

Notes on 2-fold branched coverings

北大 理数 河野 正晴

このNoteでは、2-fold branched covering のいくつかの性質について述べる。§1では branch set のホモロジー的な性質、§2では surface の homeotopy group のある subgroup と branch set の関係について、である。最初に branched covering の定義を書く。

Def M, N を compact n -manifold とします。 A, B を M, N の proper な $(n-2)$ -submanifold とする。(A が M 上 proper とは $\partial A = A \cap \partial M$)

$f: (M, A) \longrightarrow (N, B)$ が branched covering であるとは、(i) N の open base の逆像の component 全体が M の base となる (ii) $f(A) = B$, $f(M-A) = N-B$ かつ $f|_{M-A}: M-A \longrightarrow N-B$ は普通の covering になっている。を満たす時 f にとする。

§1. branch set α ホモロジー的性質

$p: (M^3, \tilde{L}') \longrightarrow (N^3, L')$ を 2-fold branched covering とする。(ここで、2-fold という意味は $x \in N - L$ に対し $p^{-1}(x)$ が 2 個ということ) ただし、 M, N は closed 3-manifolds で $\tilde{L}, L$ はそれぞれ α links。 N 上の L で branch する 2-fold covering space をつくる時、ふつう N の中で L を bound する surface F をとり、 N を F で cut する。そして、その copy を 2 コ用意し、 F に対応する F_1, F_2 をはりあわせる。

この時 L はある surface を bound するということが仮定されているが、このことは正しいだろうか？ 次の定理は 2-fold branched covering の時は正しいということを示している。

Theorem 1

M, N を orientable closed 3-manifolds とし、 $\tilde{L}, L$ をそれぞれ α links とする。

$\exists p: (M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ 2-fold branched covering
 $\Rightarrow [L] = 0 \in H_1(N; \mathbb{Z}_2)$

(証明の概略)

$\tau: M \rightarrow M$ を non-trivial covering transformation とする
 τ, τ^2 の involution τ に対し characteristic mfd
 $\tilde{F}$ が存在する。 $\tau^2 = \text{id}$ 故に $\tilde{F}$ は closed 2-mfd $\tau^2 \cdot \tilde{L} \subset \tilde{F}$ 。
 よって $p(\tilde{F}) = F$ とすると、 F は 2-mfd (non-orientable
 かもしない) である $F = L$ となる。 よって α, β 。

又、高次元でも同様に次の定理が示される。

Theorem 2

M, N : closed $(n+2)$ -mfd

$\tilde{L}, L$ は closed n -submfd of M, N

$p: (M, \tilde{L}) \longrightarrow (N, L)$ 2-fold branched
 covering

L は N の locally flat な submfd

$\Rightarrow [L] = 0 \in H_n(N; \mathbb{Z}_2)$

更に、 M, N に boundary があっても次の定理が成り立つ。

Theorem 3

M, N を compact $(n+2)$ -mfd, $\tilde{L}, L$ をその
 proper な n -submfd とする。 (L は N の locally flat)

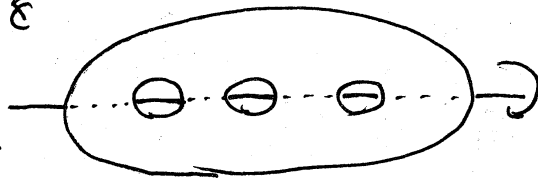
$p: (M, \tilde{L}) \rightarrow (N, L)$ 2-fold branched
covering
 $\Rightarrow [L] = 0 \in H_n(N, \partial N; \mathbb{Z}_2)$

Remark

1. Theorem 1, 2, 3 において係数を $\mathbb{Z}_2$ から $\mathbb{Z}$ にか
えると定理は成立しない。
2. 同じく、2-fold を一般 α branched covering に
すると (少なくとも irregular も許すと)、定理は成
立しない。

§2. 曲面の homeotopy group と branched covering

F を connected closed orientable surface で
genus が m のものを α とします。 $H(F)$ を F 上の orientation
preserving homeo. 全体として、 $H_0(F)$ を α ながで
id と isotopic なものの全体とする。 $H(F)$, $H_0(F)$ は写像 α
合成による群をなし、特に $H_0(F)$ は $H(F)$ の normal subgroup
をなす。 $H(F)$ の $H_0(F)$ による剰余群を $\pi(F)$ と書き F の
homeotopy group と呼ぶ。 F を
standard な位置 (Look $\Rightarrow$) に
おいた時 180° 回転の homeo. を T



と書く。 $H(F)$ から $mc(F) \wedge a$ 自然な準同型を φ を書く。
更に、 $\tilde{\Lambda}(F) \equiv \{ f \in H(F) \mid fT = Tf \}$, $\Lambda(F) \equiv \varphi(\tilde{\Lambda}(F))$
と置く。

(i) $F/\Gamma \cong S^2$ となるので、 $p: F \longrightarrow S^2$ " $cov(p) = \{1, T\}$
となる 2-fold branched covering が存在する。 $\hookrightarrow a$
branched covering a F a branch set を B , $\hookrightarrow a$ branch
set を $\tilde{B}$ とする。

$h \in \tilde{\Lambda}(F)$ に対し、 $g \in H(S^2)$ $F \xrightarrow{h} F$
が存在して、右の図式を可換にし、 g $p \downarrow$
は $g(B) = B$ をみたす。 h に対し $S^2 \xrightarrow{g} S^2$
この様な g は一意の。又逆に、 $g(B) = B$
をみたす $g \in H(S^2)$ に対し、右の図式

を可換にする $h \in H(F)$ は存在して、 $h \in \tilde{\Lambda}(F)$ となる。こ
の様な h は 2 個存在し、それを h, h' とすると $h' = Th$ とな
ってゐる。

(ii) $\tilde{H}(m)$ を S^2 の geometric $(2m+2)$ -braid 全体
とする。つまり、 geometric $(2m+2)$ -braid

$\{ b_1, \dots, b_{2m+2} \}$ とは次の様なもの。 $p_1, \dots, p_{2m+2}$ を S^2 にとり Γ fix

0) $h_i: I \longrightarrow S^2 \times I$ map

1) $b_i(t) \in S^2 \times \{t\}$ for $\forall t \in I, i=1, \dots, 2m+2$

2) $h_i(0) = (p_i, 0)$ とおくと、 $i=1, \dots, 2m+2$

$$\{b_1(1), \dots, b_{2m+2}(1)\} = \{c_{p_1,1}, \dots, c_{p_{2m+2},1}\}$$

(ただし set とし 2 の イ コー ル)

$$3) i \neq j \text{ の時 } b_i(t) \neq b_j(t) \quad \text{for } \forall t \in I$$

2. $\tilde{H}(m)$ に次ぐ様に同値関係をいれる。

$$(a) \{b_i(t), \dots, b_{2m+2}(t)\} \sim_\alpha \{b'_i(t), \dots, b'_{2m+2}(t)\}$$

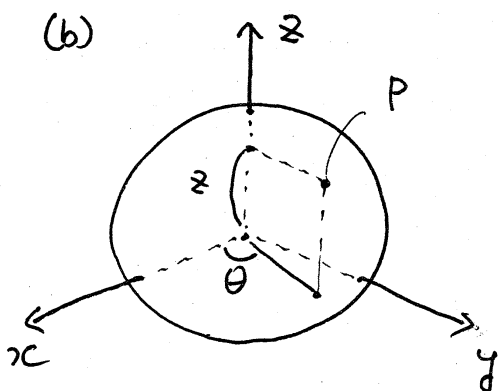
とは、 $\exists B_k: I \times I \longrightarrow M \times I \quad (k=1, \dots, 2m+2)$

$$\text{for } B_k|I \times \{0\} = b_k, \quad B_k|I \times \{1\} = b'_k$$

として、各 $t \in I$ に

$$\{B_1|I \times \{t\}, \dots, B_{2m+2}|I \times \{t\}\}$$

geometric $(2m+2)$ -braid になる、と定める。



$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$$

した時 p の z 座標を z , p を xy -平面へ射影した点と x 軸の

なす角を θ とし、 $p = (z, \theta)$

と表す。($z = \pm 1$ の時は

$\theta = 0$ と $\pm \pi$ とおく)

$$\tilde{R}_t: S^2 \longrightarrow S^2 \quad \text{を} \quad \tilde{R}_t(z, \theta) = (z, \theta + 2\pi t) \text{ と}$$

$$\text{定める。そして } R: S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$$

$$(a, t) \longmapsto (\tilde{R}_t(a), t)$$

$$\text{と定める。 } \{b_i, \dots, b_{2m+2}\} \sim_\beta \{b'_i, \dots, b'_{2m+2}\}$$

$$\text{とは } R(b_i(t)) = b'_i(t) \quad \text{for } \forall t \in I, i=1, \dots, 2m+2$$

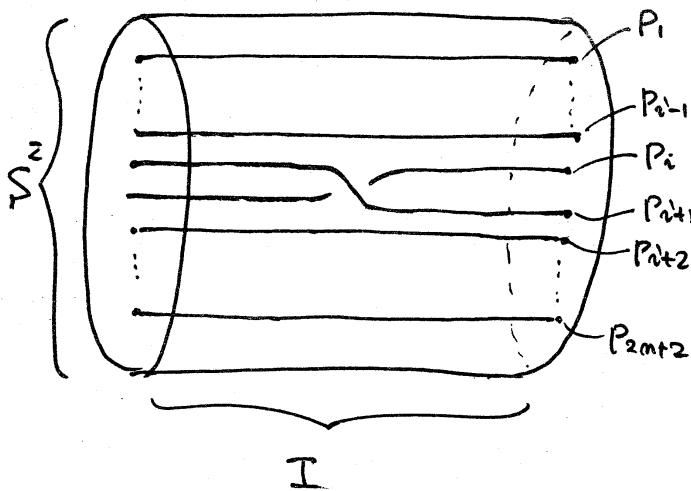
ときめる。そして $\sim_a$ と $\sim_b$ から generate される同値関係
を $\sim$ と書き、これを $\tilde{H}(m)$ を示す set を $H(m)$ と書く。

$\tilde{H}(m)$ の元は $S^2 \times I$ の link と見ることもできる。これを
 L とすると、 L が属する $H(m)$ の class を $[L]$ と書く。

さて、 $H(m)$ に積を定義する。 $\tau_1: S^2 \times I \rightarrow S^2 \times I$
を $\tau_1(a, t) = (a, \frac{t}{2})$, $\tau_2: S^2 \times I \rightarrow S^2 \times I$ を $\tau_2(a, t)$
 $= (a, \frac{1}{2} + \frac{t}{2})$ とする。 $[L], [L'] \in H(m)$

$$\tilde{L} = \tau_1(L) \cup \tau_2(L') \text{ とし}$$

$[\tilde{L}] = [L] \cdot [L']$ で積を定義する。この積は
well-def. であり、この積により $H(m)$ に群をなす。



左図のような link を
 L_i とすると $L_i \in \tilde{H}(m)$
なる L_i の $l_i = [L_i]$
とし $H(m)$ の元がき
まる。 $H(m)$ は $l_1,$
 $l_2, \dots, l_{2m+1}$ によ
り generate されるが、

この群は Magnus により決定された群と同型になる $\mathcal{Z}$,
次の様な表示をもつ

Theorem 4 [Magnus]

$H(m)$ は次の generator と relator で決定される。

• generators $l_1, \dots, l_{2m+1}$

• defining relations

$$(i) \quad [l_i, l_j] = 1 \quad \text{for } |i - j| \geq 2$$

$$(ii) \quad l_i l_{i+1} l_i = l_{i+1} l_i l_{i+1}$$

$$(iii) \quad (l_1 l_2 \dots l_{2m+1})^{2m+2} = 1$$

$$(iv) \quad l_1 l_2 \dots l_{2m} l_{2m+1}^2 l_{2m} \dots l_2 l_1 = 1$$

(iii) さて、(i)で定義した $\Lambda(F)$ と、(ii)で定義した $H(m)$ には次の様な関係がある。

Theorem 5

F を connected orientable closed surface of genus m とする。ここに $m > 1$ とすると、

$\varphi: \Lambda(F) \longrightarrow H(m)$ なる onto homo が存在して、
 $\ker \varphi = \{1, T\}$ となる。

(証明の概略)

φ は次の様にして定義する。 $f \in \Lambda(F)$ に対し、 $\hat{\Lambda}(F)$ の元 $\hat{f}$ で $\varphi(\hat{f}) = f$ となるものがある。(i)より、この $\hat{f}$ に対して $g \in H(S^2)$ が一意的に存在して、 $g p = p \hat{f}$ となる。

g は isotopic to id . だから、 $G: S^2 \times I \longrightarrow S^2$ を、
 $G_0 = \text{id}$, $G_1 = g$ とする isotopy が存在する。この G に対し、
 $\hat{G}: S^2 \times I \longrightarrow S^2 \times I$ を $\hat{G}(a, t) = (G_t(a), t)$ と

定める。 $L_0 = \bigcup_{i=1}^{2n+2} P_i \times I$ に対し, $L_f = \tilde{G}(L_0)$ とし,
 $[L_f] = l_f$ とし, $P(f) = l_f$ と定める。

= a map が well-def. になれば他の性質はすぐ出てくる。
 = a map が well-def. になるためには次のことが言え
 ければ O.K.。

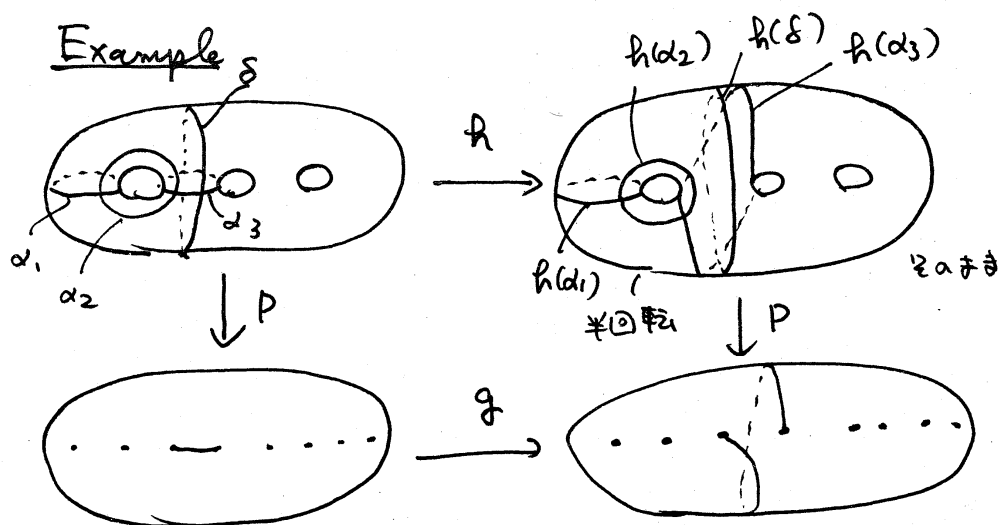
Lemma 1 [Birman]

$n > 1$ とし, F を connected closed orientable
 surface とする。 $f \in \hat{\Lambda}(F)$ に対して, f と id が
 $H(F)$ において同じ connected component にはいりば,
 $\hat{\Lambda}(F)$ においても同じ connected component にはいる。

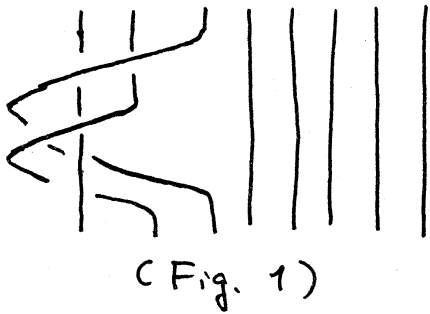
(証明は Look [BH])

よって定理は成り立つ。

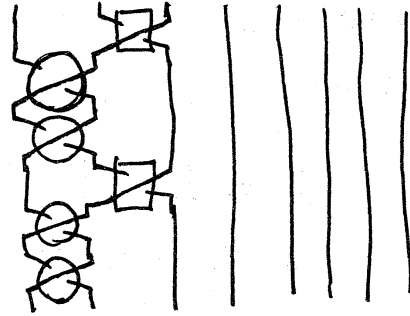
(iv) 上の結果を使って, $\Lambda(F)$ の元を Dehn twists の積で表
 示することができる。



δ のまわり a half twist を h とする。この時 $\rho(h) = [L_h]$ を見てやると、 $\rho(\delta)$ のまわり a twist に対応してゐる。 L_h は下の (Fig 1) つまり (Fig 2) の様になる

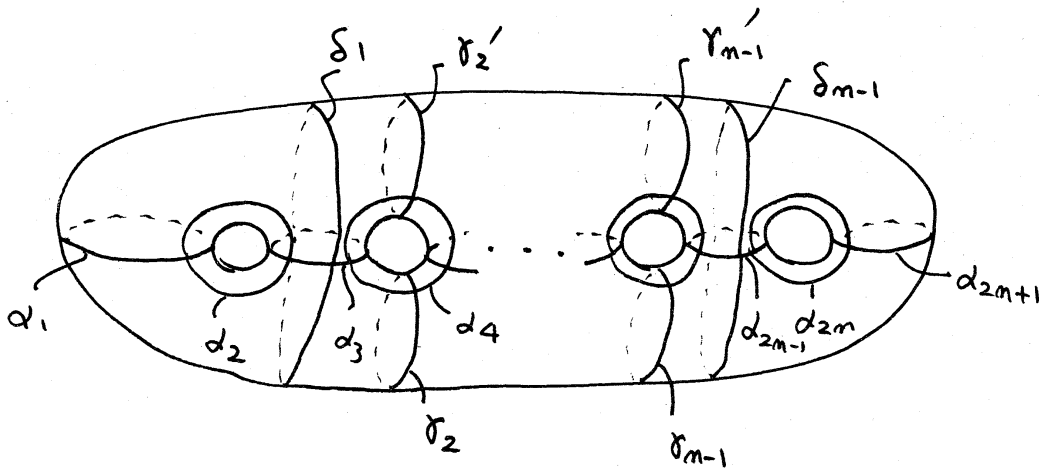


(Fig. 1)



(Fig 2)

ってゐる。 Q に対応する a は $\Lambda(F)$ において a_1 のまわり a Dehn twist a_1 , $\square$ に対応する a は a_2 のまわり a Dehn twist a_2 である。よって $\varphi(h) \equiv \varphi(a_1 a_2 a_1 a_2) \pmod{\langle 1, \tau \rangle}$ となる。実際に見てやると、 $\varphi(h) \equiv \varphi(a_1 a_1 a_2 a_2)$ となる。



一般に genus m a surface に対し、surface $F \pm a$ loop を上の様にきく。そして、 d_i のまわり a Dehn

twist を a_i , δ_i のまわり a Dehn twist を d_i , γ_i のまわり a Dehn twist と δ_i' のまわり a Dehn twist の積を C_i , δ_i のまわり a half twist を $\hat{d}_i$ とする。この時 $d_i = \hat{d}_i \cdot \tilde{d}_i$ となるが, Example と同じ様にやれば次のことがわかる。

Proposition 1

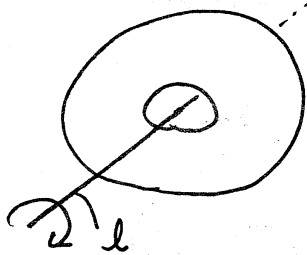
$$\hat{d}_i \cong a_1 \cdot a_1 a_2 a_1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 \cdot \dots \dots \dots$$

$$\dots \cdot a_1 a_2 \dots a_{2i} \dots a_1 \cdot a_1 a_2 \dots a_{2i}$$

$$C_i \cong a_1 \cdot a_1 a_2 a_1 \cdot a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 \cdot \dots \dots \dots$$

$$\dots \cdot a_1 a_2 \dots a_{2i-1} \dots a_1 \cdot a_1 a_2 \dots a_{2i-1}$$

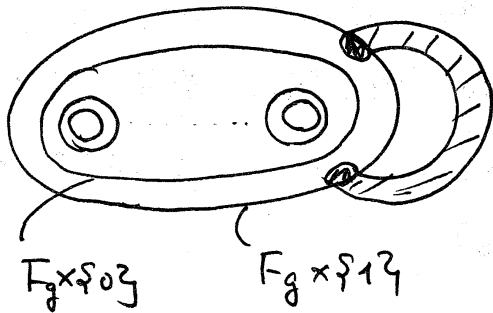
Remark



Theorem 5 が $n=1$ で成立しないのは, Lemma 1 が成立しないから。たとえば左の図で L 軸について 180° 回転させた homeo f は $H(T)$ では id と arc によって結べるが, $\hat{\Lambda}(F)$ では結べない。 $n>1$ の時はこの様なことがおこらない。

(*) 解析研で話した後に、横山さんから聞いたのですが、§2 の iii) までの様な内容は Birman がやっているとのこと。 (Look [B], [BH])

(V) 次に $\Lambda(F)$ と 3-mfd の 2-fold branched covering の関係について述べる。



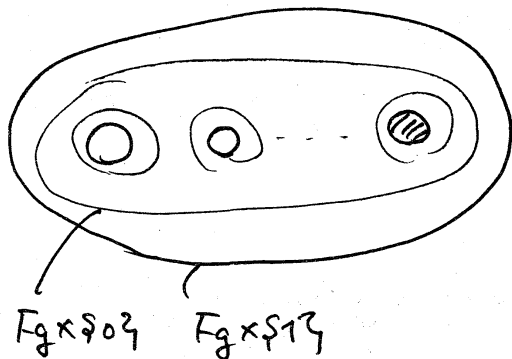
$(g, g+1)$ で左図の様な 3-mfd を表す。つまり

$$(g, g+1) = (F_g \times I) \cup (D^1 \times D^2)$$

ここで g は自然数 (0 も含む)

F_g は genus g の closed ori.

surface Σ , 1-handle $D^1 \times D^2$ は $F_g \times S^1_2$ にはりついて
いるとする。 I は unit interval



$$(g, g-1) = (F_g \times I) \cup (D^2 \times D^1)$$

g は自然数 (0 を含まない)

で 2-handle は $F_g \times S^1_2$

上の homotopically non-zero

a curve にはりついていて

とする。(ただし I につい

て invariant な curve とする)

(*) $(m_1, \dots, m_m; d_1, \dots, d_m)$ で次の様な
mfd を表す。ただし $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ で $|m_i - m_{i+1}|$
 $= 1$, $|m_1 - m_m| = 1$ $d_i \in \Lambda(F_{m_i})$ とする。

$(m_i, m_{i+1}) = (F_{g_i} \times I) \cup (\text{handle})$ となっているが

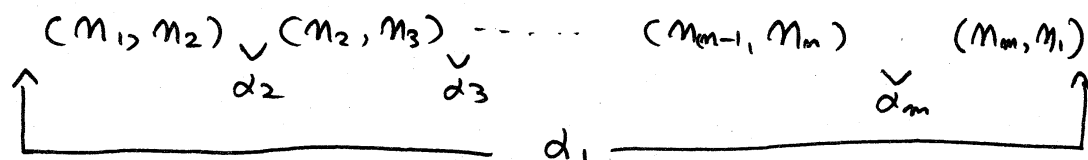
$\mathcal{Q}(m_i, m_{i+1})$ で $F_{g_i} \times S^0_2$ の $\tilde{\alpha}$ を $\mathcal{Q}(m_i, m_{i+1})$,

のこりを $\partial^+(M_i, M_{i+1})$ とする。

さて、 $(M_1, \dots, M_m; \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ は

$(M_1, M_2), (M_2, M_3), \dots, (M_{m-1}, M_m), (M_m, M_1)$

を用意し $\partial^+(M_{i-1}, M_i)$ と $\partial^-(M_i, M_{i+1})$ を α_i ではりあわせた mfd とする。 ($i=2, \dots, m-1$ までだが, $i=1, m$ も同じ様にはりあわす。)



この様な mfd 全体の set を $\mathcal{M}$ とおく。

又、 $[M_1, \dots, M_m, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{m+1}]$ で次の様な mfd を表す。

$$(0, 1) \underset{\alpha_0}{\vee} (1, M_1) \underset{\alpha_1}{\vee} (M_1, M_2) \dots \underset{\alpha_m}{\vee} (M_m, 1) \underset{\alpha_{m+1}}{\vee} (1, 0)$$

ただし $M_1 = 0$ or 2 , $M_m = 0$ or 2 , $\alpha_0, \alpha_{m+1} \in \Lambda(F_1)$

$$|M_i - M_{i+1}| = 1, \quad \alpha_i \in \Lambda(F_{M_i}) \quad (i=1, \dots, m)$$

つまり、 (M_i, M_{i+1}) を用意し、 $\partial^+(M_{i-1}, M_i)$ と

$\partial^-(M_i, M_{i+1})$ をはりあわせた上に $(0, 1)$ と $(1, 0)$ をはりあわせる。この時 $\partial[M_1, \dots, M_m, \alpha_0, \dots, \alpha_{m+1}]$ は 2個の 2-sphere に存在がここに 3-ball をはりつける。この mfd を $\langle M_1, \dots, M_m; \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1} \rangle$

と書く。 $\left| \begin{array}{l} \text{= a mfd 全体を } \widetilde{\mathcal{N}} \text{ と書く} \\ \text{= a 時、次の定理が成り立つ} \end{array} \right.$

Theorem 6

$p: (M, \tilde{\Gamma}) \longrightarrow (S^2 \times S^1, L)$ 2-fold branched cover

$$\iff M = N \# \ell(S^2 \times S^1)$$

ただし, $N \in \mathcal{N}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 2"

$\ell \neq 0$ の時は $N = (m_1, \dots, m_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$

と書いた時 $m_i = 0$ なるものが一個はあるものと

する。

Theorem 7

$p: (M, \tilde{\Gamma}) \longrightarrow (S^3, L)$ 2-fold branched covering

$$\iff M = N \# \ell(S^2 \times S^1)$$

ただし $N \in \widetilde{\mathcal{N}}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(証明はともに略)

Reference

- [B] Birman, "Mapping class groups and their relationship to braid groups," *Com. Pure and App. Math.* 22 (213-238)
- [BH] Birman & Hilden, "On the mapping class groups of closed surfaces as covering space," *Ann. of Math. Studies* 66