

A composition method of Steiner 2-designs and their automorphisms

東京理科大・理工 神保 雅一
(Masaichi JIMBO)

BIBD (balanced incomplete block design) を構成する際に、その自己同型群の性質を利用することが多い。この報告では、ある種の自己同型群をもつ Steiner 2-design に注目し、その design を用いて、別のパラメータをもつ Steiner 2-design を構成する方法を論じる。

V を有限集合 ($|V| = v$)、 $\mathcal{B} \subseteq V$ の k -部分集合の族とする。 V の各元を点、 $\mathcal{B}$ の各元をブロックと呼ぶ。今、任意の 2 点 $a, b \in V$ を同時に含むブロックの数が a, b の選び方によらず一定 ($=\lambda$) であるとき、 $(V, \mathcal{B})$ を 2-design (BIBD) であるという。特に、 $\lambda = 1$ のとき、Steiner 2-design であるといい、 $S(2, k, v)$ と書く。 $g \in V$ 上の置換とする。ブロック $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ に対して、 $B^g = \{b_1^g, \dots, b_k^g\}$ と定義する。 V 上の置換 g が、 $(V, \mathcal{B})$ の自己同型変換であるとは、 $\mathcal{B}$ が g に関して不変 (すなわち、 $\mathcal{B}^g = \{B^g \mid B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$) であることである。 G を $(V, \mathcal{B})$ の自己同型群 (自己同型変換の全体) または、その部分群とし、 G の V 上での orbit を $V_1, \dots, V_p$ とする。今、 G が各 V_i 上で sharp (すなわち、任意の $a, b \in V_i$ に対して、 $a^g = b$ とする $g \in G$ が唯一つ存在する。) であれば、 $(V, \mathcal{B})$ は、 p -orbital であるといい、 $(V, \mathcal{B})_G$ と書く。特に、1-orbital

Steiner 2-design を regular Steiner 2-design という (Johnsen and Storer (1974) 参照). regular Steiner 2-design $(V, \mathcal{B})_G$ に於いて, G が巡回群であるとき, cyclic Steiner 2-design といい, G がアーベル群であるとき, Abelian Steiner 2-design という. cyclic Steiner 2-design は, 特にその構造が簡単であり応用上も便利であるため, 今までに, いろいろな研究がなされてきた. また, 素体の拡大体上での射影幾何の点と直線が成す Steiner 2-design 等のように, Abelian Steiner 2-design の構成法もいくつか知られている.

ここでは p -orbital Steiner 2-design の構成法 (合成法) を考える. $(V, \mathcal{B})_G$ を p -orbital Steiner 2-design とする. G の $\mathcal{B}$ 上での orbit を block orbit と呼ぶ. 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して, $G_B = \{g \in G \mid B^g = B\}$ とおく. 今, $G_B = \{1\}$ であるば, B を含む block orbit は full orbit であるといい, $G_B \neq \{1\}$ であるとき, short orbit であるという.

G を位数 u の群とし, $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ($i=1, \dots, k; j=1, \dots, u$) を G の元を要素にもつ $k \times u$ 配列とする. Σ の任意の異なる 2 行 i と i' について, $\{\sigma_{ij} \sigma_{i'j}^{-1} \mid j=1, 2, \dots, u\} = G$ が成立するとき, Σ を (G, k) -row inverse scheme と呼ぶ. regular Steiner 2-design から, (G, k) -row inverse scheme を作ることもできることを次の補題が示している.

補題 1 $(V, \mathcal{B})_G$ を short orbit を持たない regular Steiner 2-design $S(2, k, u)$ とし、直交表 $OA(k^2, k+1, k, 2)$ が存在するとすると、 (G, k) -row inverse scheme を構成することができる。

証明 $(k+1) \times k^2$ 配列 $A=(a_{ij})$ を $\{1, 2, \dots, k\}$ の要素を元にもつ直交表 $OA(k^2, k+1, k, 2)$ とする。一般性を失うことなく、

$$a_{k+1, k(k-1)+j} = 1 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad a_{i, k(k-1)+j} = j \quad \begin{matrix} (i=1, \dots, k) \\ (j=1, \dots, k) \end{matrix}$$

と仮定する。 $(V, \mathcal{B})_G$ は regular Steiner 2-design であるから、 V を G と同一視することができる。このとき、任意の $g \in V (= G)$ と任意の $h \in G$ に対して、 $g^h = g \cdot h (\in V)$ である。また、 $\mathcal{B}$ の各ブロックは、 G の k -部分集合であると思わせる。 $\mathcal{B}$ のある block orbit から任意に一つブロックを選び、それを、 $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ とする。また、

$$\Delta B = \{ b_i b_j^{-1} \mid i \neq j ; i, j = 1, 2, \dots, k \}$$

とおく。ここで、 $k \times k(k-1)$ 配列 $\Sigma_B = (\sigma_{ij})$ を、

$$\Sigma_B = (b_{a_{ij}} b_{a_{ij}}^{-1}) \quad i=1, \dots, k ; j=1, \dots, k(k-1)$$

と定義する。このとき、 Σ_B の任意の異なる 2 行 i と i' について、

$$\{ \sigma_{ij} \sigma_{i'j}^{-1} \mid j=1, \dots, k(k-1) \} = \{ b_{a_{ij}} b_{a_{i'j}}^{-1} \mid j=1, \dots, k(k-1) \} \\ = \Delta B$$

が成立つ。各 block orbit から、一つずつブロックを選び、

それらを $B_1, \dots, B_t$ とする。各 B_i に対して、 Σ_{B_i} を作り、

$$\Sigma = [\mathbf{1} : \Sigma_{B_1} : \Sigma_{B_2} : \dots : \Sigma_{B_t}] \quad (\mathbf{1} \text{ は all-one vector})$$

とすると、 Σ が求める (G, k) -row inverse scheme である。

証明終

特に、 G が巡回群であるときには、次の補題も成立つ。

補題 2 G を位数 u の巡回群とし、 u と $(k-1)!$ が互いに素であるとする。 (G, k) -row inverse scheme が存在する。(Jimbo and Kuriki (1983) 参照)

ここで、次の主定理を示す。

定理 1 次の 3 つが存在するとする。

(i) short orbit をもたない p -orbital Steiner 2-design $S(2, k, v)$ である $(V, \mathcal{B})_{G_1}$ とする。

(ii) regular Steiner 2-design $S(2, k, u)$ 。これは $(V', \mathcal{B}')_{G_2}$ とする。

(iii) (G_2, k) -row inverse scheme。

このとき、 $G \triangleright G_2$ 、 $G/G_2 \cong G_1$ を満たす任意の群 G に対して、 G を自己同型群又はその部分群としてもつ p -orbital Steiner 2-design $S(2, k, uv)$ が存在する。

証明 $(V, \mathcal{B})_{G_1}$ の点集合 V を

$$V = \{(g, \ell) \mid g \in G_1, \ell = 1, 2, \dots, p\}$$

と表し、 $(g, \ell)^h = (gh, \ell)$ と定義しておく。 $(V, \mathcal{B})_{G_1}$ の

ある block orbit から任意に 1 つ ブロック を選び、それを

$B = \{(b_1, l_1), \dots, (b_k, l_k)\}$ とする。 G の G_2 による各剰余類の中から任意に代表元を取り、その集合を $\mathcal{S}$ とすると G_1 の各元から $\mathcal{S}$ の各元は、自然に全単射 φ が決まる。 $\Sigma = (\sigma_{ij})$

$(i=1, \dots, k; j=1, \dots, u)$ を (G_2, k) -row inverse scheme とする。

$\tilde{V} = \{(g, l) \mid g \in G, l=1, \dots, p\}$ とし、

$$B_j = \{(\varphi(b_1)\sigma_{1j}, l_1), \dots, (\varphi(b_k)\sigma_{kj}, l_k)\} \quad j=1, \dots, u$$

$$\mathcal{B}(B) = \{B_j^g \mid g \in G, j=1, \dots, u\}$$

とおく。このとき、 $G \triangleright G_2$ に注意すると、

$$\begin{aligned} & \bigcup_j \{(\varphi(b_i)\sigma_{ij})(\varphi(b_i)\sigma_{ij})^{-1}, l_i\} \\ &= \bigcup_j \{(\varphi(b_i)\sigma_{ij}\sigma_{ij}^{-1}\varphi(b_i)^{-1}), l_i\} \\ &= (\varphi(b_i)G_2\varphi(b_i)^{-1}, l_i) \\ &= (\varphi(b_i)\varphi(b_i)^{-1}G_2, l_i) \\ &= (\varphi(b_i b_i^{-1})G_2, l_i) \end{aligned}$$

$(V, \mathcal{B})_{G_1}$ の各 block orbit から任意に 1 つずつ ブロック を選ぶ

それを $B^{(1)}, \dots, B^{(t)}$ とし $\mathcal{B}(B^{(1)}), \dots, \mathcal{B}(B^{(t)})$ を作ると

$\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(B^{(1)}) \cup \dots \cup \mathcal{B}(B^{(t)})$ において、 $(1, l) \in \tilde{V}$ は、

$(G_2, l) = \{(g, l) \mid g \in G_2\}$ 以外の $\tilde{V}$ の元とちょうど 1 回ずつ 会合することになる。

$(V', \mathcal{B}')_{G_2}$ は regular Steiner 2-design であるから、 V' を

G_2 と同一視することはできる。 $(V', \mathcal{B}')$ G_2 の各 block orbit から任意に一つずつブロックを選び、その各ブロック

$B' = \{b'_1, \dots, b'_k\}$ に対して、 $B'_\ell = \{(b'_1, \ell), \dots, (b'_k, \ell)\}$ $\ell=1, \dots, p$ を作り、これらを含む block orbits を $\overline{\mathcal{B}}$ に追加し、 $\tilde{\mathcal{B}}$ を作ると、 $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{B}})_{G_1}$ が求める p -orbital Steiner 2-design $S(2, k, uv)$ である。 証明終

この定理 1 と補題 1 から、次の系を得る。

系 1 次の 3 つが存在するとする。

(i) short orbit を持たない p -orbital Steiner 2-design $S(2, k, v)$ を $(V, \mathcal{B})_{G_1}$ とする。

(ii) short orbit を持たない regular Steiner 2-design $S(2, k, u)$ を $(V', \mathcal{B}')_{G_2}$ とする。

(iii) 直交表 $OA(k^2, k+1, k, 2)$ が存在する。

このとき $G \triangleright G_2$, $G/G_2 \cong G_1$ を満たす任意の群 G に対して、 G を自己同型群又は、その部分群としてもつ p -orbital Steiner 2-design $S(2, k, uv)$ が存在する。

cyclic Steiner 2-design の場合には、定理 1, 系 1 が、成立することが Jimbo and Kuriki (1983) に示されており、また、cyclic Steiner 2-design が short orbit をもつ場合にも、同様の結果が得られている。

今までに、cyclic Steiner 2-design や Abelian Steiner 2-design が、いろいろなる v に対して、構成できることが知られており、定理 1 又は系 1 を用いると、より多くの v に対して、cyclic Steiner 2-design や Abelian Steiner 2-design が構成できる。一方、cyclic Steiner 2-design から、次のようにして、non-Abelian regular Steiner 2-design を作ることもできる。

系 2 v は奇素数とし、cyclic $S(2, k, v)$ が存在するとすると、任意の $m \geq 3$ に対して、non-Abelian regular $S(2, k, v^m)$ が存在する。

証明 v が素数であるから、補題 2 より、 (C_v, k) -row inverse scheme が存在する。ただし、 C_v は位数 v の巡回群。従って、定理 1 において、 $G = C_{v^2}$, $G_1 = G_2 = C_v$ とおくと、cyclic $S(2, k, v^2)$ を構成することができ、(cyclic $S(2, k, v)$ が存在するためには、 $v \equiv 1 \pmod{k(k-1)}$ であり、 v が素数であるから、 $v \equiv 1 \pmod{k(k-1)}$)。そしてこのとき、この cyclic design は、short orbit をもたない (Jimbo and Kuriki (1983) 参照)。
また、 v^2 と $(k-1)!$ は互いに素であるから、再び補題 2 より、 (C_{v^2}, k) -row inverse scheme が存在する。 C_{v^2} を正規部分群として含み、 $G/C_{v^2} \cong C_v$ となる位数 v の非可換群が存在するから (Hall (1959) 参照)、定理 1 により、non-Abelian

regular $S(2, k, v^2)$ が存在する。従って、 τ は Steiner 2-design と cyclic $S(2, k, v)$ 及び u : (C_v, k) -row inverse scheme をくり返して用いて、任意の $m \geq 3$ に対して、non-Abelian regular $S(2, k, v^m)$ を構成することが出来る。

証明終

参考文献

- M. Hall Jr. (1959), *The Theory of Groups*, Macmillan.
- M. Jimbo and S. Kuriki (1983), On a composition of cyclic 2-designs, *Discrete Mathematics* 46, 249-255.
- E.C. Johnson and T. Storer (1974), Combinatorial structures in loops. IV. Steiner triple systems in neofields, *Math. Z.* 138, 1-14.