

ボルツマン方程式の粗視化

土屋俊夫 (京都大学)

楕円銀河や球状星団などの重力多体系の進化を考える時、我々は實際上全ての星の位置と速度の情報を扱うことはできないので、必ず粗視化を行なうことになる。粗視化によって得られた分布関数 $f(x, v)$ の進化はボルツマン方程式

$$\frac{\partial f(x, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(x, v)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f(x, v)}{\partial v} = (\text{collision term}) \quad (1)$$

に従う。衝突項は微視的な散乱過程を平均化することによって現れる。ボルツマン方程式は気体分子運動論などにおいて古くから扱われており、衝突項の性質も十分調べられているが、そこで用いられた平均は統計的な集団平均であった。この集団平均は同じ系で異なる状態に渡って平均をとるもので、エルゴード的な系では長時間平均に対応している。

しかしながら、重力多体系の場合エルゴード性については疑問が持たれているし、また動力学的な進化を考える時には長時間平均をとることは意味がない。

むしろ重力多体系で我々が扱う粗視化は無限に小さく分解できないという観測によって情報の平滑化としてもたらされる。粗視化は各時刻毎に定義され、

$$\langle f \rangle(x, v, t) \equiv \int d^3 x_1 d^3 v_1 D(x_1, v_1) f(x + x_1, v + v_1, t) \quad (2)$$

と表される。ここで $D(x_1, v_1)$ は平滑化関数である。無衝突系（衝突項ゼロ）では系の進化は位置と速度の分布のみで決まるので、観測によって得られた“粗視化された”位置と速度の情報から進化を予測するが、実際の進化は微視的な散乱過程によって決まっており、その差が衝突項として表される。

集団平均に基づいて衝突項を導く方法はBBGKY形式として知られている [1] が、筆者は重力多体系においては粗視化による衝突項とBBGKY形式から導かれる衝突項とは全く違うものであることを先に示した [2]。そのなかで粗視化によって導かれる衝突項には潮汐力的な力によって位相空間中の分布が変形を受ける *phase mixing* の効果と近接粒子の作る重力によって軌道が曲げられることによる *scattering* の効果の2つがあることを示した。

いずれの効果も重力が作る力によるものであるが、重力は特徴的なスケールを持たないため粗視化を行なうスケールを変えることによって、衝突項の大きさも変わってくることが予想される。そこで筆者は1次元重力系を例にとって粗視化による衝突項のスケール依存性を数値的に調べた [3]。1次元重力系については本集録の土屋、小西、郷田を参照されたい。

図2は図1で与えられるような一様な分布に対して、衝突項のフーリエ成分のうちの最大のものの振幅 ($V_{\max}$) を、粗視化のスケール q (波数) に対して表したものである。粗視化は $dS \sim q^{-2}$ の面積を持った領域の中で平滑化を行なっている。 N^2 はシートの数を表し、 $q = \pi$ 、 $q = N\pi$ は系全体の長さ、及び平均粒子間隔に対応する波数である。

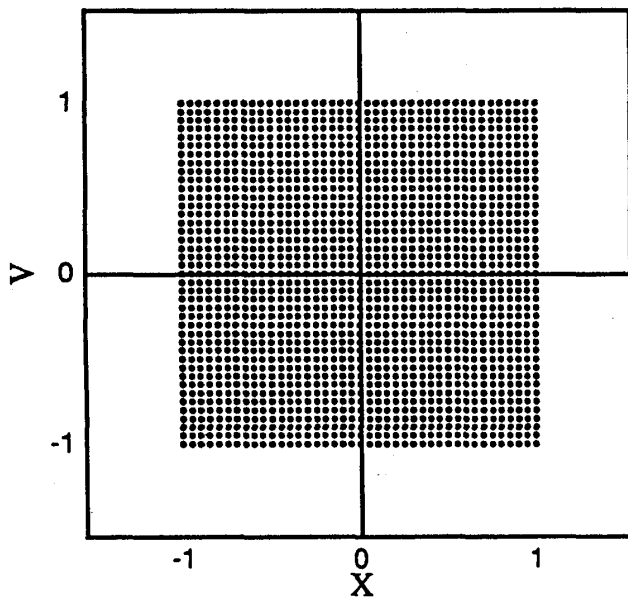


Fig.1

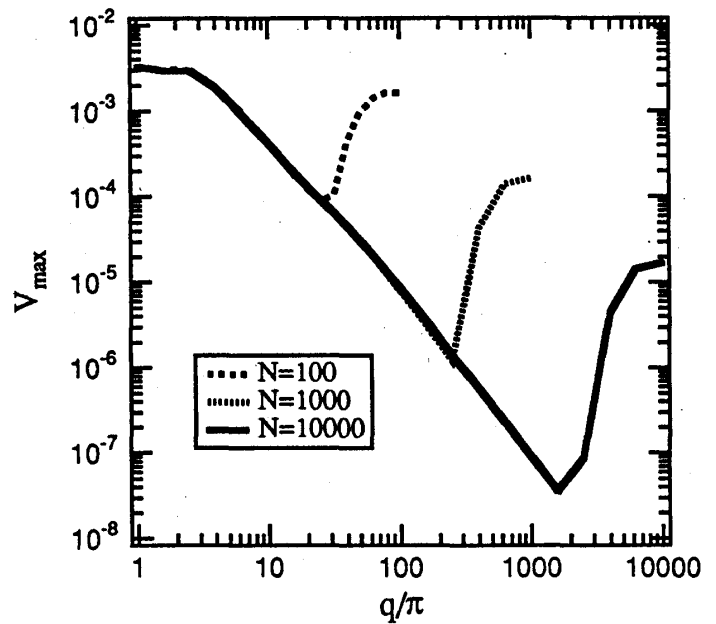


Fig.2

各々の N の値に対して V_{max} の曲線は $q \sim 0.1N\pi \equiv q_N$ で鋭い立ち上がりを見せている。この q の値に対して平滑化する領域の中にシートの数は $\lesssim 10$ となるが、そのような場合連続的な分布関数としての記述が悪くなるため、意味のあるのはこの立ち上がりよりも小さな q だけである。 $q < q_N$ では、 N に依らず V_{max} の線が一致している。このことは $q < q_N$ での振舞いは無衝突系（連続極限の系）と等しいことを示している。

衝突項の逆数は衝突項の効果が現れるタイムスケールを与えているので、例えば $V_{max} \sim 10^{-5}$ は、無衝突系とのずれが $T \sim 10^5$ で現れることを示している。 $q < q_N$ で $V_{max} \sim 0.1(q/\pi)^{-2}$ と表されるので、粗視化の波数 q にたいして、系が無衝突系からずれるタイムスケールは $V_{max}^{-1} \sim 10(q/\pi)^2$ と表すことができる。したがって、図2の曲線の立ち上がりの位置から N^2 のシートを持った系の進化が、無衝突系からずれるタイムスケールは

$$T_N \equiv 10(q_N/\pi)^2 = 0.1N^2 \quad (3)$$

となる。逆に $T < T_N$ では、 $q < q_N$ で粗視化した系の進化は無衝突系と一致する。従って式(3)は1次元系で無衝突系をシミュレートするのに必要な粒子数の下限を、進化を追うタイムスケールの関数として表している。

参考文献

- [1] Y. L. Klimontovich, *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma* (Pergamon, Oxford, 1967).
- [2] T. Tsuchiya, Prog.Theor.Phys. 90, 97 (1993).
- [3] T. Tsuchiya, (1993) preprint.