

微分不能項をもつ複素非線形方程式系に対する反復解法

大阪女子大学 石原 和夫 (Kazuo Ishihara)

微分不能項をもつ複素 n 変数の非線形方程式系

$$F(z) \equiv f(z) + g(z) = 0, \quad z \in D \subset \mathbb{C}^n \quad (1)$$

に対する反復法について考える. ここで, D は n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の領域, $f, g: D \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^t$, t は転置

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))^t, \quad g(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z))^t,$$

各 $f_i(z), g_i(z)$ は D で 1 価関数, $f_i(z)$ は正則関数, $g_i(z)$ は微分不可能な連続関数とする. (1) に対して, Chen [2] は次のような Broyden-like 法を提案して、その収束性を示した ([2] では n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ で扱われている).

$$z_{k+1} = z_k - B_k^{-1} F(z_k), \quad (2)$$

$$B_{k+1} = B_k + (t_k - B_k s_k) s_k^h / (s_k^h s_k),$$

$$s_k = z_{k+1} - z_k, \quad t_k = f(z_{k+1}) - f(z_k)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$. ただし, h は共役転置を表す.

ここでは、次のような反復法を考える.

$$z_{k+1} = z_k - [f'(z_k) + \partial_1 g(z_{k-1}, z_k)]^{-1} F(z_k) \quad (3)$$

$$z_{k+1} = z_k - [f'(z_k) + \partial_2 g(z_{k-1}, z_k)]^{-1} F(z_k) \quad (4)$$

$$z_{k+1} = z_k - [\partial_1 f(z_{k-1}, z_k) + \partial_1 g(z_{k-1}, z_k)]^{-1} F(z_k) \quad (5)$$

$$z_{k+1} = z_k - [\partial_2 f(z_{k-1}, z_k) + \partial_2 g(z_{k-1}, z_k)]^{-1} F(z_k) \quad (6)$$

$$z_{k+1} = z_k - f'(z_k)^{-1} F(z_k) \quad (7)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, z_{-1}, z_0 は初期ベクトル, $z_k = (z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{n,k})^t$, $z_{j,k} = x_{j,k} + iy_{j,k}$, $i = \sqrt{-1}$, $f'(z_k)$ は f の z_k でのヤコビアン行列であり, 行列 $f'(z_k)$, $\partial_1 g(z_{k-1}, z_k)$, $\partial_2 g(z_{k-1}, z_k)$ の (i, j) 成分はそれぞれ次のように与えられる.

$$(f'(z_k))_{i,j} = \frac{\partial f_i(z_k)}{\partial z_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\begin{aligned}
(\partial_1 \mathbf{g}(\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k))_{i,j} = & \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\operatorname{Re}[g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j,0)})]}{\operatorname{Re}[z_{j,k} - z_{j,k-1}]} + \frac{\operatorname{Im}[g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j,1)})]}{\operatorname{Im}[z_{j,k} - z_{j,k-1}]} \right\} \\ + \frac{i}{2} \left\{ -\frac{\operatorname{Re}[g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j,1)})]}{\operatorname{Im}[z_{j,k} - z_{j,k-1}]} + \frac{\operatorname{Im}[g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j,0)})]}{\operatorname{Re}[z_{j,k} - z_{j,k-1}]} \right\}, \\ \quad (\operatorname{Re}[z_{j,k} - z_{j,k-1}] \neq 0, \operatorname{Im}[z_{j,k} - z_{j,k-1}] \neq 0 \text{ の時}) \\ \\ \frac{\operatorname{Re}[g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j,0)})]}{\operatorname{Re}[z_{j,k} - z_{j,k-1}]} + i \frac{\operatorname{Im}[g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j,0)})]}{\operatorname{Re}[z_{j,k} - z_{j,k-1}]}, \\ \quad (\operatorname{Re}[z_{j,k} - z_{j,k-1}] \neq 0, \operatorname{Im}[z_{j,k} - z_{j,k-1}] = 0 \text{ の時}) \\ \\ \frac{\operatorname{Im}[g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j,1)})]}{\operatorname{Im}[z_{j,k} - z_{j,k-1}]} - i \frac{\operatorname{Re}[g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j,1)})]}{\operatorname{Im}[z_{j,k} - z_{j,k-1}]}, \\ \quad (\operatorname{Re}[z_{j,k} - z_{j,k-1}] = 0, \operatorname{Im}[z_{j,k} - z_{j,k-1}] \neq 0 \text{ の時}) \\ \\ 0, \quad (\operatorname{Re}[z_{j,k} - z_{j,k-1}] = 0, \operatorname{Im}[z_{j,k} - z_{j,k-1}] = 0 \text{ の時})
\end{cases} \\
(\partial_2 \mathbf{g}(\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k))_{i,j} = & \begin{cases} \frac{g_i(\mathbf{z}_k) - g_i(\mathbf{z}_k^{(j)})}{z_{j,k} - z_{j,k-1}}, & (z_{j,k} - z_{j,k-1} \neq 0 \text{ の時}) \\ 0, & (z_{j,k} - z_{j,k-1} = 0 \text{ の時})
\end{cases}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_k^{(j,0)} &= (z_{1,k}, \dots, z_{j-1,k}, x_{j,k-1} + iy_{j,k}, z_{j+1,k}, \dots, z_{n,k})^t, \\
\mathbf{z}_k^{(j,1)} &= (z_{1,k}, \dots, z_{j-1,k}, x_{j,k} + iy_{j,k-1}, z_{j+1,k}, \dots, z_{n,k})^t. \\
\mathbf{z}_k^{(j)} &= (z_{1,k}, \dots, z_{j-1,k}, z_{j,k-1}, z_{j+1,k}, \dots, z_{n,k})^t.
\end{aligned}$$

$\partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$, $\partial_2 \mathbf{f}(\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$ も $\partial_1 \mathbf{g}(\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$, $\partial_2 \mathbf{g}(\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k)$ と同様に定義される。

以後、次のような ℓ_1 ベクトルノルム, ℓ_1 行列ノルム, 記号を使用する。

$$\|\mathbf{z}\| = \sum_{j=1}^n |z_j|, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n,$$

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad A = (a_{i,j}), \quad a_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

$$G_k = \mathbf{f}'(\mathbf{z}_k) + \partial_1 \mathbf{g}(\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

以上の準備の下で反復法 (3) に対して次のような結果が得られる。

定理 1. $\mathbf{z}_* \in D \subset \mathbb{C}^n$ を (1) の解, $\mathbf{f}'(\mathbf{z}_*)$ は正則行列で次のような定数 q , L , K が存在するとする。

$$0 \leq q < 1, \quad 0 \leq L \leq \frac{q}{2+q},$$

$$|||f'(z_*)^{-1}||| \cdot |||f'(u) - f'(v)||| \leq K \|u - v\|, \quad u, v \in D,$$

$$|||f'(z_*)^{-1}||| \cdot \|g(u) - g(v)\| \leq L \|u - v\|, \quad u, v \in D,$$

さらに, G_0 が

$$|||f'(z_*)^{-1}||| \cdot |||G_0 - f'(z_*)||| \leq b \equiv \frac{2q - L}{3 + 2q}$$

を満たすとする. $\Rightarrow$ 反復法 (3) は, 閉球

$$\bar{S}(z_*, r) \equiv \{z \in \mathbb{C}^n; \|z - z_*\| \leq r\} \subset D, \quad r \leq \frac{2[q - (2 + q)L]}{(3 + 2q)K}$$

において well-defined であり, かつ $\bar{S}(z_*, r)$ は attraction ball となり, 次式を満たす.

$$\|z_{k+1} - z_*\| \leq q \|z_k - z_*\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

定理 2. (1) において $f(z) \equiv Az$ の時, A は正則行列で次のような定数 L が存在するとする.

$$0 \leq L < \frac{1}{3}, \quad |||A^{-1}||| \cdot \|g(u) - g(v)\| \leq L \|u - v\|, \quad u, v \in \mathbb{C}^n$$

$\Rightarrow$ 任意の初期ベクトル $z_{-1}, z_0 \in \mathbb{C}^n$ に対して, 反復法 (3) は well-defined で, (1) の一意な解 z_* に収束し, 次式を満たす.

$$\|z_{k+1} - z_*\| \leq \frac{2L}{1 - L} \|z_k - z_*\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

反復法 (4), (5), (6), (7) についても同様の結果が得られる.

数値実験に対しては次のような例題を考える.

Example 1 : $6\text{Log}z + \max\{|\text{Re}[z]|, |\text{Im}[z]|\} + i \min\{|\text{Re}[z]|, |\text{Im}[z]|\} - \sqrt{2}/2 - i(3\pi/2 + \sqrt{2}/2) = 0.$

Example 2 : $z^3 + \min\{|z|, 2\} + 2 - \sqrt{2} - 2i = 0.$

Example 3 : $e^{z-0.5} + 0.2z|z-1| - 1.05 = 0.$

Example 4 : $n = 100,$

$$\begin{cases} 10e^{z_1 - \omega_1} + iz_2 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |z_m| - 11 - i\omega_2 = 0, \\ iz_{j-1} + 10e^{z_j - \omega_j} + iz_{j+1} + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |z_m| - 11 - i(\omega_{j-1} + \omega_{j+1}) = 0, \\ \quad 2 \leq j \leq n-1, \\ iz_{n-1} + 10e^{z_n - \omega_n} + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |z_m| - 11 - i\omega_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Example 5 : $n = 100$,

$$\begin{cases} 10z_1 + iz_2 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |z_m| - 1 - 10\omega_1 - i\omega_2 = 0, \\ iz_{j-1} + 10z_j + iz_{j+1} + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |z_m| - 1 - 10\omega_j - i(\omega_{j-1} + \omega_{j+1}) = 0, \\ \qquad \qquad \qquad 2 \leq j \leq n-1, \\ iz_{n-1} + 10z_n + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |z_m| - 1 - 10\omega_n - i\omega_{n-1} = 0. \end{cases}$$

ただし, ω_j , $1 \leq j \leq n$ は1の n 乗根で次式で与えられる.

$$\omega_j = e^{i\frac{2(j-1)\pi}{n}} = \cos \frac{2(j-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(j-1)\pi}{n}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Example 1における

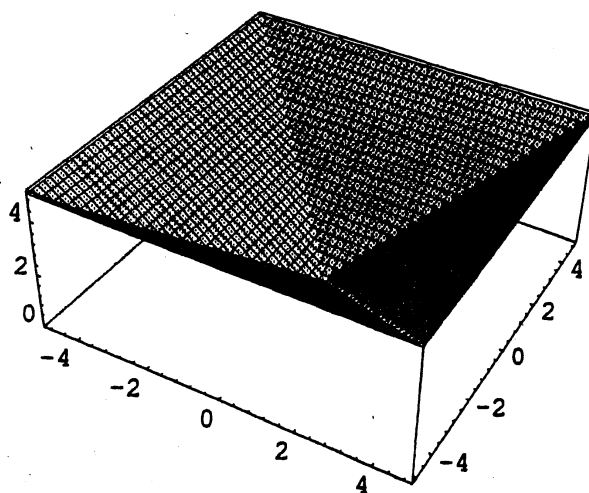
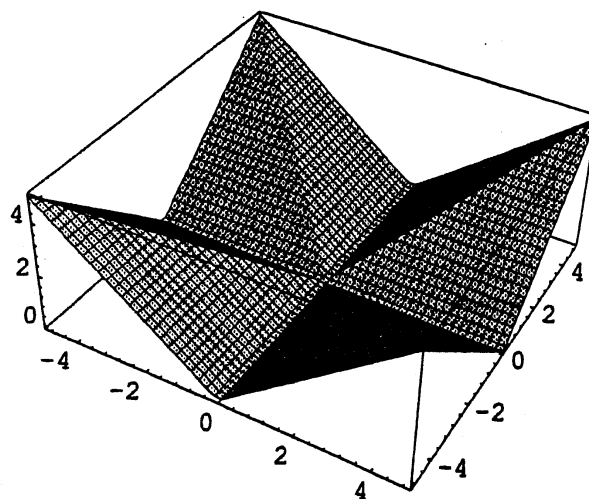
$$g(z) = \max\{|Re[z]|, |Im[z]|\} + i \min\{|Re[z]|, |Im[z]|\}$$

$$F(z) = 6\text{Log}z + \max\{|Re[z]|, |Im[z]|\} + i \min\{|Re[z]|, |Im[z]|\} \\ - \sqrt{2}/2 - i(3\pi/2 + \sqrt{2}/2)$$

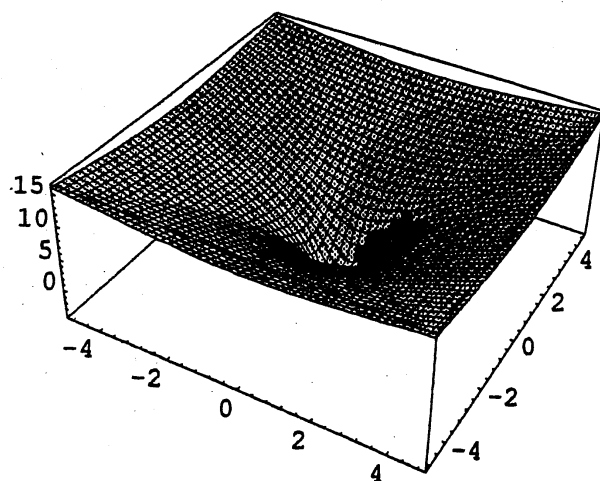
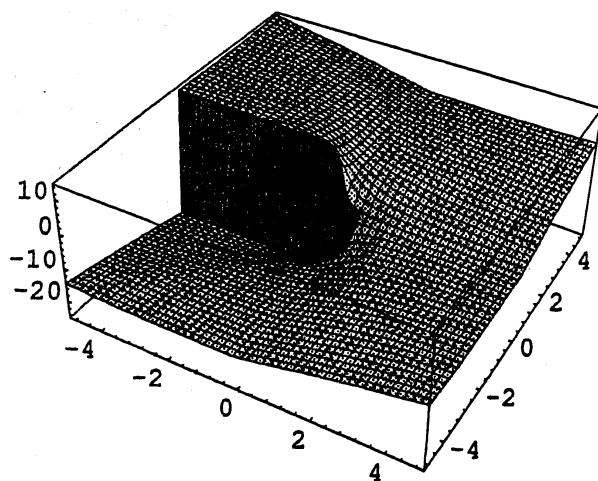
の実数部と虚数部を立体的に表した図と, **Example 3**の数値例の表は次のとおりである.
くわしい数値例は講演時に示す(FORTRANによる倍精度複素演算で実行).

参考文献

- [1] Ahlfors, L., Complex analysis, McGraw-Hill, 1966.
- [2] Chen, X., On the convergence of Broyden-like methods for nonlinear equations with nondifferentiable terms, Ann. Inst. Statist. Math. 42 (1990), 387-401.
- [3] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.
- [4] Ishihara, K. and Yamamoto, T., On nonlinear SOR-like methods, IV - SOR-secant method for nondifferentiable problems, Math. Japon. 46 (1997), 103-116.
- [5] Kelley, C. T., Iterative methods for linear and nonlinear equations, SIAM, 1995.
- [6] Ortega, J. M., Numerical analysis, a second course, SIAM, 1990.
- [7] Oretaga, J. M. and Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, 1970.
- [8] 石原和夫, 会沢成彦, 微分不能項をもつ複素非線形方程式に対する Newton-like法, 1997年4月, 日本数学会応用数学分科会(信州大学).

$\operatorname{Re}[g(z)]$

 $\operatorname{Im}[g(z)]$


$$g(z) = \max\{|\operatorname{Re}[z]|, |\operatorname{Im}[z]|\} + i \min\{|\operatorname{Re}[z]|, |\operatorname{Im}[z]|\}$$

$\text{Re}[F(z)]$

 $\text{Im}[F(z)]$


$$F(z) = 6\text{Log}z + \max\{|\text{Re}[z]|, |\text{Im}[z]|\} + i \min\{|\text{Re}[z]|, |\text{Im}[z]|\} \\ -\sqrt{2}/2 - i(3\pi/2 + \sqrt{2}/2)$$

Numerical solutions for Example 3 ($z_*^{(1)} = x_* = 0.5$).

k	Iteration (3)			Iteration (2) (Chen [2])	
	$\text{Re}[z_k]$	$\text{Im}[z_k]$	$ F(z_k) $	x_k	$ F(x_k) $
0	1.000000	0.0000000	0.5987213	1.000000	0.5987213
1	0.6368572	0.0000000	0.1429184	0.6368572	0.1429184
2	0.4966439	0.0000000	0.3352714×10^{-2}	0.5501727	0.5094931×10^{-1}
3	0.5001005	0.0000000	0.1005031×10^{-3}	0.5192704	0.1938308×10^{-1}
4	0.5000001	0.0000000	0.7245342×10^{-7}	0.5075140	0.7531057×10^{-2}
5	0.5000000	0.0000000	$0.1453768 \times 10^{-11}$	0.5029462	0.2948839×10^{-2}
6	0.5000000	0.0000000	$0.4163336 \times 10^{-16}$	0.5011576	0.1158071×10^{-2}
7				0.5004552	0.4553262×10^{-3}
8				0.5001791	0.1791028×10^{-3}
9				0.5000704	0.7046536×10^{-4}
10				0.5000277	0.2772386×10^{-4}
11				0.5000108	0.1090817×10^{-4}
12				0.5000042	0.4295704×10^{-5}
13				0.5000017	0.1682770×10^{-5}
14				0.5000006	0.6658424×10^{-6}
15				0.5000002	0.2619884×10^{-6}
16				0.5000001	0.9935910×10^{-7}