

力学系としての準地衡風乱流

電気通信大学 知能機械工学専攻 平 寛史, 高橋 直也, 宮崎 武

Hiroshi Taira, Naoya Takahashi and Takeshi Miyazaki

Department of Mechanical Engineering and Intelligent Systems,

University of Electro-Communications

1 諸言

地球流体現象における流れは安定密度成層効果と回転効果(コリオリ効果)の影響を強く受け、鉛直方向の運動が抑えられ、水平面内での運動が主となる。このような鉛直方向の渦度を持つ秩序渦構造が永く安定に振る舞い、広域流れに大きな影響を与える。大気や海洋といった地球流体中に存在する秩序渦構造とその周辺の物質の輸送・混合過程を調べることは地球環境問題の解明のためにも必須となっている。地球流体現象を記述するための第一近似として準地衡風近似法が広く用いられている。

McWilliams *et al.*[1] はスペクトル法による準地衡風乱流の数値シミュレーションを実行し、時間発展とともに数多くの孤立した集中渦領域が出現し、それらの変形・合体が繰り返されることを示した。さらに高レイノルズ数の計算に対応すべく、CASL(Contour Advective Semi-Lagrangian)法が Dritschel *et al.*[2] により提案された。多数の渦領域から出発した CASL 法の数値計算では、渦領域間の相互作用の過程で扁平楕円体渦が支配的になることが示された。

3次元渦の厳密解に関して、Meacham *et al.*[3] は準地衡風近似のもとで、2次元楕円渦解を3次元楕円体渦解に拡張した。彼らは一様な外部渦度 ω 、水平ストレイン e 、鉛直シア γ に埋め込まれた楕円体渦の非定常一般解を求めた。さらに Meacham *et al.*[4] は、Hamiltonian Moment Reduction の観点から理論的裏付けを与えた。一様シア中の楕円体渦は2自由度のハミルトン力学系となる。

これらの知見に基づいて、Miyazaki *et al.*[5] は簡単な乱流渦モデルとして、各渦を細長い渦で近似する Wire 渦モーメントモデルを開発した。その運動方程式はモーメント展開によって導き出され、 N 個の相互作用する Wire 渦系は $2N$ の自由度を持つ。さらに、Miyazaki *et al.*[6] は、Wire 渦モデルを拡張した楕円体渦モデルを開発した。各秩序渦は、他の渦によって誘起される局所的な一様シア場に埋め込まれた一様ポテンシャル渦度を持つ楕円体領域でモデル化され、その運動方程式はモーメント展開によって導き出された。各渦の重心高さ、渦高さ、体積が Casimir 変数となるため、1つの楕円体渦あたり3自由度を持つ。このハミルトン力学系にはエネルギー以外に全体の渦重心、全角運動量といった保存量があるが、2体の楕円体渦の運動(6自由度)にもカオス現象が見られることが示された。CASL 法に基づく数値計算結果と比較することで、楕円体渦モーメントモデルは同符号渦(Co-rotating)の合体現象の臨界距離を定量的に捉えることも確認された。Miyazaki *et al.*[7] しかし、Miyazaki *et al.*[8] はアスペクト比が $1/3$ より小さい異符号渦(Counter-rotating)の相互作用では、モーメントモデルが「偽の特異性」を予想するなどの重大な欠点を持つことを示した。

本研究では、モーメントモデルの欠陥を改善するために、離散点近似(Gauss 積分)によって相互作用エネルギーの2重積分を評価する改良渦モデルを開発し、CASL 法による

準地衡風渦の数値計算と比較することで改良渦モデルの有効性を検証した。離散点近似の考え方は、Dritschel *et al.*[9] によって提案されたものと同一であるが、彼らのモデルで使われる変数は Casimir を含む冗長なものであり、その幾何学的な意味も間接的に定義されている。ここでは、幾何学的な意味の直接的で明確な（準）正準変数を用いてモデル方程式系を構築する。以下では、Wire 渦モデルと楕円体渦モデルの改良を 2 体渦間相互作用の場合について簡単に説明する。

2 基礎方程式と渦モデルの改良

2.1 基礎方程式

流体運動は 2 次元水平面内で起こるので流れの関数 Ψ を導入する。一様成層回転流体の準地衡風運動方程式は次のように表される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) q = 0 \quad (1)$$

ここで、ポテンシャル渦度 q を次のように定義する。

$$q = -\Delta \Psi = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi \quad (2)$$

流れの関数の符号は「流体力学」での慣習に従う。

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3)$$

Meacham *et al.*[4] は、一様渦度の楕円体渦領域を 2 次までのモーメントを用いて表現し、その時間発展を非正準形式の Hamilton 力学系として定式化した。得られた方程式系は準地衡風近似方程式の弱解が従うべき運動方程式となっている。Miyazaki *et al.*[5] と Miyazaki *et al.*[6] はそれを拡張した多体渦領域の近似的なモーメント方程式系を書き下した。しかし、相互作用エネルギーを 2 次までのモーメントで近似展開することには精度上の限界があり、近接した細長い渦間の相互作用を正しく捉えきれなかった。

2.2 改良 Wire モデル (Gauss 積分：離散点近似)

各々の重心が $(X_{1,2}, Y_{1,2}, Z_{1,2})$ に位置する 2 体準地衡風 Wire 渦は、渦強さ (渦度の体積積分) $\hat{\Gamma}_{1,2}$ 、渦長さ $2l_{1,2}$ 、鉛直渦太さ $\hat{\epsilon}_{01,02}$ により表される。また、渦の傾斜角を $\theta_{1,2}$ 、方位角を $\phi_{1,2}$ とする。ここで、 $Z_{1,2}$ と $\hat{\Gamma}_{1,2}$ と渦の半高さ $l_{1,2} \cos \theta_{1,2}$ は Casimir 保存量である。最も幾何学的な意味が明確な正準変数は、重心座標の $X_{1,2}, Y_{1,2}$ と各渦の頂点の座標 (重心に対する相対座標) $x_{h1,2}, y_{h1,2}$ であり、各 Wire 渦の自由度は 2 となる。

渦体積と渦高さの保存から渦太さ $\hat{\epsilon}_i$ は次の条件のもとに時間発展する。

$$\hat{\epsilon}_i = \hat{\epsilon}_{0i} \cos^{3/2} \theta_i \quad (4)$$

2 体渦の相互作用エネルギー H_m は、以下の 2 重積分で与えられる。

$$H_m = \frac{1}{4\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|} ds_1 ds_2 \quad (5)$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} X_i + s_i \sin \theta_i \cos \phi_i \\ Y_i + s_i \sin \theta_i \sin \phi_i \\ Z_i + s_i \cos \theta_i \end{pmatrix}, i = 1, 2. \quad (6)$$

離散点近似 (Gauss 積分) によって各 Wire 渦を M 個の点渦で近似する。具体的には Gauss 積分の手法に基き、積分点位置 s_i と重み $\hat{w}_i$ を求める事で離散化する。近似精度に関する詳細な議論については Miyazaki *et al.*[10] を参照されたい。

$$H_m = \frac{\hat{\Gamma}_1 \hat{\Gamma}_2}{4\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{\hat{w}_m \hat{w}_n}{|\mathbf{R}_{1m} - \mathbf{R}_{2m}|} \quad (7)$$

一方、自己エネルギーは次のようになる。

$$H_{si} = \frac{3\hat{\Gamma}_i^2}{20\pi l_i} (\log 2 - \log \hat{\epsilon}_i) \quad (8)$$

ハミルトニアン H は H_{si} と H_m の和であり、保存量となる。自己エネルギーの表式として回転楕円体渦のものを使うこともできる。ただし、その場合には渦太さ $\hat{\epsilon}_i$ と x_{hi}, y_{hi} の関係は式 (4) よりもかなり複雑なものとなる (詳細は Miyazaki *et al.*[10] を参照)。

$$H = H_{s1} + H_{s2} + H_m. \quad (9)$$

ハミルトニアンを用いることで次の正準方程式が得られる。

$$\hat{\Gamma}_i \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial Y_i} \quad (10)$$

$$\hat{\Gamma}_i \frac{dY_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X_i} \quad (11)$$

$$\frac{\hat{\Gamma}_i}{5} \frac{dx_{hi}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_{hi}} \quad (12)$$

$$\frac{\hat{\Gamma}_i}{5} \frac{dy_{hi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_{hi}} \quad (13)$$

ハミルトニアンに加えて渦重心と全角運動量が保存量となることは、モーメントモデルの場合と同様である。

2.3 改良楕円体渦モデル (Gauss 積分：離散点近似)

改良 Wire 渦モデルに、新たな変数 x_{si} と y_{si} を加えることで、改良楕円体渦モデルが構築される。

$$\frac{\hat{\Gamma}_i}{5} \left(1 - \frac{A^2}{(x_s^2 + y_s^2)^2}\right) \frac{dx_{si}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_{si}} \quad (14)$$

$$\frac{\hat{\Gamma}_i}{5} \left(1 - \frac{A^2}{(x_s^2 + y_s^2)^2}\right) \frac{dy_{si}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_{si}} \quad (15)$$

図1で示すように、 x_s と y_s は楕円体の (x, y) 断面（重心を含む水平面）の長軸と楕円体面との交点である。Meacham *et al.*[4] は鉛直楕円体渦の運動を記述するときに同様の正準変数を導入しているが、少々面倒な代数計算によって傾斜した楕円体の場合にも x_s と y_s が（準）正準変数となることを示すことができる（詳細略）。この x_s と y_s の幾何学的意味は分りやすいので、相互作用エネルギー積分の離散点近似がしやすくなる。具体的に

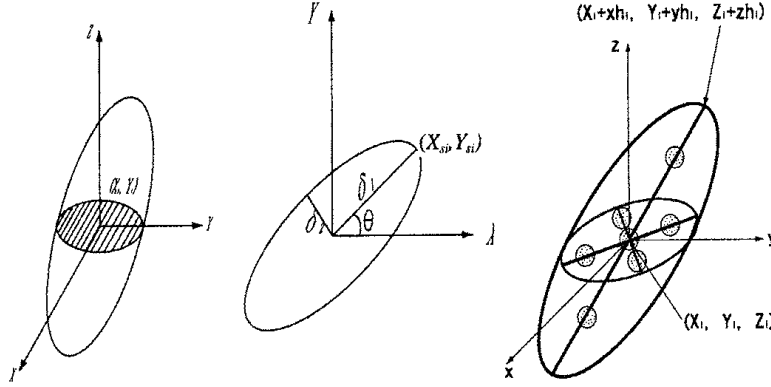


図 1: x_s, y_s の幾何学的意味.

図 2: 離散点の配置.

は、図 2 のように頂点を結ぶ線分上と重心を含む水平断面内の長軸・短軸上に積分点を配置し、重みも Gauss 積分法に準拠して決定する。以下では、各線分上に 3 点（重心は共通点）を配置した 7 点近似の結果を示すが、点の配置については種々の工夫が可能である。

一方、 i 番目の楕円体渦の自己エネルギーについては厳密な表式を用いる。

$$H_{si} = \frac{3\hat{\Gamma}_i^2}{40\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^3 + Bs^2 + Cs + V_i^2}}. \quad (16)$$

ここで、被積分関数の分母に現れる係数は

$$B = x_{hi}^2 + y_{hi}^2 + z_{hi}^2 + x_{si}^2 + y_{si}^2 + \frac{A_i^2}{x_{si}^2 + y_{si}^2}, \quad (17)$$

$$C = \frac{5R_i}{\hat{\Gamma}_i} (x_{hi}^2 + y_{hi}^2 + 2z_{hi}^2) + 0.5(x_{si}^2 + y_{si}^2 - \frac{A_i^2}{x_{si}^2 + y_{si}^2}) \frac{x_{si}^2 - y_{si}^2}{x_{si}^2 + y_{si}^2} (y_{hi}^2 - x_{hi}^2) \\ - (x_{si}^2 + y_{si}^2 - \frac{A_i^2}{x_{si}^2 + y_{si}^2}) x_{hi} y_{hi} \frac{2x_{si} y_{si}}{x_{si}^2 + y_{si}^2} + A_i^2 \quad (18)$$

で与えられる。また、 $4\pi V_i/3$ は i 番目の渦の体積であり、 πA_i は重心を含む水平断面の面積に対応する保存量である。単純な微分操作で運動方程式を書き下すことができるが、非常に長くなるので、具体的な表式は省略する。

3 CASL algorithm

図 3 は CASL 法の概略を図式化したものである。まず初期値で設定した PV-Contour から補間によって格子上的 PV 値を計算し、それを FFT を用いてスペクトル値に変換し、ス

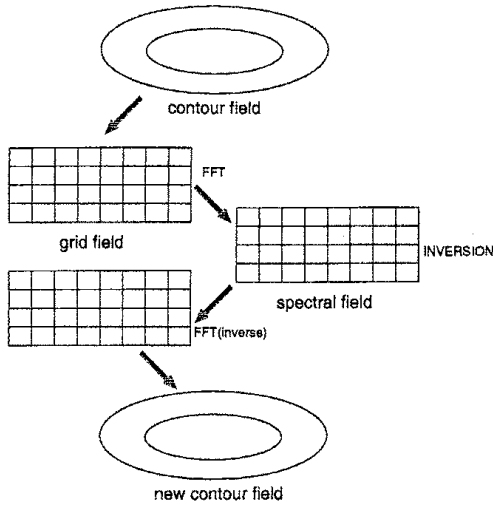


図 3: CASL 法の特徴.

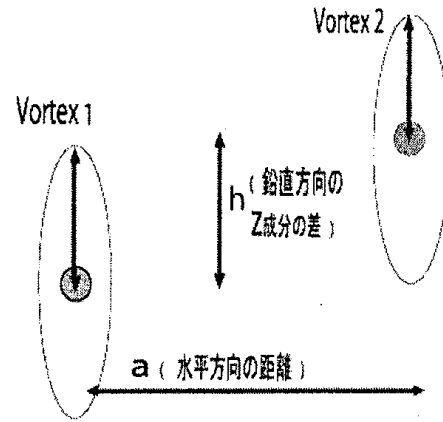


図 4: 二体の楕円体渦の配置.

ベクトル空間で流れ関数を計算して、速度場のスペクトル値を得る。その速度場を FFT を用いて逆変換し、格子上の速度場を得て、さらに補間を行なう事で Contour の移流速度を決定し、新たな PV-Contour が計算される。計算領域は $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ とし、格子数を $128 \times 128 \times 128$ とした。境界条件は水平方向は周期的境界条件、垂直方向は $\frac{\partial \psi_z}{\partial z} = 0$ とした。Surgery scale は $\delta = \frac{1}{10}L$ (L は格子サイズ) とした。

4 各モデルの予測と CASL 法による数値計算結果の比較

初期条件として様々な 2 つの回転楕円体渦を考える。本研究では渦の重心間距離を図 4 のように設定した。ただし、 a は 2 つ渦間の水平方向の距離で、 h は鉛直方向の距離である。

case	a_1	a_2	γ_1	γ_2	q_1/q_2
1	1.0	1.0	0.5	0.5	1.0
2	0.32	0.32	1.0	1.0	1.0
3	0.32	0.32	1.0	1.0	-1.0
4	0.71	0.71	1.0	1.0	1.0

表 1: 2 体回転楕円体渦のパラメータ.

本研究では、表 1 のように 5 つの場合について数値計算を実行し、モデルの予測精度を検証した。2 体渦の相互作用をまとめると、ほとんどのケースは以下の 3 つの現象に分類される。

- 定常回転運動: 時間発展をさせても、2 つの渦は初期形状を保ちながら回転を続ける。

- フィラメント放出現象：時間発展によって、フィラメントを放出し、最後に新しく2つの渦を形成して、安定回転運動を続ける。
- 渦合体現象：時間発展させると、渦体が一つの渦に合体し、最終的には一つの新しい回転楕円体渦となり回転を続ける。

ただし、異体積球の場合時間発展させると体積の小さい方渦がフィラメントを放出し、変形しながら大きな渦のほぼ真上に移動し、その後大きな渦と安定に回り続ける。

4.1 準地衡風球渦体 (Case 1)：楕円体渦モーメントモデルの検証

初期条件として球体渦を体積比 (1:1) のケースについて、数値シミュレーションを行った。楕円体のパラメータは次のようにした。

- アスペクト比： $\alpha/\gamma = 1.0$
- 傾斜角 (deg)： $\Theta = 0$
- 渦の高さ： $\gamma \cos \Theta = 0.5$

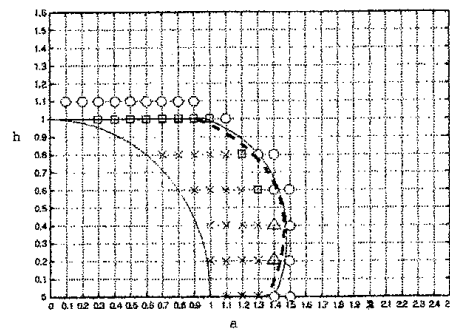


図 5: Co-rotating 時間発展後の球体渦対 (体積比 1:1) の振舞い. ○:Stable ×:Merger △:Exchange □:Filamentation.

図 5 は体積比が 1:1 のケースの渦の振る舞いである。モーメントモデルの予想する合体ライン (点線) と CASL 法数値計算結果の Filamentation 臨界線 (実線) とが非常によく一致する。球渦のように太い渦の場合には、楕円体渦モーメントモデルがよい予測を与えることが確認される。

4.2 同径楕円体渦 (Case 2)：楕円体渦モーメントモデルの限界

初期条件として細長い楕円体渦対 (体積比 1:1) を与えた数値シミュレーションを行った。楕円体のパラメータは

- アスペクト比： $\alpha/\gamma = 0.32$

- 傾斜角 (deg) : $\Theta = 0$
- 渦の高さ : $\gamma \cos \Theta = 1.0$

とし、このケースは渦体の振る舞いを以下のように分類した。図 6 では楕円体渦モーメントモ

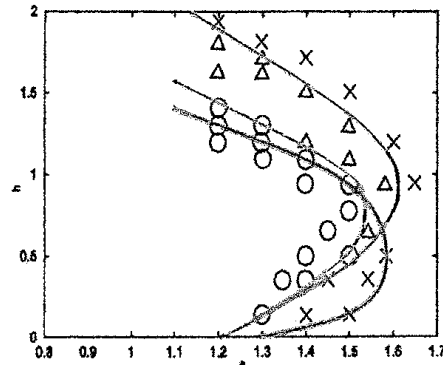


図 6: Co-rotating 楕円体渦対 (体積比 1:1) の振る舞い。○:Merger, ×:Stable, △:Filamentation.

デルの合体予測 (緑ライン) と CASL 法の数値計算結果によって引いた合体と Filamentation 境界ライン (赤ライン) とを比べると、 $h > 0.5$ のときはモデルの予測が CASL 法の結果より内側に入り、 $h < 0.5$ のときは外側にはみ出す。上述の球渦の計算結果と比べると、モーメントモデルの精度が落ちていることは一目瞭然である。より衝撃的なずれが case 4 で見られる。

4.3 Counter-rotating 楕円体渦対 (case 3) : 楕円体渦モーメントモデルの欠陥

初期条件として、異符号の楕円体渦対 (体積比 1:1) を与えた数値シミュレーションを行った。楕円体の初期パラメータは

- アスペクト比 : $\alpha/\gamma = 0.32$
- 傾斜角 (deg) : $\Theta = 0$
- 渦の高さ : $\gamma \cos \Theta = 1.0$

とした。CASL 法の計算結果から、渦対の振る舞いは安定-並進型、変形-並進型の 2 つに分類される。

図 7 で、CASL 法の計算結果では 2 つの渦は接近するとフィラメントは放出するが、ほぼ原形を保ったまま並進運動を続ける。しかし、モーメントモデルでは、2 つの渦が離れているならば、y 軸に沿って正方向に渦が並進する [計算領域 (1)]。渦が接近し、 $h/a > 1.14$ のとき渦は大きく傾き、y 軸の負方向に並進する [計算領域 (2)]。そして、 $h/a < 1.14$ のときにはより衝撃的なことが起って、両方の渦が無限に引きのばされ、渦の傾斜角は $\pi/2$ に近付き、渦は y 軸に沿って負方向に移動する。この領域では楕円体渦モデルの数値計算がストップしてしまう [計算領域 (3)]。したがって、モーメントモデルは全く信用できなくなり、その改良が必要である。

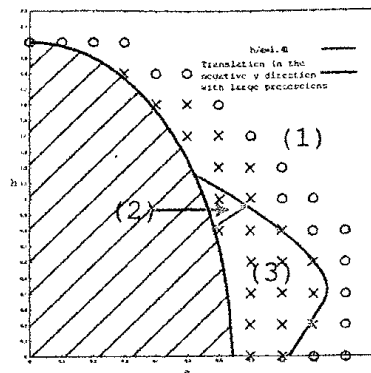


図 7: Counter-rotating 楕円体渦体の振舞い. ○:Stable ×:Filamentation

4.4 改良 Wire 渦モデルの検証

相互作用エネルギーを離散点近似で評価した改良 Wire 渦モデルの予測精度を検証する。

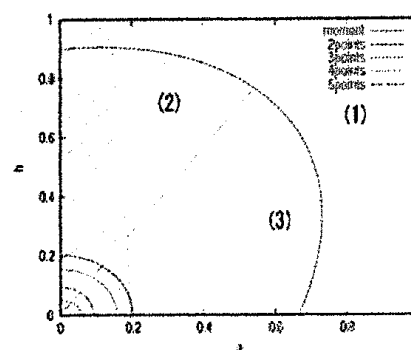
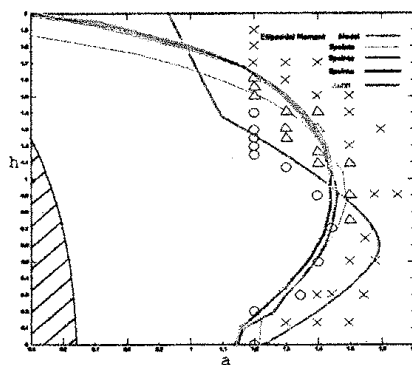


図 8: 改良 Wire 渦モデルによる Co-rotating 図 9: 改良 Wire 渦の Counter-rotating 渦対
場合の検証. ○:Merger ×:Stable △:Fila- の場合の検証.
mentation.

図 8 で、緑色がモーメントモデルの予測する合体境界ラインで、青色が改良 Wire 渦モデルによって引いた合体境界ラインである。細長い Co-rotating 渦の相互作用では、改良 Wire 渦モデルの方がモーメントモデルよりは CASL 法の計算結果に近寄っている。また、改良 Wire 渦モデルの 3 点近似と 5 点近似の予測はほぼ一致している。したがって、実用的には離散点数は 3 点で十分であろう。

図 9 で示したように、改良する前は 2 つの渦が赤い線の内側に入ると倒れて計算が止ったが、改良 Wire 渦モデルを用いて計算した結果、2 つの渦が重なるほど近付かない限り倒れなくなった。しかし、以下に示すように、アスペクト比が大きな渦に対しては改良 Wire 渦モデルも対応しきれないことが分る。

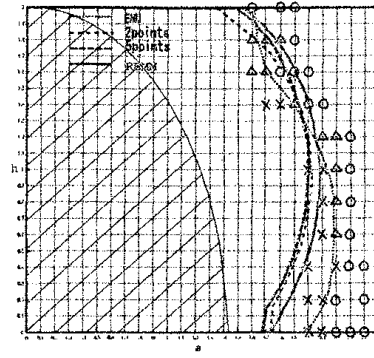


図 10: Co-rotating・改良 Wire・楕円体渦モデルの検証. $v = 0.5$, $\times$:Merger, $\circ$:Stable, $\triangle$:Filamentation.

4.5 同径楕円体渦対 (case 4) : 改良 Wire 渦モデルの限界と改良楕円体渦モデル

初期条件として太めの楕円体渦 (体積比 1:1) を与えた数値シミュレーションを行った。楕円体の初期パラメータは

- アスペクト比 : $\alpha/\gamma = 0.71$
- 傾斜角 (deg) : $\Theta = 0$
- 渦の高さ : $\gamma \cos \Theta = 0.5$

図 10 では、緑色がモーメントモデルの計算結果によって引いた合体とフィラメントの境界線で、青色が改良 Wire 渦モデルの計算結果によって引いた合体とフィラメントの境界線である。この図で、 $h > 1.3$ のときには改良 Wire 渦モデルの方が CASL 法の計算結果に近寄っているが、 $h < 1.3$ のときにはモーメントモデルの方が CASL 法の計算結果に近寄っていることが分った。このケースから、改良 Wire 渦モデルは渦のアスペクト比が小さいときには CASL 法の計算結果によく一致しているが、アスペクト比が大きくなるにつれ精度が落ることが分った。

そこで、前節で紹介したように新たな (準) 正準変数 x_{si}, y_{si} を用いて、自己エネルギーの厳密な表式と離散点近似による相互エネルギーを用いた改良楕円体渦モデルで計算した。改良楕円体渦モデルの予測する合体境界ラインは、図 10 で示した赤ラインである。改良 Wire 渦モデルの予測とモーメントモデルの予測の間に合体境界ラインが現れるので、改良楕円体渦モデルは改良 Wire 渦モデルとモーメントモデルの欠点をほぼ克服することができたといえるかもしれない。しかし、 $h < 1$ では従来のモーメントモデルのほうがよりよい予測を与えている。離散点の個数や配置を検討し直すなど、楕円渦モデルのもう一段の改良が必要なようである。

5 結言

- 2 体渦の Co-rotating の場合

- アスペクト比が $1/3$ より大きいとき：CASL 法の計算結果とモーメントモデル法の計算結果はほぼ一致する。
 - アスペクト比が 0.32 より小さいとき：モーメントモデルより離散点近似に改良した Wire 渦モデルの方が CASL 法の計算結果によく一致する。
 - アスペクト比が 0.71 のとき：離散点近似に改良した Wire 渦モデルより改良楕円体渦モデルの方が CASL 法の計算結果によく一致する。楕円体渦モデルをモーメント近似から離散点近似に改良した結果、モーメントモデルと改良 Wire 渦モデルの欠点をほぼ克服することができた。
- 2 体渦の Counter-rotating の場合
 モーメントモデルは細長い渦間の相互作用で「偽の特異性」を予測したが、離散点近似に改良した Wire 渦モデルを用いて計算した結果、渦が重なるほど近付かない限り倒れなくなった。

参考文献

- [1] McWilliams, J.C., Weiss, J.B. and Yavneh, I., 1994: Anisotropy and coherent vortex structures in planetary turbulence. *Science*, **264**, 410-413.
- [2] Dritschel, D.G. and Ambaum, M.H.P., 1997: A contour-advective semi-Lagrangian numerical algorithm for simulating fine-scale conservative dynamical fields. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **123**, 1097-1131.
- [3] Meacham, S.P., Pankratov, K.K., Shchepetkin, A.F. and Zhmur, V.V., 1994: The interaction of ellipsoidal vortices with background shear flows in a stratified fluid. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **21**, 167-212.
- [4] Meacham, S.P., Morrison, P.J. and Flierl, G.R., 1997: Hamiltonian moment reduction for describing vortices in shear. *Phys. Fluids* **9**(8), 2310-2328.
- [5] Miyazaki, T., Shimada, M. and Takahashi, N., 2000: Quasigeostrophic Wire-Vortex Model. *J. Phys. Soc. Jpn.* **69**, 3233-2601.
- [6] Miyazaki, T., Furuichi, Y. and Takahashi, N., 2001: Quasigeostrophic Ellipsoidal Vortex Model. *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 1942-1953.
- [7] Miyazaki, T., Asai, A., Yamamoto, M. and Fujishima, S., 2002: Numerical Validation of Quasigeostrophic Ellipsoidal Vortex Model. *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**, 2687-2699.
- [8] Miyazaki, T., Yamamoto, M. and Fujishima, S., 2003: Counter-Rotating Quasigeostrophic Ellipsoidal Vortex Pair. *J. Phys. Soc. Jpn.* **72**, 1948-1962.
- [9] Dritschel, D.G., Reinaud, J.N. and McKiver W., 2004: The quasi-geostrophic ellipsoidal vortex model. *J. Fluid Mech.* **505**, 201-223.
- [10] Miyazaki, T., Taira, H., Niwa, T. and Takahashi, N., 2005: Refinements on the Quasigeostrophic Wire-Vortex Model. *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 359-367.