L^\infty \subset L' \cap L^2$ 。又, $\text{supp } (f * \varphi_\delta)^\wedge \subset \text{supp } \hat{f}$
 $\subset \overline{P_0}$ であるから, Paley-Wiener の Th [2] により

$$u_\delta(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * \varphi_\delta)(x-x') \mathcal{P}_0(t, y) dx' \in H^2(T_{P_0})$$

より Lemma 3 により

$$\int |u_\delta(x, y)|^p dx \leq \int \|f * \varphi_\delta(x)\|^p dx \leq \int \sup_{t>0} \|f * \varphi_t(x)\|^p dx \stackrel{\|\cdot\|_{M_f}}{<} +\infty$$

$\delta \rightarrow 0$ とすると $u_\delta(x, y) \rightarrow u(x, y)$ (各点毎に) となるから, Fatou の
補題により

$$\int |u(x, y)|^p dx \leq M_f. \quad \text{よって } u(x, y) \text{ は } T_{P_0} \text{ で正則な}$$

こゝはよいから, $u \in H^p(T_{P_0})$ 。(終り)

最後に, 数理研究完録 366 の中の「 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 」についての一注意で
 $\mathcal{P}_0$ の性質として書いた性質 (6) は誤りでいた。したがって, 結果
と書いた部分も片側だけしか正しくありません。ここを借り
て, お詫言して訂正いたします。

参 考 文 献

- [1] L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, *Advances Math.* 22(1976), 269-277.
- [2] R.R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *B.A.M.S.* 83(1977), 569-645.
- [3] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton Univ. Press 1971.
- [4] E.M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables I, *Acta Math.* 103 (1960), 25-62.
- [5] C. Fefferman and E.M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.* 129(1972), 137-193.