

統計的決定関数の良さ (betterness) について

大阪市大、理、工藤弘吉

§ 1. 決定関数の定義

可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の確率測度のある集合 $\mathcal{P}$ が与えられているとき、 $\mathcal{P}$ を含む最小の線型空間を Π とする。 Π はノルム $\|\mu\| = \sup_{B \in \mathcal{B}} \mu(B) + |\inf_{B \in \mathcal{B}} \mu(B)|$ によつて、ノルム空間とみなされる。一方局所コンパクトなハウスドルフ空間 S 上のコンパクト台をもつ連続関数の全体 C_0 とその双対空間 C_0^* を考えておく。 C_0 にはノルム $\|c\| = \sup_{x \in S} |c(x)|$ を入れておく。 Π から C_0^* への線形対応 $\varphi(\mu)$ の全体を $\tilde{\Phi}$ とする。 $\tilde{\Phi}$ の元 φ が " $c \geq 0, \mu \geq 0$ なら $\varphi(\mu) \cdot c \geq 0$ となる" とし $\varphi \geq 0$ とする。 また φ が "任意の $\mu \in \Pi, c \in C_0$ に対して $|\varphi(\mu) \cdot c| \leq k \|\mu\| \|c\|$ をみたす" 実数 $k > 0$ が存在するとき、 φ は有限であるという。 φ のノルム $\|\varphi\|$ は上のような k の下限をもつて定義する。

統計とは、 X の真 x が $\mathcal{P}$ に属する未知の元に従つて観測されたとき、これを基にして、 S の一実を選ぶことであると考える。この意味から X を 標本空間 (その元 x を 標本値)、 $\mathcal{P}$ を 標本分布空間、 S を 行動 (または 決定) の空間 といひ、 $\tilde{\Phi}$ の $\|\varphi\| = 1, \varphi \geq 0$ なる元 φ を (確率化) 決定関数 または 決定方式 という。決定方式の全体を $\tilde{\Phi}$ であらわす。しばしば採用できる方式が $\tilde{\Phi}$ の部分集合 D の中に限定されることがあるが、このとき D を 決定方式の空間 という。以下で S のボレル集合族 α で定義される確率測度の

全体を $\mathcal{M}$ であらわす。 φ は $\mathcal{P}$ から $\mathcal{M}$ への線形対応とみなされる。

定理 1. 1. (局所化定理. [15, 16]). $\mathcal{P}$ は $\mathcal{X}$ 上のある σ 有限測度 μ によつて支配され, S は局所コンパクト可分距離づけ可能な空間であるとする。そのとき任意の元 $\varphi \in \Phi$ に対して次の条件をみたす $\hat{\varphi}(A; x)$ が存在する:

- (1) 殆んどすべての (x) x に対して $\hat{\varphi}(\cdot; x) \in \mathcal{M}$,
- (2) S のすべてのボレル集合 A に対して $\hat{\varphi}(A; x)$ は $\mathcal{B}$ 可測,
- (3) $\varphi(\mu) \circ c = \int_S c(t) \left[\int_{\mathcal{X}} \hat{\varphi}(dt; x) \mu(dx) \right]$.

以下の $\S$ では $\mathcal{P}$ が $\mathcal{X}$ 上の σ 有限測度 μ に支配される確率測度族, S が局所コンパクト可分距離づけ可能な位相空間であると仮定する。なお $\hat{\varphi}$ がどんな x に対しても 1 点に確率測度 1 をつけるような $\mathcal{M}$ の元を対応させるものであるとき, 決定方式 φ を 非確率化決定方式 とよぶ。

$\S 2$. 危険関数と良さの基準

統計学の目的は何等かの基準に基づいて "良い" と思われる決定方式を採用することである。この良さの基準のために危険関数が考えられる。危険関数は環境の条件 (ここではこれを θ であらわし, パラメータ と呼ぶ。その全体 Θ がいわゆる パラメータ空間 である。訳語は 母数 ならびに 母数空間) と決定方式 φ とによつて定まる実数値関数である。簡単のため, 以後非負値関数とする。これを $I(\theta, \varphi)$ であらわす。パラメータ θ によつて

標本 x の分布関数 $\mu \in \mathcal{P}$ と定まると考えられるから、これを μ_0 と書く都合よい。しかし θ と μ_0 とは必ずしも1:1ではない。また危険関数を2つ以上考えなければならない場合もあるが、その場合でも危険関数 $I_i(\theta, \varphi)$ の添え数 i と θ との組 (i, θ) をパラメータと同じように考えれば、危険関数がただ1つの場合になつてしまう。以下57までは危険関数が1つの場合を論じ、58で危険関数が2つ以上ある場合に論及する。

2つの決定方式 φ_1, φ_2 の間に“すべての $\theta \in \Theta$ で $I(\theta, \varphi_1) \geq I(\theta, \varphi_2)$ がなりたつ”とき、 φ_2 は φ_1 と同じくらい良い (as good as) といわれる。すべての θ で $I(\theta, \varphi_1) = I(\theta, \varphi_2)$ がなりたつとき、 φ_1 と φ_2 とは同等であるといわれる。 φ_1 と同じくらい良いが同等ではない φ_2 は φ_1 より良いといわれる。また φ_2 は φ_1 の改良であるといい、 φ_1 の改良が存在するとき、 φ_1 は改良出来るという。 D の中で改良出来ない決定方式は許容的であるといわれる。もし D の部分集合 C が、 $D-C$ のどの元の改良をも含んでいるとき、完全類といわれる。包含関係で最小な完全類を最小完全類という。最小完全類が存在するための必要条件は許容的決定方式の全体が完全類であることである。 D の部分集合 C が、 D のどんな元 φ に対しても、 $\forall \theta: I(\theta, \varphi) \geq I(\theta, \psi)$ なる ψ を含んでいるとき、本質的完全類といわれる。

ここでパラメータ空間 Θ の部分集合の σ 代数 Λ を考えて、可測空間 (Θ, Λ) を作り、危険関数 $I(\theta, \varphi)$ は、任意の $\varphi \in D$ に対して、 θ の Λ 可測関数と仮定する。しかし Λ は原子をもつと仮定する。 Λ 上の確率測度は、標本 x を観測する前に(経験に先だつて)知られているべき情報だ

から、これを先験確率分布または先験分布といい、 ξ であらわす。その全体を Ξ で、また有限個の原子の集合に確率1をつける先験分布の全体を Ξ_1 であらわす。もちろん $\Xi_1 \subset \Xi$ 。 ξ による危険関数の平均 $\int I(\theta, \varphi) d\xi$ を簡単のため $I(\xi, \varphi)$ とかく。これが期待される危険率である。この平均危険を最小にする方式 $\varphi \in D$ を ξ に対するベイズ解という。何らかの先験分布 ξ のベイズ解になつてゐる決定方式の全体をベイズ類という。56 では先験分布の集合 H の元 ξ のベイズ解になつてゐる決定方式の全体を考えるが、このときこの類を H に対するベイズ類 $B[H]$ と呼び、したがつて單にベイズ類と呼ばれるものは $B[\Xi]$ である。もし先験分布 ξ のベイズ解が1つしかないならば、そのベイズ解は許容的である。先験分布の集合 H に対して決定方式 φ^0 が

$$(1) \quad \inf_{\xi \in H} \{ I(\xi, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \varphi) \} = 0$$

をみたすとき、 φ^0 を H に対するワルド解(広義ベイズ解) と呼び、その全体を H に対するワルド類 $W[H]$ という。

φ_2 が φ_1 と同じくらい良く、さらに $E \in \Theta$ 上で常に $I(\theta, \varphi_2) \leq I(\theta, \varphi_1) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, がなりたつとき、 φ_2 は φ_1 の (E, ε) 改良 という。 Ξ_1 に対するワルド解はどんな $\varepsilon > 0$ に対しても (Θ, ε) 改良をもたない。 Θ の空でない部分集合の族 Σ を考えて、 Σ のどんな元 E についても、どんな $\varepsilon > 0$ についても、 φ^0 が D の中で (E, ε) 改良を持たないとき、 φ^0 を Σ 許容的 という。もし Σ が Θ のすべての部分集合(空でない)の全体であるならば、 Σ 許容的は許容的と一致する。また Θ がユークリッド空間である場合に、ルベック測度が正である部分集合の全体を Σ とするなら、 Σ 許容的のことを殆んど

許容的という。次に許容性の条件を述べるために、

$$G_1(\varphi, E) = \inf_{\xi \in \Xi_1} \frac{I(\xi, \varphi) - \inf_{\varphi' \in D} I(\xi, \varphi')}{\xi(E)}$$

(しかし右辺の分数は分母が0のときは ∞ と読むものと約束する)。を定義する。このとき

定理2.1. φ^* が φ^0 の (E, ε) 改良であるならば、 $G_1(\varphi^*, E) \leq G_1(\varphi^0, E) - \varepsilon$ をみたす。

略証. 任意の $\varepsilon' > 0$ に対して $G_1(\varphi^0, E) + \varepsilon' > \{I(\xi, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \varphi)\} / \xi(E)$ となる $\xi \in \Xi_1$ が存在するから、 $I(\xi, \varphi^*) \leq I(\xi, \varphi^0) + \varepsilon \cdot \xi(E)$ より、目的の式が得る。

定理2.2. 次の4つの命題は同値である:

a) $G_1(\varphi^0, E) = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{I(\xi_n, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi_n, \varphi)\} / \xi_n(E) = 0$ となる $\xi_n (\in \Xi_1)$ の列が存在する。

c) ใดなる $\varepsilon > 0$ に対しても、 $\xi(E) > \delta$ かつ $I(\xi, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \varphi) < \delta \varepsilon$ をみたすような $\xi (\in \Xi_1)$ と $\delta > 0$ とが存在する。

d) 正数列 $\{A_n\}$ と Ξ_1 の元の列 $\{\xi_n\}$ を適当にとつて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \xi_n(E) > 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \{I(\xi_n, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi_n, \varphi)\} = 0$ ならしめることができる。

さらに、もし Σ が可算個の (空でない) $E (C \oplus)$ の族である

ならば, Σ のすべての E に対して $a) \sim d)$ の1つが成立つことは

e) 正数列 $\{A_n\}$ と Σ_1 の元の列 $\{\xi_n\}$ とを適当にとつて,

1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \xi_n(E) = 0$ なら $E \notin \Sigma$,

2) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \{r(\xi_n, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} r(\xi_n, \varphi)\} = 0$

ならしめることができる

と同等である.

証明は極めて簡単であるので省略する.

定理2.2の命題c)はStein [20]の形であり, e)は竹内 [22]の形である. そして定理2.1によると, Σ のすべての E で $a) \sim d)$ のうちの1つが成り立つこと, およびe)がなりたつことはいづれも φ^0 の Σ 許容性の十分条件である.

§3. Wald-Lelam の定理.

④で定義された extended な非負関数の全体を $\mathcal{F}$ とし, 実半直線に $+\infty$ を付け加れたコンパクト空間 $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ の直積空間 $\bar{\mathcal{F}}_+^{\otimes}$ とみなして, $\mathcal{F}$ にチコノフ位相(直積位相, または弱位相)をつけて位相空間とする. もちろん $\mathcal{F}$ はチコノフの定理によつて, コンパクト位相空間である. またハウスドルフ空間でもある. $\mathcal{R}(D) = \{r(\cdot, \varphi) : \varphi \in D\}$ を $\mathcal{F}$ の部分集合とみなし, $\mathcal{R}(D)$ の閉包を作るとき, その任意の元 $f(\cdot)$ に対して, $\varphi^0 \in D$ が

存在して ' $\forall \theta \in \Theta : I(\theta, \varphi^0) \leq f(\theta)$ ' となるならば, D は性質(W)をもつという. また任意の $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ と任意の $\alpha \in [0, 1]$ に対して, $I(\theta, \varphi_3) \leq \alpha I(\theta, \varphi_1) + (1-\alpha) I(\theta, \varphi_2)$ が成立するような $\varphi_3 \in D$ が存在するとき, D は 下半凸 であるという. ベイズ類 $B[E, I]$ の危険関数族 $R(B[E, I]) = \{I(\cdot, \varphi) : \varphi \in B[E, I]\}$ の予における包摂に $I(\cdot, \varphi)$ が属するような $\varphi \in D$ の全体を B^* とかくと,

定理 3. 1 (Wald-LeCam [16], [24]). D が下半凸で, 性質(W)をもつとき, (イ) 最小完全類が存在する. (ロ) B^* は完全類である. (ハ) ワルド類 $W[E, I]$ は完全類である. (ニ) $B^* \cap W[E, I]$ は完全類である.

定理 3. 2 D は下半凸で, 性質(W)をもつとする. そのとき, (イ) 空でない $E \subset \Theta$ に対して, φ^0 が (E, ε) 改良をもつための必要条件は $G_1(E, \varepsilon) \geq \varepsilon$ が成立することである. (ロ) Θ の空でない部分集合の族 Σ に対して, すべての $E \in \Sigma$ で $G_1(\varphi, E) = 0$ がなりたつような $\varphi \in D$ の全体は D で完全類である. 特に (ハ) Σ がすべての部分集合のなす族であるとき (ロ) の完全類は最小である.

略証. (イ) を証明するために先づ Θ が有限集合のとき, すなわち有限次元のユークリッド空間で (イ) が成立することを証明する. そのために $S \subset R^n$ が下半凸で, 性質(W)と同様な

条件をみたすとき、 $x \in S$ であるすべての $z = (z_1, \dots, z_n)$ に対して $z_1, \dots, z_n: x_i - \inf_{y \in S} \sum_{i=1}^n z_i y_i \geq \varepsilon \sum z_i$ をみたすならば、 $x_i - \varepsilon \geq y_i, i=1, \dots, n$, となる $y = (y_1, \dots, y_n) \in S$ が存在することを証明する。次に一般の場合は、④の有限部分集合 N をとり、1) $0 \leq f(\theta) \leq I(\theta, \varphi^0)$ がすべての $\theta \in \Theta$ でなりたつ、2) $f(\theta) \leq I(\theta, \varphi^0) - \varepsilon$ がすべての $\theta \in N \cap E$ でなりたつ、3) $f(\theta) = I(\theta, \varphi^*)$ が $\theta \in N$ でなりたつ $\varphi^* \in D$ が存在する、ような $f \in \mathcal{F}$ の全体を Δ_N とする。 Δ_N は空集合ではなく、かつ $\{\Delta_N\}$ は有限交叉性をもつことより、その共通部分から g をとると、性質(W)を用いて (E, ε) 改良を見つけることができる。(ロ) 先づ $G_1(\varphi, E) = 0$ となる φ の全体が完全類であることを証明する。それは $k_n = G_1(\varphi^{n-1}, E)$, φ^n は φ^{n-1} の $(E, k_n/2)$ 改良となるような方式の列 $\{\varphi^n\}_{n=0,1,\dots}$ を作り、性質(W)を用いて、 φ^0 の改良を $G_1(\varphi, E) = 0$ となる φ からもとめる。次に φ^0 をこの類に属さないとして、 $C(E)$ を $G_1(\varphi, E) = 0$ をみたし、かつある $\varepsilon > 0$ で (E, ε) 改良 φ の全体とする。この $\{C(E): E \in \Sigma\}$ は有限交叉性をもつ。従って再び性質(W)を用いて、すべての $E \in \Sigma$ で $G_1(\varphi, E) = 0$ をみたす φ^0 の改良 $\varphi \in D$ の存在がいわれる。(ハ) は簡単に証明される。

定理3.2.から Stein の定理 [20], LeCam の定理 [16],

竹内[22]の定理[22]が特別の場合として得られる。

系1. (Swinn [20]). D が下半凸で、性質(W)をもつとする。 $\varphi^0 \in D$ が許容的であるための必す条件はどんな $\theta \in \Theta$, どんな $\varepsilon > 0$ に対しても, $I(\theta) > \delta$, $I(\xi, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \varphi) < \varepsilon \delta$ のなりたつような $\delta > 0$, $\xi \in E_1$ が存在することである。

系2 (LeCam [16]). D が下半凸で、性質(W)をもつとする。 そのとき $\varphi^0 (\in D)$ が (Θ, E) 改良できるための必す条件はすべての $\xi \in E_1$ に対して $I(\xi, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \varphi) \geq \varepsilon$ が成立することである。

系3 (竹内 [22]). どんな $\varphi \in D$ に対しても $I(\theta, \varphi)$ が θ の連続関数であるとする。 D が下半凸で性質(W)をもつならば, φ^0 が許容的であるための必す条件は, E_1 の元の列 $\{\xi_n\}$ および正数列 $\{A_n\}$ が存在して, どんな開集合 $E(C \oplus)$ に対しても $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \xi_n(E) > 0$ で, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \{I(\xi_n, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi_n, \varphi)\} = 0$ がなりたつことである。

§4. 決定関数の空間の正則位相. 危険関数の線形構造.

Φ に $\mathcal{P}$ から C_0^* への対応の族としての弱位相を考えて, これを正則位相と名づける。この位相における近傍系は任意の $\varphi^0 (\in \Phi)$ の近傍として

$$V(\varphi^0; c_1, \dots, c_n, \mu_1, \dots, \mu_n, \varepsilon) = \{ \varphi \in \Phi : |\varphi^0(\mu_i) \circ c_i - \varphi(\mu_i) \circ c_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \}, c_i \in C_0, \mu_i \in \mathcal{P},$$

$$V(\varphi^0; c_1, \dots, c_n, \mu_1, \dots, \mu_n, \varepsilon) = \{ \varphi \in \Phi : |\varphi^0(\mu_i) \circ c_i - \varphi(\mu_i) \circ c_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \}, c_i \in C_0, \mu_i \in \mathcal{P},$$

...、...したものからなりたつ。

定理 4. 1 (LéCam [16]). Φ の部分集合 D が相対的にコンパクトであるための必要条件は任意の $\mu \in \mathcal{P}$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\|c\| = 1$ なる c の元 c が存在して, どんな $\varphi \in D$ に対しても, $\varphi(\mu) \circ c > 1 - \varepsilon$ とすることができることである.

$\mathcal{M}$ に弱位相 (法則収束位相) を導入して考えると, 定理 4. 1 は " D の相対的コンパクト性の必要条件は, 任意の $\mu \in \mathcal{P}$ に対して $D(\mu) = \{\varphi(\mu) : \varphi \in D\}$ が $\mathcal{M}$ で相対的にコンパクトであること" になる. これはチコフの定理に相当する. D の任意の部分集合 D' が " $D'(\mu) = \{\varphi(\mu) : \varphi \in D'\}$ が $\mathcal{M}$ でコンパクトになるような μ が $\mathcal{P}$ の中に 1 つ存在すればすべての $\mu \in \mathcal{P}$ で $D'(\mu)$ が $\mathcal{M}$ でコンパクトである" という条件をみたすとき, D は $\mathcal{P}$ に関して等価であるという.

定理 4. 2 [11]. もし $\mathcal{P}$ の任意の 2 つの元が互いに絶対連続であるなら, Φ は $\mathcal{P}$ に関して等価である.

T と S とは共に局所コンパクト可分距離付け可能な空間であつて, T から S の上への対応 $u(t)$ が, S のボレル集合 B の逆像 $u^{-1}(B)$ が常に T のボレル集合である, ようなものとする. このとき T を決定の空間とし, $\mathcal{P}$ を分布の空間とする統計問題 $(T, \mathcal{P})$ の任意の決定方式 φ に対して, $\hat{\psi}(B; x) = \hat{\varphi}(u^{-1}(B); x)$ を表現 (局所化定理の意味で) とする決定方式 ψ を, 決定の空間 S , 分布の空間 $\mathcal{P}$ (共通) をもつ統計問題 $(S, \mathcal{P})$ の決定方式と考えることができる. この事実の逆として

定理 4. 3 [11]. 上記の記号および条件のもとで, $(S, \mathcal{P})$ に関する

る決定方式 ψ に対して、 $\hat{\psi}(B; x) = \hat{\varphi}(U^{-1}(B); x)$ がすべてのボレル集合 B について成り立つような、 $(T, \mathcal{P})$ に関する決定方式 φ が存在する。

統計家が自然環境 θ のもとで、行動(決定) $t \in S$ をとつたときに、その統計家が何等かの損失を蒙ることを考える。この損失を θ と t との2変数の関数と考えて $L(\theta, t)$ であらわし、損失関数という。こゝでは $L(\theta, t)$ は非負で $\Lambda \times Q$ 可測であると仮定する。ただし Q は S のボレル集合族であらわす。危険関数 $I(\theta, \varphi)$ が損失関数の平均:

$$(2) \quad I(\theta, \varphi) = \int_S L(\theta, t) \varphi(\mu_\theta)(dt)$$

であらわれるとき、危険関数は線形構造をもつという。以下において、特にことわらない限り、危険関数は線形構造をもつと仮定する。この仮定があれば、いかなる θ に対しても $L(\theta, t)$ がその下半連続関数であれば、 $I(\theta, \varphi)$ は(重の正則値相に関して) φ の下半連続関数である。

定理4. 4. D がコンパクトで、どんな θ に対しても $L(\theta, t)$ が t の下半連続関数であるなら、 D における $R(B) = \{I(\theta, \varphi) : \varphi \in B\}$ の閉包に $I(\theta, \varphi)$ が入るような φ に対して、正則値相での B の閉包の元 ψ が存在して、 $\forall \theta : I(\theta, \psi) \leq I(\theta, \varphi)$ 。

証明. $I(\theta, \varphi)$ は、どんな θ でも φ の下半連続関数である。故に $I(\cdot, \varphi)$ に収束する $R(B)$ 内のネット $\{I(\cdot, \varphi_\alpha)\}$ に対応する B 内のネットから収束部分ネット $\{\varphi_\beta\}$ をとると、その極限 $\psi \in (B \text{の閉包})$ があり、 $\lim_\alpha I(\theta, \varphi_\alpha) \leq I(\theta, \psi)$ が成立する。

線形構造をもつ危険関数に対しては、 $\mathcal{P}$ が有限測度入で支配されていれば、ベイズ解は簡単に求められる。 μ_θ の入に関する一般危険関数を $p(x; \theta)$ とし、先験分布を ξ とすると、ベイズの定理によつて、

$$(3) \quad \eta_\xi(d\theta: x) = \frac{p(x; \theta) \xi(d\theta)}{\int_{\Theta} p(x; \theta) \xi(d\theta)}$$

は x が与えられた条件付の θ の分布である。すなわち 事後分布 である。

$$(4) \quad \rho(t, x) = \int_{\Theta} L(\theta, t) \eta_\xi(d\theta: x)$$

は 事後損失 であつて、 ξ に対するベイズ解は、 x が観測されたとき $J_x = \{t: \rho(t, x) = \min_{s \in S} \rho(s, x)\}$ をとる方式 $\varphi: \hat{\varphi}(J_x: x) = 1$, である。

以上述べたように標本空間 $\mathcal{X}$ (およびその σ 代数 $\mathcal{B}$)、分布の空間 $\mathcal{P}$ 、決定の空間 S (およびその位相)、決定方式の空間 D 、損失関数 L が本質的に統計の問題を規定する。それでこれ等の組 $(\mathcal{X}, \mathcal{P}, S, D, L)$ を 統計問題 とよぶ。

§ 5. 性質 (W).

統計的決定関数の類の性質 (W) はさうで示したように大変重要である。ところがこの性質を判定するのは決して容易なことではないので、以下においてその判定条件を述べる。

定理 5. 1 (LeCam [16], [11]). 任意の $\theta \in \Theta$ について、 $I(\theta, \varphi)$ が φ の下半連続関数とする。そのときコンパクトな D は性質 (W) をもつ。

この定理は $I(\theta, \varphi)$ の構造や D の位相には関係なく成立する。しかし I が線形構造をもっているときは、 t の下半連続な $L(\theta, t)$ に対しては、

正則位相でコンパクトな D は性質 (W) をもっている。(定理 4.4 参照)

定理 5. 2 [11]. どんな θ に対しても, またどんな正数 $\varepsilon < \sup_{\varphi \in D} \Sigma(\theta, \varphi)$ に対しても, D の部分集合 C が存在して, C が性質 (W) をもち, かつ $\inf_{\varphi \in C} \Sigma(\theta, \varphi) > \varepsilon$ をみたすものとする. このとき D は性質 (W) をもつ.

この定理も $\Sigma(\theta, \varphi)$ の構造に無関係である. したがって定理 5. 1 も 5. 2 も一般の関数に適用される. ある変数の関数 $f(\theta, t)$ が, 予の部分集合 $\{f(\cdot, t): t \in T\}$ の各収束位相に関する任意の集積点 $g(\cdot)$ に対して, $\forall \theta: f(\theta, t_0) \leq g(\theta)$ がなりたつ $t_0 \in T$ が存在するとき, $f(\theta, t)$ は半開であるという. 損失関数 $L(\theta, t)$ が半開であることが, D の性質 (W) の十分条件であることを下にしめよう. 先づ $\mathcal{L} = \{L(\cdot, t): t \in S\}$ が予の相対位相で考えたとき, 局所コンパクト可分距離空間と同位相であるとする. 次にどんな θ でもそれを固定すれば, $L(\theta, t)$ は t のボレル可測関数であると仮定する. そのとき S から予への対応 $\mu(t) = L(\cdot, t)$ によって, $\mathcal{L} = \mu(S)$ と考えることができる. したがって定理 4.3 によって, $\mathcal{L}$ を新しい行動空間と承えて議論を進めてゆくことができる. このことを利用して, 次の定理を証明することができる.

定理 5. 3 [11]. $\mathcal{L}^*$ を予の中での $\mathcal{L}$ の閉包とする. $\mathcal{L}$ は上に求げられた条件をみたすものとし, $\mathcal{L}^*$ から $\mathcal{L}$ への対応 χ があつて

- (a) いかなる $\theta \in \Theta$, いかなる $\varepsilon > 0$ に対しても $\{f \in \mathcal{L}^*: L(\theta, \chi f) \leq \varepsilon\}$ が $\mathcal{L}$ における相対的ボレル集合である.
- (b) どんな $\theta \in \Theta$, $f \in \mathcal{L}^*$ に対しても, $L(\theta, \chi f) \leq f(\theta)$ がなり

たつ。ただし $\chi_f(\cdot) = L(\cdot, t)$ であるとき, $L(\theta, t) = L(\theta, \chi_f)$ とかく。
を満足するとき, Φ は性質 (W) をもつ。

$D = \Phi$ のときに対しては上の定理はほぼ満足な結果を与えている。しかし D が Φ の真部分集合である場合には上の定理の条件では不十分である。
 D が Φ の真部分集合で, 損失関数 $L(\theta, t)$ が半閉のとき ($L(\theta, t)$ が 2乗誤差 $(\theta - t)^2$ のときですえ), D が性質 (W) をもたないような例が与えられている [11]。

定理 5.4 [11]. $L(\theta, t)$ が θ の下半連続で, どんな $\theta \in \Theta$ と正整数 n に対しても, S のコンパクト部分集合 C が存在して, $n \leq$
 $\inf_{t \in C} L(\theta, t)$ をみたすものとする。このとき Φ に関して等価な
 真集合 D は性質 (W) をもつ。

§6. 形式的ベイズ解.

Wald-LeCam の定理 (定理 3.1) によると, 性質 (W) をもつ下半凸な D では B^* やワルド類 W が完全類であつた。ところが B^* の元が $r(\xi, \varphi)$ のちやうどかした極限とある意味で関係がある。粗雑な言い方であるが, B^* の元は実験分布の列 $\{\xi_n\}$ に対するベイズ解の列 $\{\varphi_n\}$ の極限であるから, 汎関数 ξ_n の列の極限とそれに対するベイズ解の間に, 例えば “ $\{\varphi_n\}$ の極限 φ^0 は $\{\xi_n\}$ の極限である汎関数の値を最小にする” などという関係があれば, “極限汎関数の値を最小にする決定方式の全体は完全類である” などという都合のよいことがいえる。またワルド類にしても, (1) を書きかえると $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ r(\xi_n, \varphi^0) - \inf_{\varphi \in D} r(\xi_n, \varphi) \} = 0$

$I(\xi_n, \varphi) = 0$ となる先験分布の列 $\{\xi_n\}$ が存在するということであるから, " φ は ξ_n の極限汎関数を最小にする" というようなことが云えるかもしれない.

先験分布 ξ によつて定まる φ の関数 $I(\xi, \varphi)$ は, D 上の実関数全体 Q の要素である. したがつて ξ のある集合 H は Q の部分集合に対応する. Q に一様収束位相を考へて, それに關して H の閉包 (くわしくは H に対応する Q の部分集合の閉包) を H^* であらわす. また H に関するベイズ類 $B[H]$ の D における閉包 (正則位相での) を $B[H]^*$ であらわす. そのとき

定理 6.1 [13]. H が Q の位相でコンパクトであるとし, 任意の $\xi \in H$ に対して, $I(\xi, \varphi)$ が D 上の下半連続関数であるとする. そのとき $B[H]^* \subset B[H^*] = W[H]$.

この定理で H は先験分布の集合とした. しかし実は H を D 上の関数族としても定理は成立する. そこで A_ξ を ξ に關係して定まる定数とし, $\xi(\varphi) = A_\xi \cdot I(\xi, \varphi)$ とすると, H^* の元は様々なものになりうる. つまり有限測度であつたり, 超関数であつたりする. このことをもつと具体的にのべると,

定理 6.2 [9]. 任意の先験分布列 $\{\xi_n\}$ に対して, その部分列 $\{\xi_{n_j}\}$ および正数列 $\{A_j\}$ が存在して, どんな $\varphi \in D$ に対しても一様な極限 $F(\varphi) = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j I(\xi_{n_j}, \varphi)$ が存在するものとする. さらにその F は正則位相で $\varphi_m \rightarrow \varphi_\infty$ なら $\lim_{m \rightarrow \infty} F(\varphi_m) =$

$F(\varphi_0)$ を満足するものとする。そのときそのようにして得られるすべての F に対して、 $F(\varphi_0) = \min_{\varphi \in D} F(\varphi)$ となる φ_0 の全体 V は B^* $= B[\Xi]^*$ を含む。かつ $\inf_{\xi \in \Xi} A_\xi \{I(\xi, \varphi_0) - \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \varphi)\} = 0$ をみたす。

例えば Θ が実数軸であり、 $I(\theta, \varphi)$ は θ の有界連続関数であつて、 E を Θ のある可測部分集合、 $A_\xi = \xi(E)^{-1}$ であるとする。このとき $\{A_{\xi_n}, \xi_n\}$ と σ 有限測度 λ とが、すべての有界連続関数 $f(\theta)$ に対して、 $\int f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\xi_n} \int f d\xi_n$ であるという関係にあるとき、 λ は $\{A_{\xi_n}, \xi_n\}$ の極限であるという。このような意味の極限である σ 有限測度 λ に対して、 $\int I(\theta, \varphi) d\lambda$ を最小にする φ_0 の全体を V とすると、 V は $B[\Xi]^*$ を含む。これが Sacks [19] の理論の要諦である。

次の例（頁参照）では、 $\Theta = \mathbb{R}^n$ 、 Q を境界がただ1度のみからなる $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。さらに $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ となる $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数 φ の全体が D であり、 $E_0[\varphi]$ は φ の μ_0 による平均であるとする。危険関数は $I(\theta, \varphi) = E_0[\varphi]$ かつ $\theta \in Q$ 、 $I(\theta, \varphi) = 1 - E_0[\varphi]$ かつ $\theta \notin Q$ であるとする。この記号と約束のもとに、 μ_0 の λ に関する一般密度関数 $p(x; \theta)$ について θ での微分可能性に関する適当な条件を仮定する。このとき $p(x; \theta)$ を含む線型空間 E 上の汎関数 $A_\xi \{ \int_{\xi} f dx - \int_{\Theta-Q} f dx \}$ を考える。この汎関数の極限は微分と積分を含む或種の超関数 F である。 $F(E_0[\varphi])$ を最小にする φ_0 の全体 V は B^* を含む。そしてこのような φ_0 は $F(p(x; \theta))$ を用いて比較的簡単に求められるのである。
[10].

一般に A_ξ のような正値有限測度の極限として定義される線形汎関数を

一般先験分布といい、その値を最小にする $\varphi^* (\in D)$ を 型式的ベイズ解 といふ。

次の定理はベイズ類の関数 I がワルド類より有意義である場合を示す。

定理 6. 3 [13]. $I(\theta, \varphi)$ が、任意の $\varphi \in D$ に対して、 θ の連続関数で、関数族 $R(D) = \{I(\theta, \varphi) : \varphi \in D\}$ は一様収束位相でコンパクトであり、 $\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\varphi \in D} I(\theta, \varphi) < \infty$ とする。そのとき $B[E, I]^* \subset W[E, I]$ 。

この定理の条件が満たされる場合には、下半凸で性質 (W) をもつ D におけるワルド類の、完全類としての意味は、ベイズ類より少ないと思ふべきであらう。具体的な統計問題で、トリビアルでない完全類の発見のためにしばしば用いられる方法は、或る類 C が B^* を含んでいることを示めすることである。Wald-Lehman の定理によると、 C が W が $W \cap B^*$ を含んでいることを示めせばよい筈であるが、現実にはこのような手段を用いなければ完全類であることが証明できない例は見つからない。そのために、 W 、まして $W \cap B^*$ の完全性の意味は薄いとわざるを得ない。 $B^* \subset W$ となる例は定理 6. 3 の他にもあるがその逆の場合については、華間 [14] の結果 " $B^* = \emptyset$ となる例" がある。

次の結果は型式的ベイズ解がベイズ解となる条件を与える。

定理 6. 4 (Wald [24]). Θ をコンパクト位相空間とし、 D の要素の元 φ のまわりに正則位相での近傍 V を、 $R(V) = \{I(\theta, \varphi) : \varphi \in V\}$ が同義連続かつ一様有界であるように、とることができるならば、 $B[E, I]^* \subset B[E]$ で、 $W[E, I] \subset B[E]$ である。

一般にベイズ解は、§4の最後でのべたように、事後損失を最小にするようなものを、観測値 x に従ってとる方式 φ として比較的簡単に求められる。しかし B^* の元や W の元は、一般には事後損失に相当するものが、そう簡単には求められない。それで事後損失に相当するものを発見しようとしたものが[19]や[10]であつて、前者では ϕ 有限測度を ξ であらわして(3), (4)を作る方法であり、後者は前述のような $F(p(x; \theta))$ を用いる方法を提案している。

§7. 先験部分情報に対する最適方式

§2において先験分布は標本 x が観測される以前に情報として統計者に与えられているべき、日の確率法則であるとした。しかし与えられるべきであつても、与えられているとは限らない。全く先験確率が知られていないこともあるが、少しだけ知られていることもある。この“少しだけ”ということをや次のように表現する： Θ の有限 Λ 可測分割 $\{\Theta_i\}$, $\Theta_i \in \Lambda$, $i=1, \dots, n$, $\Theta_i \cap \Theta_j = \phi$, $\Theta = \bigcup_{i=1}^n \Theta_i$, 上の各の値 $\xi(\Theta_i)$, $i=1, \dots, n$, が知られている。このとき平均損失の代りに $\sum_{i=1}^n (\sup_{\theta \in \Theta_i} I(\theta, \varphi)) \xi(\Theta_i)$ を考えて、これを平均最大損失という。 Λ の部分 σ 体 Γ に対する平均最大損失は上記の有限 Γ 可測分割に対する平均最大損失の下限と定義し、

$I(\xi, \Gamma, \varphi)$ であらわす $I(\xi, \Gamma, \varphi)$ が最小になる φ^* が存在するとき、 φ^* を (Γ, ξ) 最適方式という。 $\Gamma = \Lambda$ であるときは、 (Λ, ξ) 最適方式は ξ に対するベイズ解である。もし Γ が空集合 ϕ と Θ だけからなる σ 体であるなら、 (Γ, ξ) 最適方式をミニマックス解(または方式)と

いう。ミニマックス解は ξ に関係しない。 $\inf_{\varphi \in D} I(\xi, \Gamma, \varphi) = \inf_{\varphi \in D} I(\xi, \Lambda, \varphi)$ であるとき、 Γ は ξ 十分であるといわれ、すべての $\xi \in \Xi$ に対して ξ 十分な σ 体は十分であるといわれる。以下の議論のために、部分 σ 体の誘導性を定義しておく。ある集合 M の部分集合の σ 体 $\mathcal{K}$ の部分 σ 体 $\mathcal{H}$ が、それに対して M 上の関数 f が存在し(その値域を M_1 とする)、 $\mathcal{H} = f^{-1}(\{E \subset M_1 : f^{-1}(E) \in \mathcal{K}\})$ 、かつ M_1 の1点集合はすべて逆像が $\mathcal{K}$ に属す、ようなものであるとき、 $\mathcal{H}$ を誘導 σ 体という。以下において Γ は Λ の誘導部分 σ 体であるとする。

定理7. 1. [12]. Γ が ξ 十分で、 φ^0 が (Γ, ξ) 最適なら、 $I(\theta, \varphi^0)$ は ξ a.e. で Γ 可測で、 φ^0 は ξ に対するベイズ解であり、逆に $I(\theta, \varphi^0)$ が Γ 可測で、 φ^0 が ξ に対するベイズ解であれば、 Γ は ξ 十分で、 φ^0 は (Γ, ξ) 最適である。

定理7. 2 [12]. Γ が十分 σ 体であるなら、 ξ に対するベイズ解 φ^0 の危険関数 $r(\theta, \varphi^0)$ は Γ 可測である。

D が下半凸で性値(W)をもつとき、任意の ξ 、 Γ に対して (Γ, ξ) 最適方式が $B[\Xi, J]^* \cap W[\Xi, J]$ に属すること、 Ξ をパラメータ空間、 $I(\xi, \Gamma, \varphi)$ を φ の危険関数と考えて下半凸で性値(W)をもつこと、が予想される。事実ミニマックス方式は $B[\Xi, J]^* \cap W[\Xi, J]$ に属し(Wald [24])、また次の定理がなりたつ。有限分割 $\{\Theta_i\}_{i=1, \dots, n}$ に対して、 $\bar{I}(\theta, \varphi) =$

$\sup_{\theta \in \Theta_i} I(\theta, \varphi)$ if $\theta \in \Theta_i, i=1, \dots, n$, とおくと、

定理7. 3. D が危険関数 $I(\theta, \varphi)$ について下半凸、性値(W)をもつなら、 $\bar{I}(\theta, \varphi)$ についても下半凸で性値(W)をもつ。

証明. $0 \leq \alpha \leq 1$ とすると, $\alpha \sup_{\theta \in \Theta} I(\theta, \varphi_1) + (1-\alpha) \sup_{\theta \in \Theta} I(\theta, \varphi_2) \geq I(\theta, \varphi_2) \geq \sup_{\theta \in \Theta} \{ \alpha I(\theta, \varphi_1) + (1-\alpha) I(\theta, \varphi_2) \} \geq \sup_{\theta \in \Theta} I(\theta, \varphi_3)$ より下半凸がわかる. $\{ \sup_{\theta \in \Theta} I(\theta, \varphi) : \varphi \in D \}$ の集積点は $R(D)$ のある集積点 $f(\theta) = \sup_{\theta \in \Theta} f(\theta)$ としてあらわされるから, $I(\theta, \varphi^*) \leq f(\theta)$ なる $\varphi^* \in D$ をとれば, それは与えられた集積点より下にある.

この定理より危険関数を $I(\theta, I, \varphi)$ として, 同じような理論が展開されるものと予想される.

8. 決定方式の範囲 D の制限.

I. 危険関数による制限. 危険関数が有限個 $I_1(\theta, \varphi), \dots, I_n(\theta, \varphi)$ 考えられる場合にも, $\Theta_i = \Theta$ として, $U = \bigcup_{i=1}^n \Theta_i$ をパラメータ空間, $\bar{I}(\theta, \varphi) = I_i(\theta, \varphi)$ かつ $\theta \in \Theta_i, i=1, \dots, n$, と考えることによつて, 危険関数が1つ $\bar{I}(\theta, \varphi), \theta \in U = \bigcup_{i=1}^n \Theta_i$, の場合に還元できることはすで述べた. このうちでは特に n 個のうちいくつかの危険関数があらかじめ与えられている定数でおさえられるような決定方式の全体を D として, その中から他の危険関数を良さの基準とする方法で, 決定方式を選択することが論ぜられる. しかし証明などの裏で殆んど同じなので, 特に $n=2$ とし, $I_1(\theta, \varphi) \leq I_2$ となる φ の全体 D の中から, $I_1(\theta, \varphi)$ に関するベイズ解とか, 許容方式, ミニマックス方式などを求めることを考えよう.

定理 8. 1 (Hodges-Lehmann [7], Blyth [5]). ξ_1, ξ_2 を Θ 上の先験分布, α_1, α_2 を正数とし, $\bar{I}(\varphi) = \alpha_1 I_1(\xi_1, \varphi) +$

$\alpha_2 I_2(\xi_2, \varphi)$ とおく. φ^0 は $\bar{I}(\varphi^0) = \min_{\varphi \in D} \bar{I}(\varphi)$ とする.
 もし φ^0 が, $\sup_{\theta \in \Theta} I_1(\theta, \varphi^0) \leq R$ をみたすならば, $\{\varphi: I_1(\theta, \varphi) \leq R \text{ for all } \theta \in \Theta\}$ の中で, $I_2(\theta, \varphi)$ に関して, ξ_2 に対するベイズ解がある.

定理 8. 2. φ^0 は定理 8. 1 で与えられたものとする. もし $I_i(\xi_i, \varphi^0) = \max_{\theta \in \Theta} I_i(\theta, \varphi^0)$, $i=1, 2$, をみたし $R = \max_{\theta \in \Theta} I_1(\theta, \varphi^0) < \infty$ であるならば, φ^0 は, $D = \{\varphi: I_1(\theta, \varphi) \leq R\}$ の中で, ミニマックスである($I_2(\theta, \varphi)$ を危険関数として).

証明. $\alpha_1 \sup_{\theta \in \Theta} I_1(\theta, \varphi^0) + \alpha_2 \sup_{\theta \in \Theta} I_2(\theta, \varphi^0) = \bar{I}(\varphi^0) \leq \bar{I}(\varphi) \leq \alpha_1 \sup_{\theta \in \Theta} I_1(\theta, \varphi) + \alpha_2 \sup_{\theta \in \Theta} I_2(\theta, \varphi)$ であるから, $\varphi \in D$ なら $\sup_{\theta \in \Theta} I_2(\theta, \varphi^0) \leq \sup_{\theta \in \Theta} I_2(\theta, \varphi)$ がなりたつ.

次の 2 つの定理 8. 3, 8. 4 では $\bar{I}(\theta, \varphi) = \alpha_1 I_1(\theta, \varphi) + \alpha_2 I_2(\theta, \varphi)$ とおく.

定理 8. 3. φ^0 は $\bar{I}(\theta, \varphi)$ を危険関数としてミニマックスであるとする. もし $\sup_{\theta \in \Theta} \bar{I}(\theta, \varphi^0) = \{\sup_{\theta \in \Theta} I_1(\theta, \varphi^0) + \alpha_2 \sup_{\theta \in \Theta} I_2(\theta, \varphi^0)\}$ がなりたち, $\sup_{\theta \in \Theta} I_1(\theta, \varphi^0) \leq R$ がなりたつならば, φ^0 は $D = \{\varphi: I_1(\theta, \varphi) \leq R\}$ の中で, $I_2(\theta, \varphi)$ につれてミニマックスである.

定理 8. 4. φ^0 が $\bar{I}(\theta, \varphi)$ を危険関数として許容解であるならば, もし $I_1(\theta, \varphi^0) \leq R$ であるならば, φ^0 は $D = \{\varphi: I_1(\theta, \varphi) \leq R\}$ の中で許容解である(I_2 を危険関数として).

この 2 つの定理の証明はきわめてやさしいので省略する.

II. 統計量に基づく決定方式の類. 標本空間 $\mathcal{X}$ で定義されている関数(値域 $\mathcal{Y}$) $T(x)$ を 統計量 という. $\mathcal{E}$ の部分 σ 代数 $T^{-1}\{E \subset \mathcal{Y}: T^{-1}(E)$

$\in \mathcal{B}$ を T によつて誘導された σ 代数という。(§7 の誘導代数の定義参照). $\mathcal{B}$ の T によつて誘導された部分 σ 代数を $\mathcal{B}^T$ であらわす. どんな部分 σ 代数も誘導されるとは限らない (Bahadur [2] をみよ). 決定方式 $\hat{\varphi}(A; x)$ は x の関数として, $\mathcal{B}$ 可測であるが, もしこれが $\mathcal{B}^T$ 可測であるとき, 統計量 T に基づく決定方式という. さて P の任意の元 μ_0 の $\mathcal{B}^T$ による条件付確率が x の関数として, P の元に関係のないある $\mathcal{B}^T$ 可測関数 $g(\cdot; x)$ に P a.e. (P の任意の元について a.e.) で等しいとき, T を 十分統計量という. 危険関数 $I(\theta, \varphi)$ が線形構造をもつとし, Φ の中で T にもとづく決定方式の全体を Φ^T とかくことにする.

定理 8. 5 (Le Cam [17]). P が支配されているならば, 統計量 T が十分であるための必+条件は, どんな決定の空間 S と損失関数 $L(\theta, t)$ をもつ統計問題に対しても, Φ^T が Φ の中で本質的完全類であることである.

この結果については Bahadur [1], 工藤 [9] も関連する. Kolmogoroff は十分統計量を次のように定義した (Dynkin [6] 参照). 任意の先験分布 ξ による事後確率 η_ξ が $\mathcal{B}^T$ 可測であるとき, T は十分統計量である. この定義ははじめの定義と一致すること [3], §7 のパラメータ空間 Θ における十分 σ 体 とも関係すること [12] が示めされる.

Ⅲ. 非確率化決定方式の類. §1 で定義された非確率化決定方式は確率化決定方式より決定に到る手続きが簡単であるので, できればその方を採用する方がよい. それで, 非確率化決定方式の類が本質的完全であることが望ましい. これについて少し準備をする. Θ の部分集合 Q が与えられているものとする. 決定の空間 S は 2 点 $\{0, 1\}$ からなり, 損失関数は

$L(\theta, 0) = 1$ if $\theta \in Q$, $= 0$ if $\theta \notin Q$, $L(\theta, 1) = 0$ if $\theta \in Q$, $= 1$ if $\theta \notin Q$, であるとする. このような統計問題は仮説検定問題といわれるが, これに対する決定方式 φ は, $\varphi(\{ \theta \}; x) = \varphi(x)$ とおくことにより, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ の値をとる $\mathcal{B}$ 可測関数 φ であると考えられる. このような仮説問題では $\mathcal{B}$ が $\mathcal{P}$ により非原子的 ($\mathcal{B}$ のどの元 B も, $\mu(B) \geq k > 0$ なる任意の実数 k に対して, $B^* \subset B$ かつ $\mu(B^*) = k$ となる部分集合 B^* をふくむ. ただし μ は $\mathcal{P}$ の任意の元) であれば, 非確率化方式 (ある $\mathcal{B}$ 可測集合の特徴関数となる φ) の全体が本質的完全類であると予想される. 次の例として, $S = R^m$ とする. 損失関数 $L(\theta, t)$ は, どんな θ をとめても, t の凸連続関数であるとする. このとき統計問題を凸損失推定問題ということにすると

定理 8. 6 (Blackwell - Girshick [4]). 凸損失推定問題では損失関数 $L(\theta, t)$ が, $\|t\| \rightarrow \infty$ なら $L(\theta, t) \rightarrow \infty$, を満足すれば, 非確率化決定方式の類 Φ^* が Φ の中で本質的完全類である.

IV. 不変決定関数の類. ミニマックス性が最も関係のある問題は不変統計問題である. 標本空間 $\mathcal{X}$ の上に $\mathcal{B}$ 可測変換 g の群 G が定義されていて, $\mu \in \mathcal{P}$ なら $\bar{g}\mu(E) = \mu(g^{-1}E)$, $E \in \mathcal{B}$, がまた $\mathcal{P}$ に属しているものとする. さらに決定の空間 S にも連続変換 $\tilde{g}$ の群 $\tilde{G}$ が定義されていて, G から $\tilde{G}$ 上への準同型対応 $g \rightarrow \tilde{g}$ があるものとする. もし損失関数 $L(\mu, t)$ が $L(\bar{g}\mu, \tilde{g}t) = L(\mu, t)$ を満足するとき, 統計問題 $(\mathcal{X}, \mathcal{P}, S, \Phi, L)$ は不変であるという. 以下において, G は局所コンパクト可分な位相群であつて, 右不変ハール測度 λ が次の条件を満たすものとする: G の任意

のコンパクト部分集合 J と任意の正数 ε に対して, $\lambda(K) > 0$,
 $\lambda(K)/\lambda(K \cdot J^{-1}) > 1 - \varepsilon$ となるコンパクト部分集合 K が対応す
 る. この条件をみたす位相群の例として, (1) 整数群, (2) 有限群,
 (3) 実数群, (4) ユニタリ群, (5) 局所コンパクト連結なアーベル
 群, (6) 上の条件をみたす二つの部分群 G_1 と G_2 をもち, G_1 が
 正規部分群であり, $G_1 \cap G_2 = \{e\}$, $G = G_1 \cdot G_2$ となる群 G , (7)
 正則な実対称行列の群, などを上げることができる. 上の条件は後の定理
 8. 7 に必要な条件であるが, 同様な目的でいろいろな条件が述べられてい
 る. それらの条件の間の関係が Stone [29] で研究されている.

不変な統計問題において, $\varphi(\tilde{g}A:gx) = \varphi(A:x)$, P a.e., を満
 たす決定方式 φ が重要である. このような決定方式を 不変方式 という.
 不変方式の類を $\mathcal{I}_G$ であらわす. 不変な統計問題では不変方式が望ましい
 という原則がある (不変性の原則). 不変方式 φ に対しては $I(\bar{g}\mu, \varphi)$
 $= I(\mu, \varphi)$ がなりたつから, $\mathcal{P}$ を $\bar{G}$ によつて等質な部分に分割すること
 ができる. ここで $\mathcal{P}$ の部分 P が $\bar{G}$ で 等質 であるとは, 任意の $\mu_1, \mu_2 \in P$ に
 対して $g \in G$ が $\bar{g}\mu_2 = \mu_1$ となるようにきまることである. この等質な
 部分では危険関数の値は定数である. したがつて等質な部分への分割に相
 当する σ 体 Γ に対する 平均最大危険は, 不変方式に対しては危険関数
 そのものに等しい. このことから, 不変方式全体の類の中でのベイズ
 類, ワルド類, 完全類等に関する "良さ" の議論は平均最大危険に関して
 の良さの問題に関連する.

定理 8. 7 [8]. G が前に述べた条件をもち, $\mathcal{P}$ は $\bar{G}$ によつて等質で

とする。そのとき G 不変な統計問題のミニマックス解が Φ_I の中に存在する。このミニマックス解はワルド類に属する。

P が等質であれば、定理で述べられたミニマックス解は Φ_I のなかで最良な関数 (一番小さい) であるから、 Φ_I のなかで許容的である。しかし、このことは Φ の中で許容的であることを意味しない。これについては tein 等の研究があり、本誌石井吾郎氏の論を参照されたい。

P が等質でない場合については Wesler [25] の研究がある。

V. 不偏方式の類. Lehmann [18] による不偏方式の定義は次のようである。決定方式 φ が次の式を満たすとき、不偏な決定方式という：

$$r(\theta, \varphi) = \min_{\theta' \in \Theta} \int_{\mathcal{X}} \left[\int_S L(\theta', t) \varphi(dt; x) \right] \mu_{\theta}(dx), \text{ for all } \theta \in \Theta.$$

不偏方式の類を Φ_u であらわすとき、 Φ_u の中での許容性などが問題になる。不偏方式は古典的な不偏推定や不偏検定などとも関係があるが、まだ上記の Lehmann の定義が古典的な不偏性を完全にとらえているとはいえないようである。普通は Φ_u の中で最良なものが存在する場合が考察されているにすぎず、それ以外の場合の Φ_u の中での許容性や完全類などに関する考察は全くなされていない模様である。たゞ注意すべきことは、 Φ_u の中で最良なものが存在する場合でも、それが Φ の中で改良されることがしばしばあるということである。

VI. 逐次決定方式の類. Wald [24] および LeCam [16] は逐次決定方式を、決定関数の理論の立場から、定式化して、その類に位相を定義した。このことはくわしく述べる余裕がないので、それは省略する。し

しかしこれらの方法によると決定方式の定義自体も1で述べたものより複雑であり、その類の位相ももつとちがつたものである。しかし定式化の方法を違えると、も1で定義した決定方式の特別なものとなり、その類の位相もも4で定義したものがそのまま応用されうるようである。その場合逐次方式特有の損失関数である“費用関数”も特別にあつかわれる必要はなく、定理5.4の条件に相当する条件を仮定すればよいことがわかる。このような条件はWaldもLeCamも費用関数の条件として仮定していることに注意されたい。以上に述べたことは或種の見通しであつて、未だ完全な研究はなされていない。

REFERENCES

- [1] Bahadur, R.R.: Sufficiency and statistical decision functions, Ann. Math. Statist. 25 (1954), 423-462.
- [2] ———, Two comments on "sufficiency and statistical decision functions", ibid. 26 (1955), 136-142.
- [3] Barankin, E.W. and Kudō, H.: A general theorem on sufficiency, mimeographed note. 1966.
- [4] Blackwell, D. and Girshick, M.A.: Theory of games and statistical decisions, John Wiley & Sons, New York, 1954.
- [5] Blyth, Colin R.: On minimax statistical decision procedures and admissibility, Ann. Math. Statist. 22 (1951), 22-42.
- [6] Dynkin, E.B.: Necessary and sufficient statistics for a family of probability distributions, Selected Transl. of Math. Statist. and Probabl. 1 (1951), 17-40.
- [7] Hodges, J.L. Jr. and Lehmann, E.L.: The use of previous experience in reaching statistical decisions, Ann. Math. Statist. 23 (1952), 396-407.
- [8] Kudō, H.: on minimax invariant estimates of the transformation parameter, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 6 (1955), 31-73.

- 9 工藤弘吉：統計量の充足性と完備性について，
数学 8, (1957), 129-138.
- 10 Kudō, H.: Locally complete class of tests, Bull. Inst. Internat. Statist. 38 (1961), 173-180.
- 11 ———: On the property (W) of the class of statistical decision functions, Ann. Math. Statist. 37 (1966), 1631-1642.
- 12 ———: On partial prior information and the property of parametric sufficiency, Proc. 5th Berkeley Symp., (1966). (in preparation)
- 13 ———: Bayes class and Wald class, Nagoya Journ. Math., (1967). (in preparation)
- 14 Kusama, T.: On classes of Bayes solutions, Ann. Inst. Statist. Math., 18 (1966), 1-11.
- 15 LeCam, L.: Notes for 258 (April 1962). mimeographed note.
- 16 ———: An extension of Wald's theory of statistical decision functions, Ann. Math. Statist. 26 (1955), 69-81.
- 17 ———: Sufficiency and approximate sufficiency, ibid. 35 (1964), 1419-1455.
- 18 Lehmann, E.L.: A general concept of unbiasedness, ibid. 22 (1951), 587-592.
- 19 Sacks, J.: Generalized Bayes solutions in estimation problems, ibid. 34 (1963), 751-768.
- 20 Stein, C.: A necessary and sufficient condition for admissibility, ibid. 26 (1955), 518-522.
- 21 Stone, M.: On statistically inspired conditions for the group structure of invariant experiments. mimeographed note, 1966.
- 22 竹内啓：統計的推定論II, 数学 16 (1965), 139-149.
- 23 Wald, A.: Contributions to the theory of statistical estimation and testing hypotheses, Ann. Math. Statist. 10 (1939), 299-326.
- 24 ———: Statistical decision functions, New York, 1950.
- 25 Wesler, O.: Invariance theory and a modified minimax principle, Ann. Math. Statist. 30 (1959), 1-20.

