

Balanced design に関連した balanced array について

広 大 理 白 倉 暉 弘

§1. 序

山本, 白倉, 栗田[6], [7] は分解能 $2l+1$ の fractional 2^m factorial design (2^m -部実施計画) において, その design が balanced design であることは処理組合せの作る $(0,1)$ 行列 $T(m \times N)$ が強さ $2l$, 大きき N , 制約数 m , index set $\{\mu_0^{2l}, \mu_1^{2l}, \dots, \mu_{2^m-1}^{2l}\}$ の balanced array (B-array) であることと同値であることを示し, さらに最適性を議論する上に必要な balanced design の情報行列の固有多項式を求めた。

balanced design は fractional design の重要な subclass として Chakravarti[1] によって導入され, 分解能 5 ($l=2$) の場合には Srinastana[2], Srinastana, Chopra [4][5] 等によって色々研究されている。ここでは前回[8]の続きといった感じで組合せに関係がある B-array について述べる。

[定義] $(0,1)$ 行列 $T(m \times N)$ において, T の任意の t 個の

行からなる subarray T_0 ($t \times N$) の列に, weight i ($i=0, 1, \dots, t$) のベクトルが各々 μ_i^t 回現われるとき, T は強さ t , 大きさ N , 制約数 m , index set $\{\mu_0^t, \mu_1^t, \dots, \mu_t^t\}$ の balanced array という。

明らかに $N = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} \mu_i^t$ であり, 特に $\mu_0^t = \mu_1^t = \dots = \mu_t^t$ の時, T は orthogonal array と呼ばれ, 又 T の列ベクトルの weight が一定かつ $\mu_i^t > 0$ のとき T は t -design と呼ばれる。

記号として, T の列において, $\chi_i^{(m)}$ を weight i ($i=0, 1, \dots, m$) のベクトルの回数, 又 $\tau^{(m)}(i_1, i_2, \dots, i_k)$ を $i_1, i_2, \dots, i_k$ 番目に 1, その他は 0 となるベクトルの回数とする。特に, $(0, 0, \dots, 0)$ ベクトルの回数を $\tau^{(m)}(\phi)$ とする。

§ 2. Srivastava による諸定理

便宜のために, 前回[8]にも紹介した Srivastava [3] が与えた定理を簡単に説明する。

[定理 2.1] 強さ t , 制約数 $m=t+1$, index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ の B-array T が存在するための必要十分条件は

$$(2.1) \quad \begin{aligned} d &\geq \psi_{11} = \max_{0 \leq 2r-1 \leq t} \left\{ 0, \sum_{g=0}^{2r-1} (-1)^{2r+g-1} \mu_g^t \right\} \\ d &\leq \psi_{12} = \min_{0 \leq 2r \leq t} \left\{ \sum_{g=0}^{2r} (-1)^{2r+g} \mu_g^t \right\} \end{aligned}$$

を満たす整数 d が存在することである。もし (2.1) が満たされるならば, 構成として

$$(2.2) \quad \tau^{(t+1)}(i_1, i_2, \dots, i_k) = \sum_{g=1}^k (-1)^{k+g} \mu_{g-1}^t + (-1)^k d; 1 \leq k \leq t+1$$

$$\tau^{(t+1)}(\phi) = d$$

とすればよい。

[定理 2.2] 強さ t , 制約数 $m = t+2$, index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ の B-array T が存在するための必要十分条件は

$$(2.3) \quad \psi_{12} \geq d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_{t+2} \geq \psi_{11}$$

$$d_0 \geq \psi_{21} = \max_{2 \leq 2r \leq t+2} \left\{ 0, \sum_{i=1}^{2r} d_i + \sum_{g=1}^{2r-1} (-1)^g \mu_{g-1}^t \right\}$$

$$d_0 \leq \psi_{22} = \min_{2 \leq 2r \leq t+1} \left\{ d_{t+2}, \sum_{i=0}^{2r} d_{t+2-i} + \sum_{g=1}^{2r} (-1)^g (2r+1-g) \mu_{g-1}^t \right\}$$

を満たす整数 $d_0, d_1, \dots, d_{t+2}$ が存在する $\Leftrightarrow$ である。もし (2.3) が満たされるならば, 構成として

$$(2.4) \quad \tau^{(t+2)}(i_1, \dots, i_k) = \sum_{g=1}^{k-1} (-1)^{k-1+g} (k-g) \mu_{g-1}^t + (-1)^{k+1} \sum_{a=1}^k d_{i_a} + (-1)^k d_0; 2 \leq k \leq t+2$$

$$\tau^{(t+2)}(i_1) = d_{i_1} - d_0$$

$$\tau^{(t+2)}(\phi) = d_0$$

とすればよい。

[定理 2.3] 強さ t , 制約数 m , index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ の B-array T が存在するための必要条件は

$$(2.5) \quad \sum_{g=0}^m \binom{g}{j} \binom{m-g}{t-j} \alpha_g^{(m)} = \binom{m}{t} \binom{t}{j} \mu_j^t; j = 0, 1, \dots, t$$

§ 3. Simple balanced array

[定義] 制約数 m の balanced array T において, $\tau^{(m)}(i_1, i_2, \dots, i_k)$ が 1 が現われる位置に関係なく, 1 が現われる回

数に関係するとき, T は simple balanced array という。

balanced design に関連して B-array を考えるとき, 強さ $2l$, index set $\{\mu_0^{2l}, \dots, \mu_{2l}^{2l}\}$ をもつ simple B-array が存在するならば, 同じ index set をもつ一般の B-array はかならずしも必要としない。そのため構造の簡単な simple B-array は非常に有用である。

定理 2.1 から明らかに下記の補題をもつ

[補題 3.1] 強さ t , 制約数 $m = t+1$ である B-array はいつも simple B-array である。又その array は強さ $t+1$, index $\mu_k^{t+1} = \tau^{(t+1)}(i_1, i_2, \dots, i_k)$ ($k = 0, 1, \dots, t+1$) の simple B-array である。

[定理 3.1] 強さ t , 制約数 m , index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ の simple B-array T が存在するための必要十分条件は, $l = t, t+1, \dots, m-1$ に対して

$$(3.1) \quad \begin{aligned} d^{l+1} &\geq \psi_1^{(l)} = \max_{0 \leq 2r-1 \leq l} \left\{ 0, \sum_{g=0}^{2r-1} (-1)^{2r-1+g} \mu_g^l \right\} \\ d^{l+1} &\leq \psi_2^{(l)} = \min_{0 \leq 2r \leq l} \left\{ \sum_{g=0}^{2r} (-1)^{2r+g} \mu_g^l \right\} \end{aligned}$$

を満たす整数 $d^{t+1}, d^{t+2}, \dots, d^m$ が存在することである。ただし

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mu_0^{l+1} &= d^{l+1} \\ \mu_k^{l+1} &= \sum_{g=1}^k (-1)^{k+g} \mu_{g-1}^l + (-1)^k d^{l+1}; \quad 1 \leq k \leq l+1 \end{aligned}$$

証明 T_l ($l = t, t+1, \dots, m-1$) を T の l 組の行からなる sub-array とする。もし T が simple B-array ならば T_{l+1} は

同時に強さ $l, l+1$ の simple B-array で, 定理 2.1, 補題 3.1 より, これらの index set $\{\mu_0^l, \dots, \mu_l^l\}, \{\mu_0^{l+1}, \dots, \mu_{l+1}^{l+1}\}$ の間の関係は (3.2) で与えられる。よって (3.1) を満たす整数 $d^{l+1}, \dots, d^m$ を順次に求めることが出来る。逆に (3.1) を満たす整数 $d^{l+1}, \dots, d^m$ が存在するならば, この時明らかに定理 2.1, 補題 3.1 より, 順次に強さ t , index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ をもつ simple B-array $T_{t+1}, T_{t+2}, \dots, T_m$ を構成することが出来る。

[定理 3.2] 強さ t , 制約数 $m=t+2$, index set $\{\mu_0^t, \dots, \mu_t^t\}$ の B-array が non-simple B-array であるための必要条件是 $1 \leq g \leq m-1$ となるすべての g に対し

$$\alpha_g^{(m)} \neq 0$$

となることである。

証明 $1 \leq g \leq m-1$ となるある g に対して $\alpha_g^{(m)} = 0$ とすると, 定理 2.2 より, すべての $1 \leq i_1, \dots, i_g \leq m$ に対して

$$\tau^{(m)}(i_1, \dots, i_g) = 0$$

$$\therefore \sum_{\alpha=1}^g d_{i_\alpha} = -定$$

$$\therefore d_1 = d_2 = \dots = d_m$$

故に, $\tau^{(m)}(i_1, \dots, i_k)$ は k のみに関係する。よって non-simple であることは反する。

例。つぎの array は $t=3, m=5$, index set $\{1, 2, 2, 1\}$ の non-simple B-array T である。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(5')} = x_4^{(5')} = 1$$

$$x_2^{(5')} = x_3^{(5')} = 6$$

§4. $t=6, m=8$ の balanced array について

この節では, $t=6, m=8$ についての B-array を具体的に構成するために B-array T の列ベクトルで $(0, 0, \dots, 0), (1, 1, \dots, 1)$ を除いた array を考え, さらに分解能 7 の balanced fractional 2^8 factorial design に関連して, つぎの条件を満す array を考える.

(i) $\mu_3^6 \neq 0$

(ii) $91 \leq N < 128$

(iii) T の異なる列ベクトルの個数が 91 以上

以下, 簡単のために, $\mu_i^t = \mu_i, x_j^{(m)} = x_j$ とする。(2.5) 式より

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 7x_1 + x_2 &= 28\mu_0 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 &= 56\mu_1 \\ 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 140\mu_2 \\ 5x_3 + 8x_4 + 5x_5 &= 280\mu_3 \\ 2x_4 + 5x_5 + 5x_6 &= 140\mu_4 \\ x_5 + 4x_6 + 7x_7 &= 56\mu_5 \\ x_6 + 7x_7 &= 28\mu_6 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & x_1 + x_7 = 8(-\mu_3 + \nu_2 - \nu_1 + \nu_0) \\
 & x_2 + x_6 = 28(2\mu_3 - 2\nu_2 + 2\nu_1 - \nu_0) \\
 & x_3 + x_5 = 56(-3\mu_3 + 3\nu_2 - 2\nu_1 + \nu_0) \\
 & x_4 = 35(4\mu_3 - 3\nu_2 + 2\nu_1 - \nu_0)
 \end{aligned}$$

$$\text{F.T.1, } \nu_0 = \mu_0 + \mu_6, \nu_1 = \mu_1 + \mu_5, \nu_2 = \mu_2 + \mu_4$$

よ, て, つぎの定理をもつ

[定理4.1] index set $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_6\}$ の B-array が存在する
ための必要条件は

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad & (a) \quad -\mu_3 + \nu_2 - \nu_1 + \nu_0 \geq 0 \\
 & (b) \quad 2\mu_3 - 2\nu_2 + 2\nu_1 - \nu_0 \geq 0 \\
 & (c) \quad -3\mu_3 + 3\nu_2 - 2\nu_1 + \nu_0 \geq 0 \\
 & (d) \quad 4\mu_3 - 3\nu_2 + 2\nu_1 - \nu_0 \geq 0
 \end{aligned}$$

を満すことである。

[定理4.2] index set $\{\mu_0, \dots, \mu_6\}$ の B-array が存在する
ための必要条件は, $7 \leq \alpha, 0 \leq \beta \leq 40, 0 \leq \gamma \leq 7$ に対し

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad & \max \{ (28 - \alpha)\nu_2 + (\alpha + 7)\mu_3, 8\nu_1 + 35\mu_3, (2\beta - 84)\nu_0 + (56 - \beta)\nu_1 \} \\
 & \leq N \leq \min \{ 28\nu_0 + 56\mu_3, (21 - \gamma)\nu_1 + (35 + \gamma)\mu_3 \}
 \end{aligned}$$

を満すことである。F.T.1 $N = \nu_0 + 6\nu_1 + 15\nu_2 + 20\mu_3$

証明 (4.3; b, c) より

$$\nu_0 + 15\nu_2 \geq 2\nu_1 + 15\mu_3$$

$$\therefore N \geq 8\nu_1 + 35\mu_3$$

(4.3; a, b, c) より $\alpha \geq 7$ かつ $\alpha \leq 13$

$$6v_1 + v_0 \geq (\alpha - 13)\mu_3 + (13 - \alpha)v_2$$

$$\therefore N \geq (28 - \alpha)v_2 + (\alpha + 7)\mu_3$$

(4.3; a, c, d) より $0 \leq \beta \leq 40$ かつ $\beta \leq 7$

$$20\mu_3 + 15v_2 \geq (50 - \beta)v_1 + (2\beta - 85)v_0$$

$$\therefore N \geq (2\beta - 84)v_0 + (56 - \beta)v_1$$

(4.3; a, d) より

$$15v_2 + 6v_1 \leq 27v_0 + 36\mu_3$$

$$\therefore N \leq 28v_0 + 56\mu_3$$

(4.3; a, b, d) より $0 \leq \gamma \leq 7$ かつ $\gamma \leq 7$

$$15v_2 + v_0 \leq (15 - \gamma)v_1 + (15 + \gamma)\mu_3$$

$$\therefore N \leq (21 - \gamma)v_1 + (35 + \gamma)\mu_3$$

終り

定理 4.2 より 特 $\equiv$, $35\mu_3 \leq N$ かつ, 条件 (i), (ii) より

$$1 \leq \mu_3 \leq 3$$

(A) $\mu_3 = 1$ のとき

$$2 \leq v_2 \leq 5, \quad 4 \leq v_1 \leq 11, \quad \text{かつ}$$

$$3v_2 - 2v_1 + v_0 = 4 \quad (\text{i.e., } \alpha_4 = 0, \alpha_3 + \alpha_5 = 56)$$

でなければならぬ。なぜならば, 定理 4.2 より $v_2 \leq 5$,

$4 \leq v_1 \leq 11$ 。(4.3; c, d) より $0 \leq 4 - 3v_2 + 2v_1 - v_0 \leq 1$, $4 -$

$3v_2 + 2v_1 - v_0 = 1$ のとき, (4.2) より $\alpha_4 = 35, \alpha_3 + \alpha_5 = 0$,

定理 3.2 よりそのような B-analyt は存在しない。したがって

$3v_2 - 2v_1 + v_0 = 4$ であり, (4.3)より $v_2 \geq 2$ をえる。

結局 $\mu_3 = 1$ となる B -array は定理 3.2 よりすべて simple B -array である。又, $v_2 = 2$ は (4.2) より, $x_4 = 0, x_3 + x_5 = 56, x_2 + x_6 = 0$ となるため条件 (iii) を満たさない。

(B) $\mu_3 = 2$ のとき

定理 4.1, 4.2 より

$$(4.6) \quad \begin{aligned} &2 \leq v_2 \leq 4, \quad 1 \leq v_1 \leq 7 \quad \text{かつ} \\ &2v_2 - 4 \leq 2v_1 - v_0 \leq 3v_2 - 6 \end{aligned}$$

(4.6) を満たす (v_2, v_1, v_0) を (4.2) に代入して調べると,
 $(v_2, v_1, v_0) = (4, 4, 3)$ 以外は, すべて simple B -array であることがわかる (これ以外は $x_g = 0$ となる g ($1 \leq g \leq 7$) が存在)。又 $v_2 = 2$ は (4.2) より $x_4 = 70, x_3 + x_5 = 0, x_2 + x_6 = 0$ となるため条件 (iii) を満たさない。

(C) $\mu_3 = 3$ のとき

同様にして,

$$(4.7) \quad \begin{aligned} &3 \leq v_2 \leq 4, \quad 0 \leq v_1 \leq 2 \quad \text{かつ} \\ &2v_2 - 6 \leq 2v_1 - v_0 \leq 3v_2 - 9 \end{aligned}$$

(4.2) より (4.7) を満たす B -array はすべて simple B -array であつ条件 (iii) を満たす B -array は, 正に $(v_2, v_1, v_0) = (4, 1, 0)$ にかぎることがわかる。

以上よりつぎの定理をえる。

[定理 4.3] 条件 (i), (ii) を満たす B-array は $(\mu_3, \nu_2, \nu_1, \nu_0) = (2, 4, 4, 3)$ をのぞいて, すべて simple B-array である。

$(\mu_3, \nu_2, \nu_1, \nu_0) = (2, 4, 4, 3)$ について定理 2.2 より, つぎの index set をもつ non-simple B-array が, $T, \bar{T}$ 存在する。ここで $C(j; m)$ は weight j の異なる $(0, 1)$ ベクトルを $\binom{m}{j}$ 個すべて並べたできる $m \times \binom{m}{j}$ 行列である。

$$N=127 \quad \{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\} = \{2, 2, 2, 2, 2, 2, 1\}$$

$$T = \begin{bmatrix} 00 \cdots 0 & 11 \cdots 1 & 00 \cdots 0 & 11 \cdots 1 & 00 \cdots 0 & 11 \cdots 1 & 0 \\ C(1;7) & C(1;7) & C(3;7) & C(3;7) & C(5;7) & C(5;7) & \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{smallmatrix} \end{bmatrix}$$

条件 (i), (ii), (iii) を満たす B-array を (A), (B), (C) より求めた結果, つぎの index set に関する表を与える ($T, \bar{T}$ は $\mu_2 \geq \mu_4$)。

N	$\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6$	N	$\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6$	N	$\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6$
92	3 4 3 1 0 0 0	100	2 2 2 1 1 3 3	108	4 3 2 1 1 3 3
	1 3 3 1 0 1 2		0 1 2 1 1 4 5		2 2 2 1 1 4 5
	2 2 2 1 1 2 1	106	3 3 2 2 1 0 0		0 1 2 1 1 5 7
	0 1 2 1 1 3 3		1 2 2 2 1 1 2	112	1 3 3 1 1 2 1
98	1 1 2 2 1 0 0	108	7 6 3 1 0 0 0	114	5 4 2 2 1 0 0
100	5 5 3 1 0 0 0		5 5 3 1 0 1 2		3 3 2 2 1 1 2
	3 4 3 1 0 1 2		3 4 3 1 0 2 4		1 2 2 2 1 2 4
	1 3 3 1 0 2 4		1 3 3 1 0 3 6	116	9 7 3 1 0 0 0
	4 3 2 1 1 2 1		6 4 2 1 1 2 1		7 6 3 1 0 1 2

N	$\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6$	N	$\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6$	N	$\mu_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6$
116	5 5 3 / 0 2 4	120	4 5 2 / 2 1 0	124	10 6 2 / 1 2 1
	3 4 3 / 0 3 6		2 4 2 / 2 2 2		8 5 2 / 1 3 3
	1 3 3 / 0 4 8	122	7 5 2 2 / 0 0		6 4 2 / 1 4 5
	8 5 2 / 1 2 1		5 4 2 2 / 1 2		4 3 2 / 1 5 7
	6 4 2 / 1 3 3		3 3 2 2 / 2 4		2 2 2 / 1 6 9
	4 3 2 / 1 4 5		1 2 2 2 / 3 6		0 1 2 / 1 7 11
	2 2 2 / 1 5 7	124	11 8 3 / 0 0 0	126	2 4 3 2 / 0 0
	0 1 2 / 1 6 9		9 7 3 / 0 1 2		1 2 2 2 2 2 /
120	4 6 4 / 0 0 0		7 6 3 / 0 2 4		0 1 3 3 / 0 0
	2 5 4 / 0 1 2		5 5 3 / 0 3 6	127	2 2 2 2 2 2 /
	3 4 3 / 1 2 1		3 4 3 / 0 4 8		
	1 3 3 / 1 3 3		1 3 3 / 0 5 10		

References

- [1] Chakravarti, I.M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. *Sankyā* 17 143-164
- [2] Srivastava, J.N. (1970). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs. *S.N. Roy Memorial Volume*. Univ. of North Carolina and Indian Statistical Institute 689-706
- [3] Srivastava, J.N. (1972). Some general existence condition for balanced array of strength t and

- 2 symbols. *Jour. Comb. Th.*, 13 198~206
- [4] Srivastava, J.N., and Chopra, D. V. (1971).
Optimal balanced 2^m fractional factorial designs
 $m \leq 6$. *Technometrics*, Vol 13 No. 2 257~269
- [5] Srivastava, J.N., and Chopra, D. V. (1971).
On the characteristic roots of the information matrix
of 2^m balanced factorial designs of resolution V,
with applications. *Ann. Math. Statist.*, 42 722-734
- [6] Yamamoto, S., Shirakura, T., and Kuwada, M. (1973).
Characteristic polynomials of the information matrices
of balanced fractional 2^m factorial designs of
higher $(2l+1)$ resolution. Submitted to *Ann. Statist.*
- [7] Yamamoto, S., Shirakura, T., and Kuwada, M. (1974).
Balanced arrays of strength $2l$ and balanced
fractional 2^m factorial designs. Submitted to
Ann. Inst. Statist. Math.
- [8] 白倉, 桑田, 山本 (1973). Balanced 2^m Fractional
Factorial Design をめぐり, 1. 数理解析研究所講
究録 178. 群論と組合せ論 1~9