

固有双有理幾何入門

東京大学 理 飯高 茂

1. 俗にいう双有理幾何は、代数函数体の非特異射影モデルととり、そこで双有理不変な性質を究明して、代数函数体と研究しようというものである。ここには、正則型式と色々にとり、各種の種数が定義され、代数曲面の双有理同値による分類がなされている。代数曲面の分類の結果は簡明で実に美しい、しかし証明は極めて技巧的で見通しが悪く、甚だ評判が悪い。曲面の分類論の構造を解明し、ひきうでくば、一般の代数多様体の分類の基本構造を確立しようというのが、小平次元の理論であるが、それは非常に困難な仕事で、上野健吉の極めて精力的な労作が進行中である。

2. 射影的とか完備とかいう条件をおとして、分類理論をつくることは、決して新しい珍奇な事ではない。たとえば、

(1) $\mathbb{P}^1$ から3点以上ぬく、又は、楕円曲線から2点をぬいた、代数的開 Riemann 面は、 $g \geq 2$ の代数曲線と類似の性質

値をもつ。例えば、自己同型は有限群であり、普通複曲面として上半平面をもつから、双曲型である。等、

(2) $\bar{V}$ と $\mathbb{C}$ -ハット複素多様体, $\bar{D}$ と reduced 因子かつ正規交叉型とし, $\kappa(\bar{K} + \bar{D}, \bar{V}) = n$ とする。このとき

$\Delta = \{ |z| < 1 \}$, $\Delta^* = \Delta - (0)$ とおくと, 非退化正則写像

$$f: (\Delta^*)^n \longrightarrow \bar{V} - \bar{D} \quad (n = \dim V)$$

は有理型写像

$$\bar{f}: \Delta^n \longrightarrow \bar{V}$$

に延長できる。

(小林-落合の定理)

これは西井の定理で, $\bar{D} = \emptyset$ のとき拡張されて, $V = \bar{V} - \bar{D}$ が, "双曲型的" であることを示している。 $\bar{D}$ に正規交叉性を仮定しないと正しくない。

正規交叉という条件は一見人為的にみえるが, $V = \bar{V} - \bar{D}$ からすると, 実質自然であり, 複雑な特異性をもつ代数境界 $\bar{V} - V$ をモノイダル変換で改善して, 自然的なもつにするここに必要なのである。

(3) $\mathbb{P}^2$ から, 正規交叉型の直線を 4 本以上除くとき, それを S とすると, $\text{Aut}(S)$ は何か, (これは有限群である), というのが, 小林氏の筆者にスクールバスの中で又編集委員会の手席で相談中であった問題であった。直線から

莫以正ゆけは自己同型は有限群にちるから、このときも正(え)である。実際正しいことと若林氏は2次変換論と巧みに便して証明し、より一般の形をえている。筆者は独立に環論的に $S = \text{Spec } k[x, y, 1/l_1, \dots, 1/l_r]$ の関係を便して、環の非同型は単射を保つことを利用して、夏休み(1974)とかなり消費して、 $\varphi: k[x, y, 1/l_1, \dots, 1/l_r] \rightarrow k[x, y, 1/l_1, \dots]$ は、退化(ちへんり)線型に従って、自己同型とちるから有限群を有することを確認した。 $\varphi \times 1: 1$ であることはうまく利用できます、結果として、このことか少し奇妙な気もしたのをよく覚えている。

(4) (2)の議論はオノ種例外曲線を論ずるとき基礎になる。また、 $\mathbb{P}^2 - \bar{D} = V$ について、 $\bar{D}$ の特異点をはずすことを行なおう。

$$\begin{array}{ccc} \nabla^* & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \mathbb{P}^2 \\ \cup & & \cup \\ \bar{D}^* & & \bar{D} \end{array}$$

$$\bar{D}^* = \bar{\mu}^{-1}(\bar{D}) : \text{正規交叉型因子}$$

と2次変換をくりかえし、 $\kappa(K^* + \bar{D}^*, \nabla^*)$ を計算すると、これは $\mathbb{P}^2 - \bar{D}$ のみにより、 ∇^* の堅決に依存しないことにかかぬ。つまり $\dim \Gamma(\nabla^*, \mathcal{O}(n(K^* + \bar{D})))$ も依然と

して選択によらない。たゞし $\pi^* V = \mathcal{K}(\bar{K}^* + \bar{D}^*, \bar{V}^*)$,
 $\bar{P}_m V = \mathcal{L}(m(\bar{K}^* + \bar{D}^*))$ とおいてよい。 $\pi(P^2 - D) < 2$
 なら, (2) で示した接続定理, すなわち, Picard の大定理を確
 認しえないうえに, $\pi(P^1 - D) < 1 \Leftrightarrow D = p$ or $p+q$ の一
 般化と考えられる。これは, 例外的であり, 特殊な構造をも
 つてある。これを求めよう?!

(5) $z^m = f(x, y)$ により $\pi: S \rightarrow \mathbb{P}^2$ と m 重ヒップをつく
 る。 S が双曲型なら, $B = \pi(P_\pi)$, とおくと $\mathbb{P}^2 - B$ も双曲
 型と考えられる。これも $\mathbb{P}^2 - B$ の分類を期待させる何かであ
 る。

(以上でまあおき, おわり)。

3. V を非特異 n 次元とし, $\bar{V}$ をその非特異コンパクト化,
 $\bar{D} = \bar{V} - V$ を単純正規交叉型とする。層 $\Omega^1 \log \bar{D}$ を $\bar{V}$ 上に
 定義する: i) $\Omega^1 \log \bar{D} \subset \Omega^1(\bar{D})$,
 ii) $\forall p \in \bar{D}$ で, $(z_1, \dots, z_n)$ なる局所パラメーターを $z_1 \cdots z_n = 0$
 の p の周りで $\bar{D}$ を定義するとして, ω を p のまわりの
 形式,

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(z) \frac{dz_i}{z_i} + \sum_{j=1}^n b_j(z) dz_j, \quad a_i, b_j \in \mathcal{O}_{\bar{V}, p}$$

と表ける。

$\Omega^1 \log \bar{D}$ は多価位相 n の局所自由層であって,

$$\Omega^i \log \bar{D} = \bigwedge^i \Omega^1 \log \bar{D},$$

$$T_i(V) = \Gamma(\bar{V}, \Omega^i \log \bar{D}),$$

$$T_{m_1, \dots, m_n}(V) = \Gamma(\bar{V}, (\Omega^1 \log \bar{D})^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes (\Omega^n \log \bar{D})^{\otimes m_n})$$

とおく.

対数微分の性質により,

$$f: V_1 \longrightarrow V_2 \quad \text{について, } \omega \in \mathcal{L} \text{ に対して,}$$

$$1) \quad T_i(V_2) \xrightarrow{f^*} T_i(V_1),$$

$$1)' \quad T_{m_1, m_2, \dots}(V_2) \longrightarrow T_{m_1, m_2, \dots}(V_1)$$

が成立せしめられて,

命題 1 i) $f = \text{支配的}$ なら, f^* は 1:1,

ii) $f = \text{固有双有理正則}$ なら, f^* は 同型.

よって

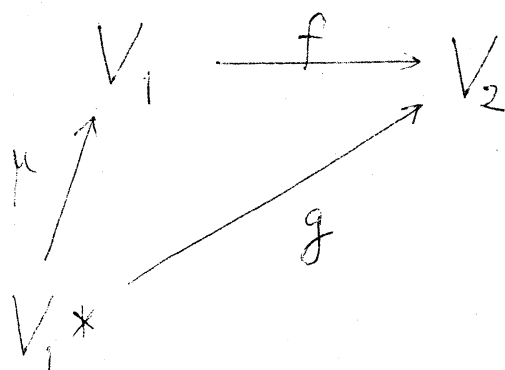
定義. $f: V_1 \longrightarrow V_2$ を 強有理写像 と

a) f は 有理写像,

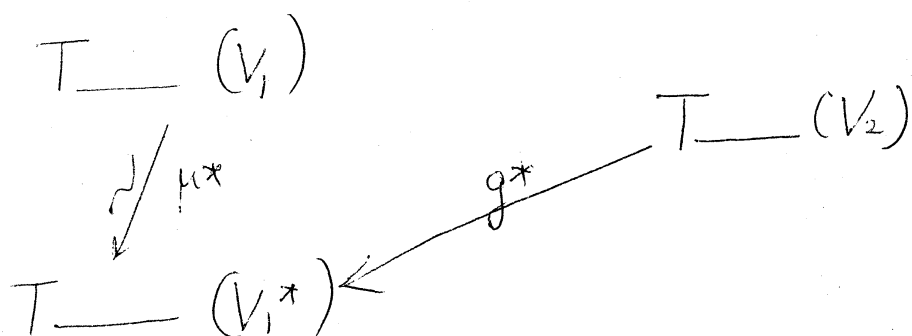
b) f は ある固有双有理正則写像 $\mu: V_1^* \longrightarrow V_1$ により

$f \circ \mu$ を 正則 にできる,

の 2 条件で定義する.



すると



よえるから $f^* = \mu^{*-1} \cdot g^* : T(V_2) \longrightarrow T(V_1)$ として定義できる。

一般の代数の標体 V については、その非特異モデル (V^*, A) 、 V といふと、 V^* は非特異、 μ は固有双有理正則、を用いて、 $T(V) = T(V^*)$ と定義しよう。勿論 V^* を選んで $T(V^*)$ は確定しない、 V^* が一意ではないが、 V の恒等写像から V への V^* を極めて標準的に得る。この $T(V^*)$ は連関する故、本質的には一意と考えられる。 $T(V)$ の元を V の代数式といふ。

f, f^{-1} がともに強双有理のとき f を同有双有理写像とい
い、 $f^*: T_{\infty}(V_2) \xrightarrow{\sim} T_{\infty}(V_1)$ である。

同有双有理写像 $f: V_1 \rightarrow V_2$ のあるとき V_1 と V_2 とは、同
有双有理同値と考える。これに、同有双有理幾何の根本概念
である。

上の Remmert は有理型写像を、上の強有理写像を解析
の範囲で考えて用いている。有理写像に對するものは、こ
こでは、弱有理型写像とよばれている。

4.

$$\overline{p}_{m_1, m_2, \dots}(V) = \dim T_{m_1, m_2, \dots}(V),$$

$$\overline{q}_i(V) = \dim T_i(V),$$

$$\overline{p}_m(V) = \dim T_{0,0,\dots,m}(V),$$

$$\overline{p}_g(V) = \overline{p}_1(V).$$

等とおき、対数的種数, とすべく対数的なる接頭
語をつけてよ。一才

$$p_{m_1, m_2, \dots}(V) = p_{m_1, m_2, \dots}(\overline{V}), \quad \kappa V = \kappa \overline{V},$$

とおき、これらも併せ用いるから、注意を十分にすてきであ
る。

$\overline{p}_m(V)$ から

対数的小平次元 (Logarithmic Kodaira dimension)

$\kappa(V)$ に定義され、これが最も重要である。

5.

例1. V を非特異曲線とする:

$\pi(V)$	V	$\bar{g}$
$-\infty$	$\mathbb{P}^1, A$	0
0	elliptic, G_m	1
1	3葉り	1 または ≥ 2

주의 $\bar{g}(V)$ では上記は区別しきれない. $\pi V=1$ に,
 $\bar{g}=g=1$ の非コ=パワトのものも入る. 小平次元の本質
 的性格のよきため, ここに既に表出している.

例2. $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の正規交叉型の因子を $\bar{D}$ とする. このとき,

π	$d = \deg \bar{D}$
$-\infty$	$d < n+2$
0	$n+2$
n	$d > n+2$

$n=2$ のとき $\pi=0$ なる $\bar{D}$ は次の4種に限る:
 π の $\bar{g}$, $\dim \text{Aut}(V)$ も含めてみると,

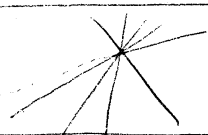
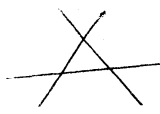
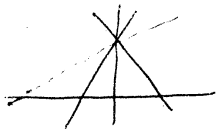
$\bar{g}$	$\dim \text{Aut}(V)^\circ$	$\bar{D}$
2	2	X
1	1	○
0	0	
0	0	

今日 $n=0$ の極小代数曲面の分類を心得てゐる人は、それ
 との余りの類々に興奮を抑えきれないに違いない。K3,
 Enriques, hyperelliptic, abel, とこの4種の分類とヒツシ
 と対応してゐる。

$n=3$ も試みると、

$\bar{g}$	$\dim \text{Aut}(V)^\circ$	$\bar{D}$
3	3	一枚と ∞ 平面, 残りは各座標平面
2	2 ?	$L + L + Q$
1	0 ?	$Q_1 + Q_2$
1	1 ?	$L + C^3$
0	0 ?	K3 $\vee$ double curve と t_2 4次曲面,

$\dim \text{Aut}(V)$ の計算はかなり大変で、殆んどできていない。
 例3. $\bar{D}$ を $\mathbb{P}^2$ 内の直線の和として χ の因子とする。

χ	$\bar{D}$	$\mathbb{P}^2 - \bar{D}$
$-\infty$		$\mathbb{C} \times \Gamma$
0		$\mathbb{C}^{**} \times \mathbb{C}^{**}$
1		$\mathbb{C}^{**} \times \Delta, \bar{\chi}\Delta = 1$
2	残り	

代数曲面の χ による分類の結果をおもいたすと、

χ	S
$-\infty$	$S \sim \mathbb{P}^1 \times \Gamma$ (双有理)
0	S は アーベル曲面 又は $K3$, χ は S の退化
1	$S \rightarrow \Delta$, elliptic 曲面
2	残り

これも、わくわくさせる程 類似が著しい。この類似をつき
 つめれば、固有でない対象に固有双有理幾何かできてよさそ
 うである。

例4. $T = \mathbb{C}^{*n}$ とし T 内の因子を $\overline{D}$ (> 0 , reduced) とする.

$\overline{\kappa}$	$T - \overline{D}$
0	T
$\overline{\kappa}$	$T_1 \times (\overline{D_2} - D_2)$, $\overline{\kappa}(\overline{D_2} - D_2) = \overline{\kappa} = \dim(\overline{D_2} - D_2)$
n	3通り

これは, 一般の因子について, 極めて簡明な $\overline{\kappa}$ による分類を与えている.

例5. $\overline{D}$ を $\mathbb{P}^n$ 内の超平面の和とすると,

$$\mathbb{P}^n - \overline{D} = \mathbb{C}^\alpha \times \mathbb{C}^{*\beta} \times V_1,$$

V_1 は同じ型の双曲型.

即ち, 例3が一昨化され, 分類論が一息にできています.

例4, 例5の証明には, 代数的小平次元の基本定理が有効に用いられ, それらを心得ておけば, 見通しのよい, とてもとてもやさしい証明ができます. しかし, これらはアフィン多様体なりで, 環論的にも取り扱えるはず.

$$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, 1/g] = R$$

と与える. $\tilde{x}_i$ と $\tilde{z}_i$

$$\dim \text{Aut}(R) \leq n$$

をまず示し、もし $\neq 0$ ならば g は単射になることを確かめる。またもし $a = \dim \text{Aut}(R)$ ならば、

$$R = k[\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_1^{-1}, \dots, \xi_m^{-1}, 1/g_i][\xi_1, \dots, \xi_a, \xi_1^{-1}, \dots, \xi_a^{-1}],$$

($a+m=n$)

とかけることを証明しなくてはよい。できることはわかってはいるから、精神力だけでできるかもしれない。?!!

例 6. $\mathbb{P}^2$ 内の因子 $\bar{D}$ (reduced) を考えるとき、

$$\bar{p}_g(\mathbb{P}^2 - \bar{D}) = g^*(\bar{D}),$$

$g^*(\bar{D})$ は $\bar{D}$ と正規交叉型 $\bar{D}^*$ と直し、そのグラフをつくるとき、
 $\sum g(\bar{D}_i^*) + h(\Gamma)$, $h(\Gamma) = \Gamma$ の cyclotomic number.

例 2 は $\bar{D}$ が既約のとき、

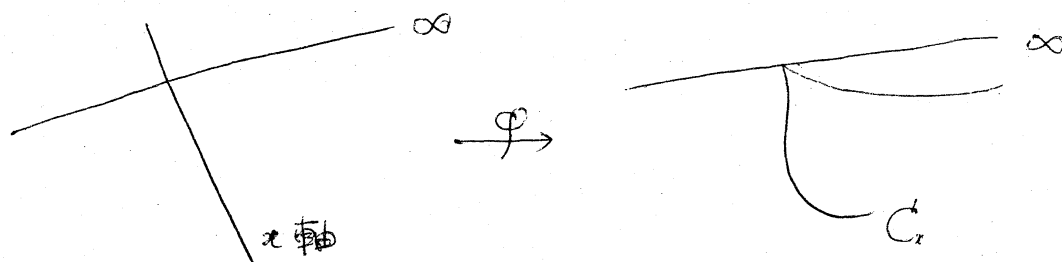
$$\bar{p}_g(\mathbb{P}^2 - \bar{D}) = 0 \iff \bar{D} \text{ は有理曲線であり、その特異点}$$

は単一素点的。

しかし $\bar{p}_m(\mathbb{P}^2 - \bar{D})$ はこのように簡明な値で表すことができないから、大変である。しかし、

上の条件を満たす $\bar{D}$ について、特異点 $n-2$ 個以下ならば、

$\bar{p}_g = -\infty$ は確認できる? こういふ、例をつくることは、やさしい。

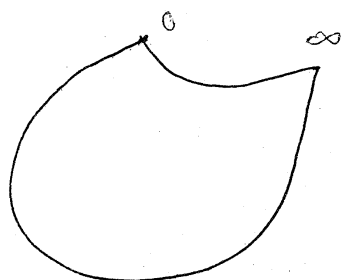


$\pi(\mathbb{P}^2 - \infty - x\text{軸}) = -\infty$ であり, $\mathbb{P}^2 - \infty$ の自己同型は極めて複雑. $z = w$, それを φ として,

$$\mathbb{P}^2 - \infty - x\text{軸} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2 - \infty - \varphi(x\text{軸})$$

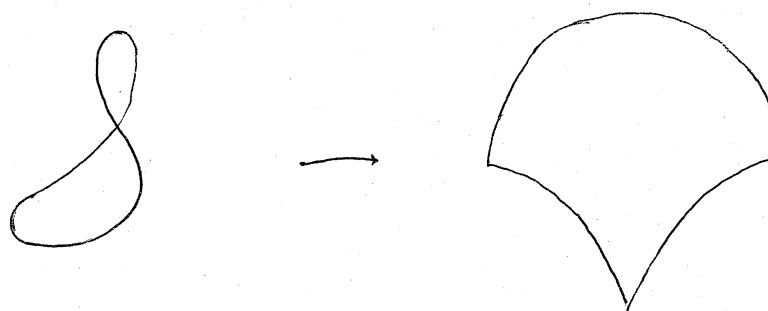
かゝる. $\pi(\mathbb{P}^2 - \varphi(x\text{軸})) = -\infty$.

また $x^p = y^q$ を射影化してみると, 2つの特異点をもつ



それをとり去ると $\mathbb{C}^*$ になる.

しかし, 通常2重点をもつ双曲線, 双射曲線は4つ



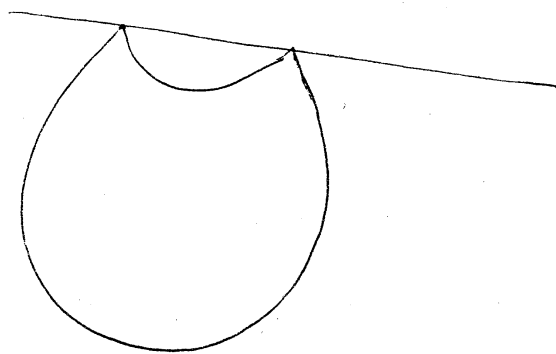
3つの尖

点をもつ.

が $\bar{p}_j$ と $\bar{q}_j$ に 型, $\bar{p}_j = 0$ なら $\bar{q}_j = 2$ となることから,
計算できる.

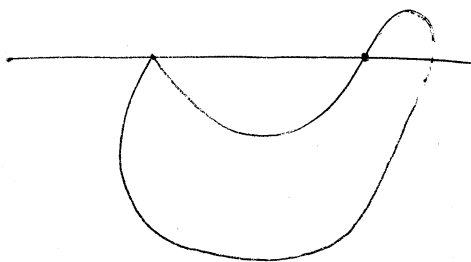
$\bar{q}_j = 0$ の型も結構多い

$V = \text{Spec } k[x, y, 1/(xy-1)]$ は $\bar{q}_j = 1$, $\bar{p}_j = 0$ をみたし,
 $\dim \text{Aut}(V) = 1$ である. これは図示すると,



洗濯ひもに, おしめを2個のクロスピンでとめると風びやれ
てこんなうねができる.

強いて V の類似を, さねすと, $b_1 = 3$, $K = 0$ の 小平面面は
 $m \in \mathbb{Z}$ でパラメタライズされるから, 1 にていて, これを D と
いふことになる. (しかし, M_1 の村馬氏ほか) かし変な例をも
つて, た $\text{Spec } k[x, y, 1/(x(xy-1)-\lambda)]$



これも $\kappa = 0$ だから, $\dim \text{Aut} = 0$. 実際 $\text{Aut } V = \{1\}$ のみとい
う。

注 1 $\mathbb{P}^2 - D \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2 - D'$ でも D と D' は一見全く異なる
ことがあるが, D' は複雑でも D は簡単になることがある。例
えば $g \in \mathbb{R}^n \in \mathbb{C}[x, y]$ とし, $\kappa(A^2 - V(g)) = -\infty$
なら $A^2 - V(g) = A' \times \mathbb{C}^* = A^2 - V(f)$, $A^2 = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$.

この意味で 変換論をさけることはできない。

例 7. $\mathbb{P}^2$ 内の Zariski 閉集合は非常に複雑で, それは, $\mathbb{P}^2$
が $\kappa = -\infty$ だからである。

$\kappa \bar{V} \geq 0$ であるば, $\bar{D} \subset \bar{V}$ は, そんな変換論
をもつ因子としても

$$\kappa(\bar{V} - \bar{D}) = \kappa(K + \bar{D}, \bar{V})$$

で計算できる。 $\bar{V}$ がアーベル多様体なら, 例 4 と類似のこと
が成り立つ。

6. 代数的小平次元の基本定理をやろう。ただし、注意せよ。

① V_1, V_2 とともに n 次元 $f: V_1 \rightarrow V_2$ と支配的独有理写像とすると,

$$\overline{P}_m V_1 \geq \overline{P}_m V_2, \quad \overline{q} V_1 \geq \overline{q} V_2, \quad \pi V_1 \geq \pi V_2.$$

とくに V_1 が V_2 の Zariski 閉集合なら, これが結論できる。

② V_1, V_2 とともに n, m 次元とすると,

$$\overline{q}(V_1 \times V_2) = \overline{q} V_1 + \overline{q} V_2,$$

$$\pi(V_1 \times V_2) = \pi V_1 + \pi V_2,$$

$$\overline{P}_m(V_1 \times V_2) = \overline{P}_m(V_1) \cdot \overline{P}_m(V_2).$$

定理 1. $\pi V = \pi \geq 0$ とする。固有双有理正則写像 $\mu: V^* \rightarrow V$, 既約 π 次元構成集合 W , $f: V^* \rightarrow W$ と μ 全射正則写像があり, その一般のファイバー V_w^* は既約で,

$$\pi(V_w^*) = 0.$$

定理 2. $V_1 \rightarrow V_2$ と etale 写像とする。このとき,

$$\pi V_1 = \pi V_2.$$

定理 3. $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ と支配的とする f の一般ファイバーの連結成分を $V_{1,u}$ とおくと,

$$\pi V_1 \leq \pi V_{1,u} + \dim V_2.$$

これは, 簡単な事実で証明も難しくはないが, 諸例の研究

完に於ても極めて有効である。

7. いくつかの定理をあげる。

定理4. $\pi V \geq 0$ とおいた非特異多様体 V とする
 $f: V \rightarrow V$ を支配的とすると, f は étale になる.

次の定理は少し歴史をもっている。

定理5. さらに $\pi V = n$ とすると f は同型. もう少し
 条件をおいて,

V_1, V_2 を n 次元 $\overline{P}_m V_1 = \overline{P}_m V_2$ とおいた $\pi V_2 = n$ とす
 る. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を双有理で支配的とする. このとき f は,
 双有理.

$n=1$, $\mathbb{C}$ の場合 H. Weber 1853 ?

$n=2$ " Andreotti 1950 ?

n " K. Peters 1968 (Archiv)

また この定理は, 直線の補集合の研究で, 2年前に著者
 のいた奇妙な事実を説明する.

$\mathbb{A}^1$ の環のうつすと, 次のことを例えは意味する

$$k[x, y, \frac{1}{x^l y^l - 1}] \xrightarrow{\varphi} k[x, y, \frac{1}{x^l y^l - 1}]$$

とすると, $f = \varphi(x)$, $g = \varphi(y)$ とおくと

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = c(x^l y^l - 1)^m.$$

のみならず $\alpha^p \beta^q \neq 0$ かつ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と $f = \alpha, g = \beta$ には
交代交換がある。たろうか? 正しい 3A10

定理 6 $\pi V \geq 0$ とすると, $\text{Aut}(V)^0$ は, 準 Abel 多様体

定理 7 $\pi V \geq 0, \dim \text{Aut}(V)^0 \geq \dim V$ なら $V = \text{Aut}(V)^0$
は準 Abel 多様体.

定理 8 $\pi V = \dim V$ なら, $f: V \rightarrow V$ は強有理支配
的とすると, 固有双有理になり, したがって群 $\text{PBir} V$
は有限群となる.

この定理は, $\pi V = \dim V$ なら, 一般型であることが証明
ある.

* $\bar{V}$ 完備非特異, $\bar{D}$ は正規交叉で, $K + \bar{D} : \mathbb{A} = \mathbb{P}^n$
としよう. このとき $f: V = \bar{V} - \bar{D} \hookrightarrow \bar{V}$, 支配的. なら f
は $\bar{V}$ の自己同型に延長される.

$\bar{V} = \mathbb{P}^n$, $\bar{D}$ 正規交叉の超平面とすると, すぐに応用
できて, 2.(2) の例の一般化の証明とよえる.

この証明は極めて簡単であって, 代数 n -形式 $\alpha, f^* \alpha$ は
代数 n -形式にうつることに注目してやればよい.

8. いくつかの応用をあげる.

$$(i) \quad f \in k[x_1, \dots, x_n],$$

$$\kappa \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n, 1/f] < n \quad \text{とする.}$$

任意の $m \in \mathbb{Z}$, 代数的体 M :

$$y^m = f(x_1, \dots, x_n)$$

をつくると, κ の小平次元 $= -\infty$.

証明 $\mathbb{P}^n$ の M 内での正規化を $\bar{V}$ とすると, $\varphi: \bar{V} \rightarrow V$ は covering. $\bar{V}$ の特異点を除去し, また $\bar{V}$ とおく. $\varphi^*(R_\varphi)$ は $L + V(f)$ (L は ∞ 平面) に入る. κ を B と置き, φ^*B が正規化又になるようにモノイダル変換をくり返しておく.

$$0 \leq \kappa V = \kappa \bar{V} \leq \kappa(\bar{V} - \varphi^*(B))$$

$$= \kappa(\bar{K} + \varphi^*B, \bar{V})$$

$$\geq \kappa(\varphi^*B, \bar{V}) \quad (\kappa(V) \geq 0 \text{ より})$$

$$= \kappa(\varphi^*B, \bar{V}) = \kappa(B, \mathbb{P}^n) = n.$$

$$\text{一方 } \kappa(\bar{V} - \varphi^*(B)) = \kappa(\mathbb{P}^n - B) = \kappa(A^n - V(f)) < n.$$

これで矛盾した.

以上の計算で, $\kappa(D, \bar{V})$ についての次の簡単な事実を用いた.

$$1) \quad \kappa(D_1, \bar{V}) \geq 0, \dots, \kappa(D_r, \bar{V}), \quad p_1, \dots, p_r > 0 \text{ なら,}$$

$$\kappa(\sum D_i, \bar{V}) = \kappa(\sum p_i D_i, \bar{V}).$$

$$2) \kappa(D, \bar{V}) \geq 0 \quad \text{by}$$

$$\kappa(D+E, \bar{V}) \geq \kappa(E, \bar{V}),$$

$$3) f: \bar{V}_1 \rightarrow \bar{V}_2 \quad \text{with } (f^* \bar{D}, \bar{D} \text{ effective})$$

$$\kappa(f^* \bar{D}, \bar{V}_1) = \kappa(\bar{D}, \bar{V}_2)$$

$$\stackrel{\uparrow -\pi}{=} \kappa(\bar{f}^* \bar{D}, \bar{V}_1) \quad \text{since } \bar{f}^* \bar{D} = (f^* \bar{D})|_{\text{red.}}$$

is the same, the same algorithm is used.

(ii) V is a general member of a family $V' \rightarrow V$ is a regular

family.

$$\bar{\rho}_m^+(V) = \bar{\rho}_m \text{Reg } V', \quad \kappa^+(V) = \bar{\pi} \text{Reg } V',$$

$$\bar{\rho}_m^\#(V) = \bar{\rho}_m \text{Reg } V, \quad \kappa^\# V = \bar{\pi} \text{Reg } V$$

is the same, the same algorithm is used, κ^+ is a regular family.

V is a family, $\mu: V^* \rightarrow V'$ is a family, V' is a family.

$$\begin{array}{ccccc} V^* & \xrightarrow{\mu} & V' & \longrightarrow & V \\ \cup & & \cup & & \\ \bar{\mu}^* \text{Reg } V' & & \text{Reg } V' & & \end{array}$$

$$\text{is the same, } \bar{\pi}(\bar{\mu}^* \text{Reg } V') = \bar{\pi} \text{Reg } V' = \kappa^+ V' \quad \text{by}$$

$$\bar{\pi}(\bar{\mu}^* \text{Reg } V') \geq \bar{\pi} V^* = \bar{\pi} V, \quad \text{by}$$

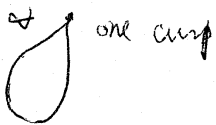
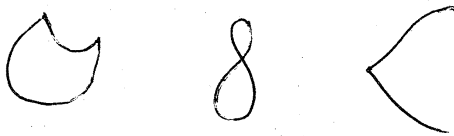
$$\bar{\pi} V \leq \kappa^+ V \leq \kappa^\# V.$$

χ^+ , $\chi^\#$ により, V の特異点 = μ の構造が解明されることと期待される. たとえば,

定理 $\chi^+ V \geq 0$, $\dim \text{Aut}(V)^0 \geq n = \dim V$ ならば, V は準 Abelian 多様体.

とくに, V が定常のとき, V は Abelian 多様体の結論がけられる.

$\dim V = 1$ とすると.

$\chi^\#$	
$-\infty$	$\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ 
0	$\mathbb{C}^*$, elliptic curve 
1	残り

このようにして $\chi^- \leq \chi^\#$ が大きくなるにつれ, V の構造が複雑化する.

$\chi^\# V = n$ ならば V は $\text{Aut}(V)$: 有限群をみたすから, たとえば特異超曲面 $V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の $\chi^\#(V)$ を計算する

ことは面白い).

例 $\overline{V}: z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0$ in $\mathbb{P}^3$, $V = \overline{V} - \infty$ 平面

$\kappa^+(V)$	d	
1	≥ 4	$\kappa V = -\infty$
0	3	$\kappa^+ \overline{V} = -\infty$
$-\infty$	≤ 2	

$\text{Aut}(V)$ として V の母接方向に G_m が作用する.

$\kappa^+ V = 1$ は, $\text{Aut}(V)^\circ$ は実はそれしかないことを意味する. $\kappa^+ V = 0$ のとき $\dim \text{Aut}(V)^\circ = 2$ なら, V は Abel 多様体となり矛盾. よって $\dim \text{Aut}(V)^\circ = 1$. しかも $\kappa^\# \overline{V} = -\infty$. $\downarrow$ Note

たとえば特異 4-次元曲面 S で $\kappa^\# S = 0$ のものを決定することは, 全く興味ないらしい.

一般に, X^{n+1} を非特異とし, $V \subset X^{n+1}$ を完備 n -次元多様体, $\pi_m(V/X) = \dim H^0(V, m(K_X + [V]))|_V$ とおくとき,

$$\pi_m(V/X) \geq P_m^\#(V) \geq P_m(V)$$

が成立つ. $n=2$ のとき, $\kappa V \geq 0$ かつ,

$\forall m: \pi_m(V/X) = P_m(V) \iff V$ は negligible 特異点のみ,

が成立していることが知られている.

① 話ではもうかえていて赤屋氏に教わった.

応用例をあげるために、小平次元の他の variations を与える必要がある。 $\bar{D}$ はやはり正規交叉型として、

$$\underline{\kappa} V = \max_{\alpha > \beta > 0} \kappa(\alpha \bar{K} + \beta \bar{D}, \bar{V}),$$

$$\bar{\kappa} V = \max_{0 < \alpha < \beta} \kappa(\alpha \bar{K} + \beta \bar{D}, \bar{V})$$

とかくとこれらは、 V のみに依存して、 $\underline{\kappa} V \leq \bar{\kappa} V \leq \bar{\kappa} V$.

1. $\underline{\kappa} V \geq 0$ なら $\underline{\kappa} V = \bar{\kappa} V = \bar{\kappa} V$,

2. $\underline{\kappa} V = \dim V \iff \bar{\kappa} V = \dim V$,

3. $\bar{V}_1$ を V の他のコンパクト化で、 $\bar{D}_1 = \bar{V}_1 - V$ は

任意の特異性を許すとしても) :

$$\bar{\kappa} V = \max_{0 < \alpha < \beta} \kappa(\alpha \bar{K}_1 + \beta \bar{D}_1, \bar{V}_1).$$

いふかえると、 $\bar{\kappa}$ の計算には、正規交叉の条件は不要になる。これらの証明は概念上は確定すればやさしい。 $\underline{\kappa} V$ は酒井の最近のコンパクトでない多様体上の解析的研究から自然に導かれて定義した、酒井の意味の小平次元と一致する。

たとえば、 $\mathbb{P}^n - D = V$ とする。

$$\underline{\kappa} V \geq 0 \quad \text{なら} \quad \underline{\kappa} V = \bar{\kappa} V = \kappa(K_p + D, \mathbb{P}) \geq 0$$

た-れ-ら、 $\deg D \geq n+1$. $>$ なら $\underline{\kappa} = \bar{\kappa} = n$. さて

$$\deg D = n+1 \quad \text{とすると} \quad \bar{\kappa} V = \kappa(K_p + \beta D, \mathbb{P}) \quad \beta \rightarrow \infty$$

とすると矛盾。よって、次の結果をうる。

$$\kappa V = \begin{cases} n \\ -\infty \end{cases} \iff \bar{\kappa}V = n.$$

これによるとスうば、きりきした左肩がでさう：

D を既約, $\bar{\kappa}V < n$ とすると, Residue により,

$$\bar{P}_m V \leq P_m^\#(D), \quad \bar{\kappa}V \leq \kappa^\# D,$$

が成立つ? また $\bar{P}_q V$ は極めて組合せ論又は高次元の
うっ的解釈をもつ. (対数的算術種数)

(おわりに).

紙数の関係で、準 Albanese 写像などの話題を割愛した。
しかし、代数多様体の構造は、なんとなくわがさうよりな
期待をどうもするともたさぬ理想をもたなくならずは、要
しいことではないだろう。

2月27日 終り 京都にて

「そして追記」対数的小平次元のきりかけとな、たこととも
も思ひ出して、序にかいているうちに、ひどく感傷的になっ
てきた。題していわく、固有双有理幾何入門。この門に入
ていき、さらに深く入りこむと、どんな世界があるだろう
か。それは、勿論わからないが、消失定理はもはや消失し、
コホモロジーも氷づけとなり、スキームさえもどこかにゆすり
わたした、そんな世界のような気がする。