

流れの中の形の形成
—ベナール対流—

同志社大学・工学部 水島二郎 (Jiro Mizushima)

1. はじめに

物理学においては実験的に発見された事柄を説明するのに、初めに現象論的な説明が行われ、次に基礎方程式からその現象を説明するのが一般的である。しかし、流体物理学では初めから基礎方程式を用いて説明を行うことがたびたび行われる。ベナール対流における六角形セルパターンの発生の機構の説明を最初に行ったのは Gor'kov (1957) と Malkus & Veronis (1958) である。彼らはエネルギー方程式から、レイリー数が臨界値 R_c よりもわずかに大きいときに生じるベナール対流の定常解の振幅と平面形を求め、最も熱伝達効率が大きい対流が生じるという判定基準を用い、上下対称な境界条件の下では通常の流体の場合、六角形よりも四角形の方が起こり易いという結論を得た。Lortz (1961) と Busse (1962) は Malkus & Veronis (1958) と同様な方法で定常解を計算しさらにその定常解の線形安定性を調べた。Lortz は浮力項以外は流体の物理的性質が一定であるとするブシネスク近似を用いたが、Busse は流体の粘性率・熱伝導率・定圧比熱・熱膨張係数が温度に依存する効果も取り入れ、上下対称な境界条件の下ではロール解のみが安定であるが、上下非対称な境界条件の下では臨界レイリー数の 3.4 倍以上のレイリー数で六角形セルパターンが安定となりうることを示した。Lortz と Busse のこれらの論文は出版されていないので直接に読むことはできないが、Segel (1965b) が自分の論文の中でこれらの論文の簡単な紹介を行っている。

ランダウが提案したような攪乱の振幅を支配する発展方程式の導出は Palm (1960), Segel & Stuart (1962), Segel (1962, 1965a, 1965b) によって行われ、弱非線形安定性理論の基礎づけが行われた。Palm や Segel たちは動粘性係数が温度に線形に依存すると仮定し、二つの自由境界面に挟まれた流体層の安定性を調べた。彼らは、互いに 60° 傾いた波数ベクトルをもつ三つのモードの振幅とそれらのモードの位相に対する発展方程式系を導き、その方程式系の係数を定め、その解の性質を調べることによりロール解と六角形セルパターンの安定性を調べた。その結果によれば、六角形セルパターンは臨界レイリー数 R_c よりも小さいレイリー数で現れ、レイリー数を大きくしていくと $R = R_2$ で不安定となり、やがてロール状の対流が発生する。逆に大きいレイリー数で安定であるロール状の対流はレイリー数を小さくしていくと $R = R_1$ で不安定となり六角形セルパターンが生じる。すなわちヒステリシスの現象が観察される。これで六角形セルパターンの発生の機構は明らかになったかに見えるが、まだ解明されていない点が二つある。その一つはなぜある特定の大きさの波数を持ったモードだけが生き残るのか。もう一つはなぜお互いに 60° 傾いた波数ベクトルを持つモードだけが生き残るのか。Palm や Segel の研究よりも、物理学的にはむしろこの 2 点の説明の方が重要である。

直感的に受け入れやすいモデルは Swift & Hohenberg (1977) によって提案された。彼ら是对流の振幅を支配する偏微分方程式を現象論的に導いた。このモデル方程式を数値シミュレーションにより解くと実験的に得られる対流パターンとよく似たパターンが得られる。

パターンの形成と不安定性は対称性の破れと深く関係していることに注目したのは Golubitsky, Swift & Knobloch (1984) である。彼らは解を六角形格子上的モードに分解し解が

持つべき対称性のみを課すことにより各モードの発展方程式を求め、その定常解の分岐を詳細にかつ網羅的に調べた。系が流体層の中央を通る水平面に対して対称場合、すなわち、上下面が同じ境界条件でブシネスク近似が成り立つときにはロールと六角形セルの他に三角形セルも安定に存在することを示した。また、対称でない場合には対称な場合と解の分岐が全く異なることを示した。

Mizushima (1993) は下面が固体、上面が自由境界を持つ水平流体層における二次元ロール解の非線形平衡解をニュートン法により求め、その振幅分布は二次の共鳴項を持つ振幅方程式系で記述できることを示した。さらに彼はそこで得られた振幅方程式を一般化し Zakharov (1968) が重力波に対して求めた連続波数に対する方程式に似た形をモデル方程式として提案した。モデル方程式系の解の性質を詳しく調べた結果、二次の共鳴項がなく、三次の非線形項の係数が一定のときは最大増幅波数をもつモードのみが生き残り単一モードが得られること、二次の共鳴項があるときには混合モード解が存在することを示した。さらに、Mizushima (1994) はモデル方程式を二次元波数をもつモードに対する振幅方程式に拡張し、三次元ベナール対流における平面形の選択を調べ、Palm, Segel や Stuart たちがやり残した仕事、すなわちなぜある特定の大きさの波数を持ったモードだけが生き残るのか、なぜお互いに 60° 傾いた波数ベクトルをもつモードだけが生き残るのかという疑問に明快な回答を与えた。しかし、そこでは現実の流体に対してモデル方程式の係数を具体的に評価することは行わず、係数を適当に仮定してすべての結論が引き出された。

ここでは、弱非線形安定性理論を用いて振幅方程式を流体の基礎方程式から導きだし、その係数を評価する。ただし、臨界状態よりわずかに大きいレイリー数の場合を取り扱うこととし、大きさが臨界波数である二次元波数をもつモードのみを考える。流体層の下面は固体、上面は自由境界であるとする。流体の粘性は温度に依存して変化することも考慮に入れる。

2. 基礎方程式と線形安定性

厚さ d の水平流体層を考える。上面は自由表面であり一定温度 θ_0^* に保たれている。下面は固体境界で温度 $\theta_0^* + \delta\theta^*$ に保たれている。流体の熱伝導係数 κ は一定であり、密度 ρ は浮力項を除いて一定であると仮定する。動粘性係数 ν は温度に依存して次のように変化するものとする。

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 + \gamma \left(\frac{\theta^* - \theta_0^*}{\delta\theta^*} \right).$$

このとき、ベナール対流は次の三つの無次元パラメータによりその性質が決定されることになる。

$$\gamma, \quad R = \frac{\alpha g \delta\theta^* d^3}{\nu_0 \kappa}, \quad P_r = \frac{\nu_0}{\kappa}. \quad (1)$$

ここで、 g は重力加速度であり、 α は流体の熱膨張係数である。対流の速度を $\mathbf{u}$ 、温度攪乱を θ 、圧力の攪乱を Γ とおくと、これらの攪乱を支配する方程式は次のように書くことができる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Gamma + P_r R \theta \lambda + P_r (1 - \gamma z) \Delta \mathbf{u} + P_r \gamma \theta \Delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \mathbf{u} \lambda + \Delta \theta. \quad (4)$$

線形安定性を調べるために、温度、速度、圧力を x, y 方向にフーリエ級数展開し、波数 $\mathbf{p}$ をもつ一成分のみを考える。線形安定性を支配する方程式は速度の z 成分を w_{10} 、渦度の z 成分を ω_{10} 、温度を θ_{10} とおくと次のように表せる。

$$\lambda_0 \omega_{10}(\mathbf{p}) = P_r(1 - \gamma z) S_1(\mathbf{p}) \omega_{10}(\mathbf{p}), \quad (5)$$

$$\lambda_0 S_1(\mathbf{p}) w_{10}(\mathbf{p}) = P_r(1 - \gamma z) S_1(\mathbf{p})^2 w_{10}(\mathbf{p}) - P_r \gamma S_1(\mathbf{p}) D w_{10}(\mathbf{p}) - p^2 P_r R \theta_{10}(\mathbf{p}), \quad (6)$$

$$\lambda_0 \theta_{10}(\mathbf{p}) = w_{10}(\mathbf{p}) + S_1(\mathbf{p}) \theta_{10}(\mathbf{p}). \quad (7)$$

ただし、

$$S_n(\mathbf{p}) \equiv D^2 - n^2 p^2, \quad D \equiv \partial / \partial z,$$

であり、 $p = |\mathbf{p}|$ 、また λ_0 は線形増幅率である。この方程式を次の境界条件のもとで解くことにより安定性を調べることができる。

$$w_{10} = \frac{dw_{10}}{dz} = \theta_{10} = 0 \quad \text{at } z = -1,$$

$$w_{10} = \frac{d^2 w_{10}}{dz^2} = \theta_{10} = 0 \quad \text{at } z = 0. \quad (8)$$

ここで、 $z = 0$ は上面を $z = -1$ は下面を表すものとする。

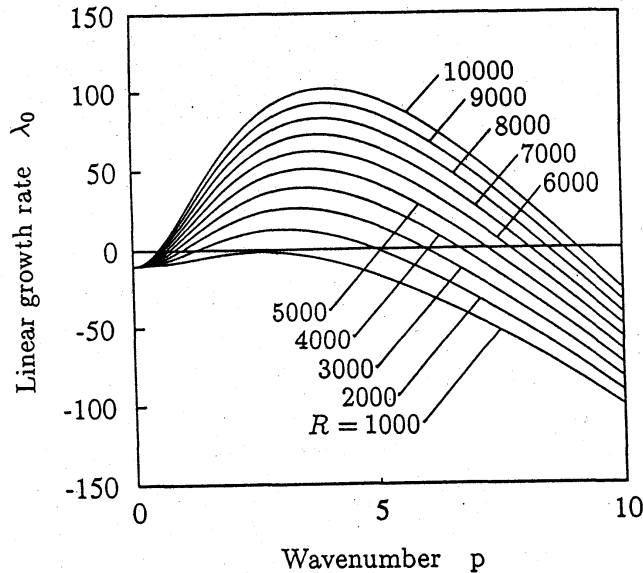


図 1. 上面が自由表面、下面が固体表面の場合のベナール対流の線形増幅率。 $Pr = 7$, $\gamma = 0$.

線形臨界レイリー数 R_c は $\gamma = 0$ のとき $p_c = 2.682$ において $R_c = 1100.649$ で与えられるが、 $\gamma = 0.5$ のときは $R_c = 1360.611, p_c = 2.695$, $\gamma = -0.5$ のとき $R_c = 813.168, p_c = 2.656$, $\gamma = -0.8$ においては $R_c = 607.121, p_c = 2.616$ と求められる。一見、 γ が負で絶対値が大きいほど臨界レイリー数は小さくなり、より不安定になっているようにみられるが、これはレイリー数の定義が上面における温度 θ_0^* での動粘性係数を用いて定義されているためであり、もし下面における温度 $\theta_0^* + \delta\theta^*$ での動粘性係数を用いて定義すればこの傾向は逆転する。通常の実験で使用する流体でこの γ の値を調べてみると、空気では $\gamma = 0.258$, 水で $\gamma = -0.496$, シリコンオイルで $\gamma = -0.558$ である。ただし、これらの値を求めるとき、 $\theta = 300 \sim 340 K$ での動粘性係数の値をこの区間で線形近似を行った。図 1 に $\gamma = 0$ のときの線形増幅率の分布を示す。

3. 弱非線形安定性理論

この節では弱非線形安定性理論により振幅方程式を導出し、方程式の係数を実際に評価し、ベナール対流の形の形成の機構を調べる。臨界レイリー数よりわずかに大きいレイリー数を考える。このとき、大きさが臨界波数 p_c である波数をもつモードのみが不安定である。臨界レイリー数よりずっと大きいレイリー数においても Mizushima (1994) が示したように最大増幅率をもつモードのみが生き残るので同様な議論が可能である。いずれにせよ、二次元波数空間 (p_x, p_y) で半径が p_c の円周上の波数のみを考えることにする。円周上で任意の波数を $\mathbf{p}$ とし、その振幅を A とおく。波数空間で $\mathbf{p}$ から 60° 反時計方向に回った点で示される波数を $\mathbf{q}$ としその振幅を B とおく。さらに 60° 回った点で示される波数を $\mathbf{r}$ としその振幅を C とおく。それら以外のモードの振幅を D_k とおく。振幅展開法を用いて、 A, B, C の時間微分を次のように A, B, C, D_k で展開する。

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & \lambda_{A0}A + \lambda_{A1}BC^* + \lambda_{A2}|A|^2A + \lambda_{A3}|B|^2A + \lambda_{A4}|C|^2A \\ & + \sum_k \lambda_{A5}|D_k|^2A + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} = & \lambda_{B0}B + \lambda_{B1}AC + \lambda_{B2}|A|^2B + \lambda_{B3}|B|^2B + \lambda_{B4}|C|^2B \\ & + \sum_k \lambda_{B5}|D_k|^2B + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = & \lambda_{C0}C + \lambda_{C1}A^*B + \lambda_{C2}|A|^2C + \lambda_{C3}|B|^2C + \lambda_{C4}|C|^2C \\ & + \sum_k \lambda_{C5}|D_k|^2C + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

方程式の対称性から次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lambda_{A0} = \lambda_{B0} = \lambda_{C0}, \quad \lambda_{A1} = \lambda_{B1} = \lambda_{C1}, \quad \lambda_{A2} = \lambda_{B3} = \lambda_{C4}, \\ \lambda_{A3} = \lambda_{A4} = \lambda_{B2} = \lambda_{B4} = \lambda_{C2} = \lambda_{C3}, \quad \lambda_{A5} = \lambda_{B5} = \lambda_{C5}. \end{aligned}$$

温度, 速度, 圧力を x, y 方向にフーリエ級数展開し, さらにそのフーリエ係数を振幅 A, B, C, D_k で展開し, 基礎方程式 (2)-(4) に代入し, 各 $O(A^k B^l C^m D_k^n)$ を等しいとおくことにより方程式を得る。それらを解くことにより振幅方程式のすべての係数を評価することができる。ただし, 正規化の条件として $z = -1/2$ において波数 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ をもつ各モードの速度の z 成分 w がそれぞれ A, B, C であるということを用いる。

方程式 (9)-(11) の定常解としていくつかの簡単な性質をもつ解が存在する。二次元ロール解は $A \neq 0, B = C = D_k = 0$ で与えられ, その平衡振幅 A_{eq} は次のように書ける。

$$A_{eq} = \sqrt{-\frac{\lambda_{A0}}{\lambda_{A2}}}, \quad (12)$$

この二次元ロール解は次の条件を満たすとき B, C の攪乱に対して不安定である。

$$\lambda_{A0} < -\frac{\lambda_{A1}^2}{\lambda_{A2}(1 - \lambda_{A3}/\lambda_{A2})^2}.$$

また, 次の条件では D_k の攪乱に対して不安定である。

$$\lambda_{A5}/\lambda_{A2} < 1$$

六角形セル解は $A = B = C \neq 0, D_k = 0$ で与えられ, その平衡振幅 A_{eq} は次のように書ける。

$$A_{eq} = 0, \quad (13)$$

$$A_{eq} = \frac{-\lambda_{A1} - \sqrt{\lambda_{A1}^2 - 4(\lambda_{A2} + 2\lambda_{A3})\lambda_{A0}}}{2(\lambda_{A2} + 2\lambda_{A3})}, \quad (14)$$

$$A_{eq} = \frac{-\lambda_{A1} + \sqrt{\lambda_{A1}^2 - 4(\lambda_{A2} + 2\lambda_{A3})\lambda_{A0}}}{2(\lambda_{A2} + 2\lambda_{A3})}, \quad (15)$$

解 (13), (14) は常に不安定な解である。解 (15) は次の条件を満たすとき B, C の攪乱に対して安定である。

$$\lambda_{A0} < -\frac{\lambda_{A1}^2(2\lambda_{A2} + \lambda_{A3})}{(\lambda_{A2} - \lambda_{A3})^2}.$$

また, 次の条件では D_k の攪乱に対して安定である。

$$\lambda_{A0} < -\frac{3\lambda_{A1}^2\lambda_{A5}}{(\lambda_{A2} + 2\lambda_{A3} - 3\lambda_{A5})^2}.$$

例として $\gamma = -0.8, P_r = 7.0$ の場合の六角形セル解および二次元ロール解の安定性を図 2 に示す。この図で R_0 は

$$\lambda_{A0} = \frac{\lambda_{A1}^2}{4(\lambda_{A2} + 2\lambda_{A3})}$$

となるレイリー数, R_1 は

$$\lambda_{A0} = -\frac{\lambda_{A1}^2}{\lambda_{A2}(1 - \lambda_{A3}/\lambda_{A2})^2}.$$

となるレイリー数, R_2 は

$$\lambda_{A0} = -\frac{\lambda_{A1}^2(2\lambda_{A2} + \lambda_{A3})}{(\lambda_{A2} - \lambda_{A3})^2}.$$

となるレイリー数, R'_2 は

$$\lambda_{A0} = -\frac{3\lambda_{A1}^2\lambda_{A5}}{(\lambda_{A2} + 2\lambda_{A3} - 3\lambda_{A5})^2}.$$

となるレイリー数を表すものとする。

六角形セル解は亜臨界不安定であり $R = R_0$ で六角形セルが発生し, レイリー数を大きくすると $R = R'_2$ まで安定であるが $R > R'_2$ で不安定となる。二次元ロール解は超臨界不安定であり B, C の攪乱に対して $R < R_1$ のとき不安定であるがこれ以上大きいレイリー数に対しては安定である。また, D_k の攪乱に対しては $\lambda_{A5}/\lambda_{A2} < 1$ のとき不安定となる。Segel (1962, 1965a, 1965b) では D_k の影響が考慮されていなかったため, ヒステリシスが生じたが, D_k の影響を考慮に入れると, 逆に $R'_2 < R < R_1$ の間では二次元ロール解も六角形セル解も共に不安定でありそれら以外の形になるかあるいは定常解が存在しないことになる。

数値計算により (9)-(11) 式の係数を実際に評価した。これらの係数を用いて R_0, R_c, R'_2, R_1, R_2 を計算した。 $\gamma = 0, P_r = 7.0$ においては

$$R_c = R_0 = R_1 = R_2 = 1100.649$$

となり, 六角形セル解はすべてのレイリー数に対して不安定である。また, $\lambda_{A5}/\lambda_{A2} < 1$ であり, 二次元ロール解はすべてのレイリー数に対して不安定である。 $\gamma = -0.5, P_r = 7.0$ においては

$$R_0 = 812.985, R_c = 813.168, R'_2 = 833.439, R_2 = 867.982$$

となり, 六角形セル解は $R < R'_2 = 833.439$ で安定である。 $\lambda_{A5}/\lambda_{A2} < 1$ であるため二次元ロール解はすべてのレイリー数に対して不安定である。 $\gamma = -0.8, P_r = 7.0$ においては

$$R_0 = 606.104, R_c = 607.121, R'_2 = 672.470, R_1 = 685.018, R_2 = 1008.540$$

となり, 六角形セル解は $R < R'_2 = 672.470$ で安定である。 $\lambda_{A5}/\lambda_{A2} > 1$ であるため二次元ロール解は $R > R_1$ であるレイリー数に対して安定である (図 2)。

4. おわりに

前節で求めたランダウ係数を用いて振幅方程式の初期値問題を数値的にも解いた。その結果, 前節で行った解析結果とほぼ一致する結論が得られた。いくつかのパラメータでは二次元ロールや六角形セルのような単純な解のほかにそれらが重なり合った混合解も出現することがわかった。Segel は初めから波数ベクトルが 60° 異なる三つのモードのみを仮定し, 二次元ロール解と六角形セル解の安定性を取り扱ったが, ここでは絶対値が p_c である波数

ベクトルをもつすべてのモードを考え、初期値問題を解くと自然に二次元ロールや六角形セルパターンが生じることが明らかになった。

ベナール対流における形の形成について実験も行った。図3に厚さ3 mmの流体層での可視化写真を示す。上面は自由表面、下面は固体境界である。流体は100 cStのシリコンオイルを用いた。この場合、Pearson (1958)の判定条件によれば浮力効果と表面張力効果の優劣を分ける流体層厚さは約10 mmであり、この実験では浮力効果よりも表面張力の方が大きい影響を及ぼしており、この報告で述べた理論に忠実には従っていない。

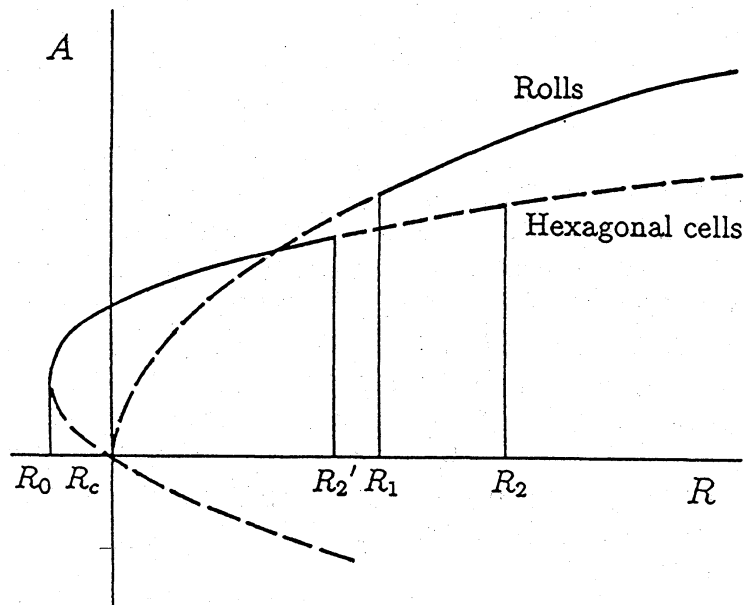


図2. 二次元ロール解と六角形セル解の平衡振幅. 実線は安定な平衡振幅. 波線は不安定な平衡振幅. $\gamma = -0.8$, $Pr = 7$, $R_0 = 606.104$, $R_c = 607.121$, $R_2' = 672.470$, $R_1 = 685.018$, $R_2 = 1008.540$.

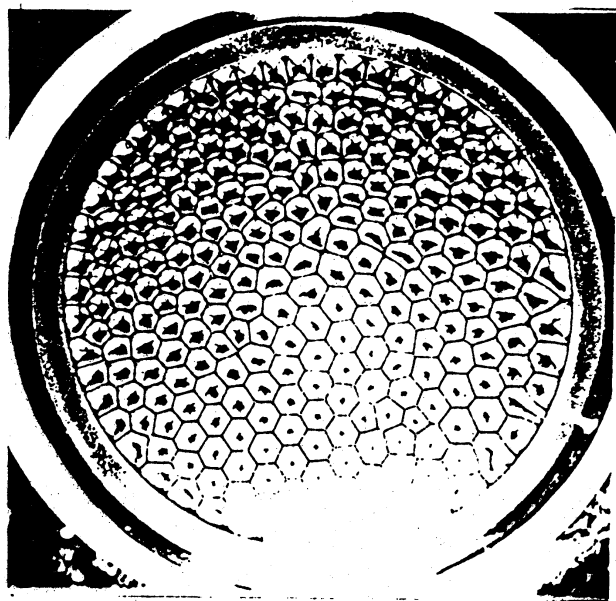


図3. ベナール-マランゴニ対流の可視化写真. $d = 3\text{mm}$, $\mu = 100\text{cSt}$.

References

- Busse, F.H. 1962 Das Stabilitätsverhalten der Zellularkonvektion bei endlicher Amplitude. Inaugural Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, Munich.
- Golubitsky, M, Swift, J.W. & Knobloch, E. 1984 Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Bénard convection, *Physica* **10D**, 249-276.
- Gor'kov, L.P. 1957 Stationary convection in a plane liquid layer near the critical heat transfer point, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 402-407.
- Lortz, D. 1961 Instabilitäten der stationären Konvektionsströmungen endlicher Amplitude, Inaugural Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, Munich.
- Malkus, W.V.R. & Veronis, G. 1958 Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.* **4**, 225-260.
- Mizushima, J. 1993 Mechanism of mode selection in Rayleigh-Bénard convection with free-rigid boundaries, *Fluid Dynamics Research* **11**, 297-311.
- Mizushima, J. 1994 Mechanism of the pattern formation in Rayleigh-Bénard convection, *J. Phys. Soc. Japan* **63**, 101-110.
- Pearson, J.R.A. 1958 On convection cells induced by surface tension, *J. Fluid Mech.* **4**, 489-500.
- Palm, E. 1960 On the tendency towards hexagonal cells in steady convection, *J. Fluid Mech.* **8**, 183-192.
- Segel, L.A. 1962 The non-linear interaction of two disturbances in thermal convection problem, *J. Fluid Mech.* **14**, 97-114.
- Segel, L.A. 1965a The structure of non-linear cellular solutions to the Boussinesq equations, *J. Fluid Mech.* **21**, 345-358.
- Segel, L.A. 1965b The non-linear interaction of a finite number of disturbances to a layer of fluid heated from below, *J. Fluid Mech.* **21**, 359-384.
- Segel, L.A. & Stuart, J.T. 1962 On the question of the preferred mode in cellular thermal convection, *J. Fluid Mech.* **13**, 289-306.
- Swift, J. & Hohenberg, P. 1977 Hydrodynamic fluctuations at the convective instability, *Phys. Rev. A* **15**, 319-328.
- Zakharov, V.E. 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech Tech. Phys.* **2**, 190-194.