

反応吸収系の Marangoni 不安定性における 表面変形の効果

和歌山高専 坂田 光雄

舟田 敏雄

§ 1. はじめに

表面張力勾配 (Marangoni 効果) による対流不安定に関する理論的研究は、Bénard の実験を契機に、Pearson¹⁾ と Sternling & Scriven²⁾ の行った解析に始まる。その後、伝熱および物質移動の存在する系において、多くの理論的³⁻⁷⁾ および実験的取り組みがなされてきている。

一方、反応吸収系において、Brian⁸⁾ は、モノエタノールアミン (MEA) 水溶液による炭酸ガスの吸収速度が従来の理論値にくらべ異常に大きい事を見だし、その原因を表面張力勾配による界面攪乱の発生によるものと推論した。それ以来、幾つかの反応吸収系で、同様な吸収速度の増加が報告されている^{9,10)}。また、流下液膜内の攪乱パターンは、longitudinal roll cell であることが光学的に観察されている¹¹⁾。しかし、反応を伴う系での理論的取り扱いは少なく、液々系での

Ruckenstein¹²⁾ と気液系の Shah¹³⁾ および今石¹⁴⁾ の研究があるにすぎない。

本報告では、反応系として、ガス A を吸収し、 $A + (B) \xrightarrow{k} nP$ なる擬 1 次不可逆反応が定常的に起こっている等温静止液層を考え、線型安定理論により、中立安定限界を支配する種々の因子を考察する。特に、今石¹⁴⁾ のモデルを拡張して、表面変位を考慮することにより、表面張力および重力が安定性におよぼす効果を明らかにする。

§2. 基礎方程式と問題の定式化

厚さ δ の液層が固体壁上に静止しているとし、座標系を図 1 のように取る。表面からガス A を吸収し、液層内で $A \rightarrow nP$ なる反応が生じている。溶質ガス濃度を C_A 、生成物 P のそれを C_P で表わし、反応速度は、各々 $r_A = -kC_A$ 、 $r_P = nkC_A$ (k : 反応速度定数) とする。この時、液層内温度 T は一様であり、密度 ρ 、粘性係数 μ 、拡散係数 D_A 、 D_P などの物性値は一定

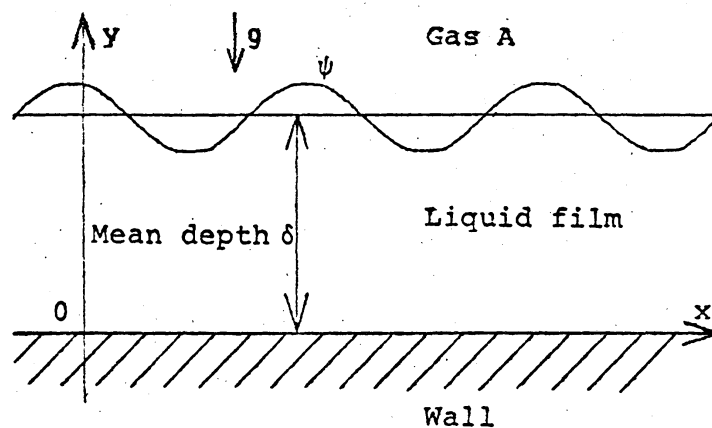


図 1

とする。この系の基礎方程式は、次の連続の式、運動方程式および拡散方程式で構成される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (\nu = \mu/\rho) \quad (2.2)$$

$$\frac{DC_A}{Dt} = D_A \nabla^2 C_A - k C_A \quad (2.3)$$

$$\frac{DC_P}{Dt} = D_P \nabla^2 C_P + n k C_A \quad (2.4)$$

$$\left\{ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}$$

ただし、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル (u, v, w) 、 P は圧力、 $\mathbf{g}$ は重力ベクトル $(0, -g, 0)$ である。(2.1)～(2.4)より、系は $[u, P, C_A, C_P]$ で表わされており、問題は、静止した定常反応系 $[0, P, \bar{C}_A, \bar{C}_P]$ における微小攪乱 $[u', P', C_A', C_P', \psi]$ の安定性を調べることに要約される。

この問題の境界条件について、今右らにならう、次の仮定を導入する。(I)ガス吸収の気相側物質移動抵抗は無視でき、 C_A は界面で飽和溶解度 $\bar{C}_{Ai}$ (一定)に保たれている。(II)反応生成物是不揮発性で、気相への放散はない。(III)気液表面張力 $\sigma = \sigma(C_A, C_P, T)$ の変化を

$$d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_A} \right) dC_A + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \right) dC_P \quad (2.5)$$

とする。(IV)液層底部($y=0$)でA, P両成分の濃度に対する条件

として

$$\text{Case (i)} \quad C_A = C_P = 0$$

$$\text{Case (ii)} \quad \partial C_A / \partial y = C_P = 0$$

$$\text{Case (iii)} \quad C_A = \partial C_P / \partial y = 0$$

$$\text{Case (iv)} \quad \partial C_A / \partial y = \partial C_P / \partial y = 0$$

について考える。なお、Case (i)は、今右と同じである。

静止定常反応系 $[0, \bar{P}, \bar{C}_A, \bar{C}_P]$ は、 y のみの関数として、(I) ~ (IV) の仮定および (2.2) ~ (2.4) より、次のようになる。

$$\bar{P} = P_0 + \rho g (\delta - y) \quad (P_0 : \text{ガス圧力}) \quad (2.6)$$

< Case (i) >

$$\bar{C}_A = \bar{C}_{Ai} \sinh(\gamma \eta) / \sinh \gamma \quad (\eta = y / \delta) \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_P &= n \bar{C}_{Ai} (D_A / D_P) \{ \gamma \eta \coth \gamma - \sinh(\gamma \eta) / \sinh \gamma \} \\ &= \bar{C}_{Pi} \beta \{ \gamma \eta \coth \gamma - \sinh(\gamma \eta) / \sinh \gamma \} \quad (2.8a) \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} \beta = (\gamma \coth \gamma - 1)^{-1}$$

< Case (ii) >

$$\bar{C}_A = \bar{C}_{Ai} \cosh(\gamma \eta) / \cosh \gamma \quad (2.7b)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_P &= n \bar{C}_{Ai} (D_A / D_P) \{ \gamma \eta \sinh \gamma + 1 - \cosh(\gamma \eta) \} / \cosh \gamma \\ &= \bar{C}_{Pi} \beta \{ \gamma \eta \sinh \gamma + 1 - \cosh(\gamma \eta) \} / \cosh \gamma \quad (2.8b) \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} \beta = \cosh \gamma / (\gamma \sinh \gamma + 1 - \cosh \gamma)$$

式中、 $\gamma (= \delta \sqrt{k / D_A})$ は、反応パラメータと呼ばれ、 $\gamma < 1$ の場合おだやかな反応、 $\gamma > 1$ は速やかな反応である。また

、 $\beta (=n D_A/D_p \cdot \bar{C}_{Ai}/\bar{C}_{pi})$ は y のみの関数である。仮定(IV)の条件で、Cases (iii), (iv) は定常解を持たない。

定常解(2.6) ~ (2.8) および $[u', p', C_A', \phi']$ を(2.1) ~ (2.4) に代入し、二次以上の微少量を無視すると、攪乱に対する線型方程式系が得られる。また、変位表面 ($y = \delta + \psi(x, z, t)$) における境界条件は、仮定(I) ~ (III) および $|\psi/\delta| \ll 1$ により Taylor 展開して整理すると、 $y = \delta$ において

$$C_A' + \frac{d\bar{C}_A}{dy} \cdot \psi = \frac{\partial C_p'}{\partial y} + \frac{d^2\bar{C}_p}{dy^2} \cdot \psi = 0 \quad (2.9)$$

$$v' = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_p} \right) \left(\frac{\partial C_p'}{\partial x} \right) \quad (2.11)$$

$$-\rho g \psi + p' - 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} + \sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0 \quad (2.12)$$

$$\mu \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_p} \right) \left(\frac{\partial C_p'}{\partial z} \right) \quad (2.13)$$

となる。(2.10) は表面の運動学条件、(2.11), (2.13) は接線応力、(2.12) は法線応力の連続性の条件である。尚、(2.9) により(2.11), (2.13) には、 σ に対する C_A の依存性が現れ、ことに注意する必要がある。また、底面においては、仮定(IV) に示した条件及び $u' = 0$ を用いる。

ここで、以下の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} (\xi, \eta, \zeta) &= (x/\delta, y/\delta, z/\delta) \\ \tau &= D_p t / \delta^2, \quad \psi^* = \psi / \delta \\ [u^*, p^*, c_A^*, c_p^*] &= [\delta u / D_p, p / \rho g \delta, c_A / \bar{c}_{A_i}, c_p / \bar{c}_{p_i}] \end{aligned} \right\} (2.14)$$

また、(2.1), (2.2) より u^*, w^*, p^* を消去して、 v^* のみで基礎方程式および境界条件が整理できることに留意し、更に、攪乱が x および z 軸方向に周期的であるとして Fourier 分解すると、

$$\{v^*, c_A^*, c_p^*, \psi^*\} = \{f(\eta), g(\eta), h(\eta), s\} e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \zeta) + \lambda \tau} \quad (2.15)$$

と表わされる。

この問題では、Exchange of Stability の仮定が成り立つという保証はなく、Imaginary (λ) きの非定常モードにも興味があるが、まず定常モード ($\lambda = 0$) の場合を計算する。

結局、 f, g, h に関する方程式と満たすべき境界条件は、次の様に表式化される。

$$(D^2 - \alpha^2)^2 f = 0 \quad (2.16)$$

$$(D^2 - \alpha^2 - \gamma^2) g = \frac{1}{L} \cdot f \cdot D \bar{c}_A^* \quad (2.17)$$

$$(D^2 - \alpha^2) h = f \cdot D \bar{c}_p^* - \gamma^2 \beta g \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f &= g + (D \cdot \bar{c}_A^*) \cdot s = D h + (D^2 \bar{c}_p^*) \cdot s = 0 \\ D^2 f &= \alpha^2 M_R h \\ (D^2 - 3\alpha^2) D f &= N_c^{-1} (N_g + \alpha^2) \alpha^2 s' \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (2.19) \\ \text{at } \eta=1 \\ (2.20) \\ (2.21) \end{matrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f = Df = 0 & \text{at } \eta = 0 \quad (2.22) \\ \text{Case (i) ; } g = h = 0 & \text{at } \eta = 0 \quad (2.23a) \\ \text{Case (ii) ; } Dg = h = 0 & \text{at } \eta = 0 \quad (2.23b) \end{array} \right.$$

ここで, $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_3^2$, $D = d/d\eta$.

式中の無次元パラメータは,

$$M_R = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial C_P} \right) \frac{\bar{C}_P \cdot \delta}{\mu \cdot D_P} \quad (\text{Marangoni number})$$

$$N_c = \frac{\mu D_P}{\alpha \delta} \quad (\text{Crispation number})$$

$$N_g = \frac{\rho g \delta^2}{\alpha} \quad (\text{Weber number})$$

$$L = D_A / D_P$$

である。尚、定常モードは、Schmidt number ($Sc = \nu / D_P$) に依存しない。非定常モードにおいて Sc は重要な役割を果たすものと考えられるが、詳しい解析を待たねばならない。

§ 3. 表面変形について

境界条件 (2.19) 第一式と (2.22) を満たす (2.16) の解 f は,

$$f = C \left[\{ 1 + (\alpha \cosh \alpha - 1) \eta \} \sinh \alpha \eta - \alpha \eta \cosh \alpha \eta \right] \quad (3.1)$$

(C : 積分定数) である。 f を (2.21) に代入すると、表面変位の振幅 δ が求められる。

$$S = -C \frac{2\alpha^2 N_G}{(N_G + \alpha^2) \sinh \alpha} \quad (3.2)$$

上式で、 $N_G = 0$ は、表面変位のない平滑な場合となり、今石のモデルと一致する。 $N_G \neq 0$ の時、表面変位は、表面張力波 ($N_G = 0$) と重力波 ($N_G \neq 0$) との合成からなっている。

表面変位と流動の関係は、 f と S の符号を調べることにより判明するが、Scriven³⁾ は、 S と $(df/d\eta)_{\eta=1}$ が同符号であれば表面上昇時で下降流であり、異符号であれば逆に表面上昇で上昇流であることを指摘している。(3.1), (3.2) からそれは、

$$S / \left(\frac{df}{d\eta} \right)_{\eta=1} > 0 \quad ; \text{ if } N_G + \alpha^2 > 0 \quad (3.3)$$

$$S / \left(\frac{df}{d\eta} \right)_{\eta=1} < 0 \quad ; \text{ if } N_G + \alpha^2 < 0 \quad (3.4)$$

となる。通常 $N_G > 0$ であり、(3.3)によって示されるように、表面張力勾配に起因する不安定の機構は、平衡位置より表面が下降した所で上昇流となる。また、天井に付着した液層のような重力が逆向きに作用した場合には、 $N_G < -\alpha^2$ のとき、(3.4)に示されるように、表面上昇時に上昇流となる。これは、浮力に起因する対流機構と同様な結果である。しかし、本解析では重力波がこの効果を起こすので、本質的には別な機構である。特に、 $N_G > 0$ において、浮力不安定が

Marangoni不安定に卓越するとき、表面変位と対流の運動方向が同位相であるのに対し、ここでは、 $N_g < 0$ においてのみそれが現れる。この事は、著者らの知る限りでは、Smith⁶⁾によって初めて解析されたものである。

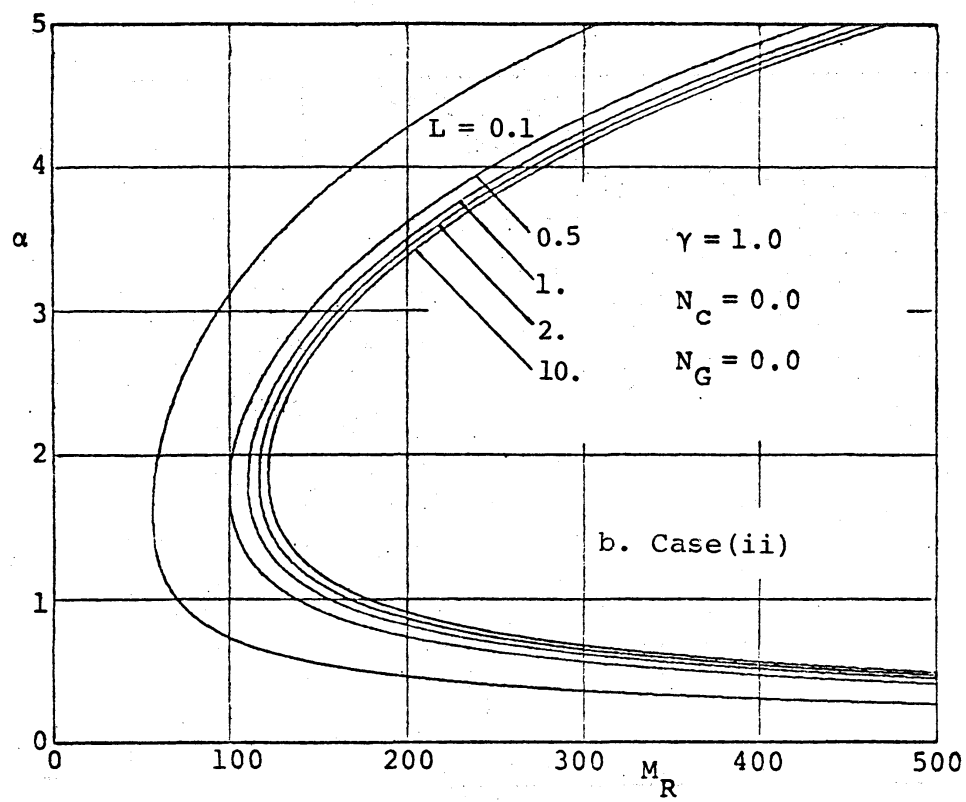
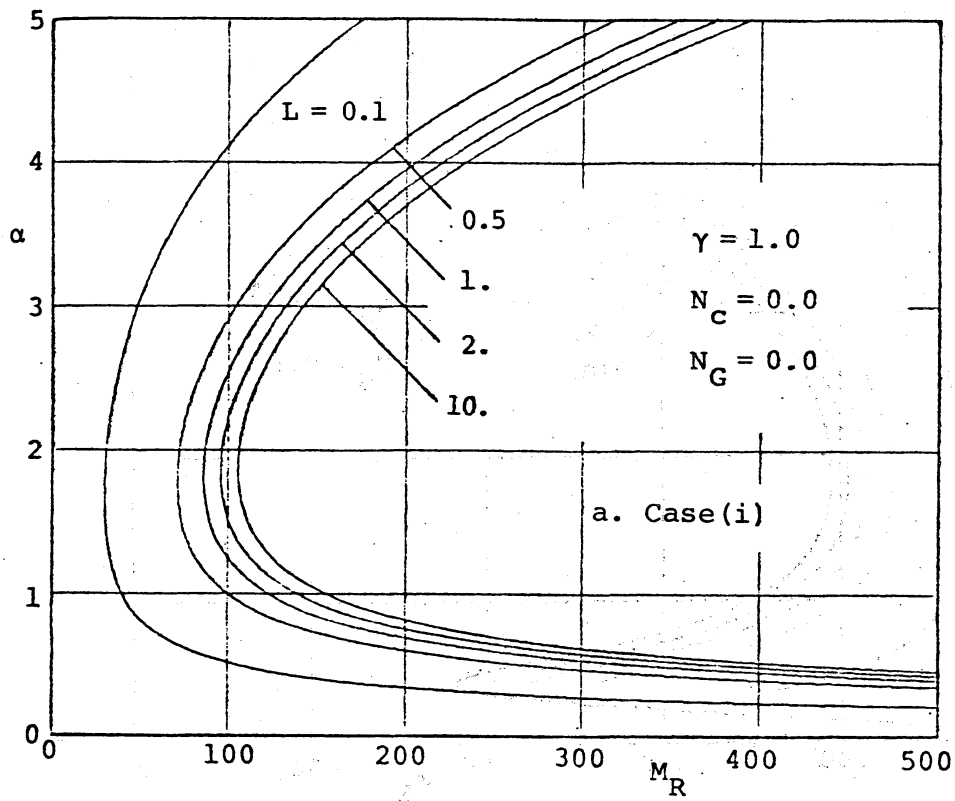
§ 4. 計算結果および考察

解 f , h を (2.20) に代入し、固有値 M_R を求める。

$$M_R(\alpha, \gamma, L, N_c, N_g) = 2c \left(\frac{1}{\sinh \alpha} - \frac{\cosh \alpha}{\alpha} \right) / h(1) \quad (4.1)$$

この M_R と波数 α との関係は、拡散係数の比 L をパラメータとして、図 2 ～ 7 に示す。各中立曲線の右側が不安定領域である。図 2 は、 $N_c = N_g = 0$ で平滑表面に対応し、 a は Case (i) の液層底部の条件で今右らの解析と同一であり、 b は Case (ii) について示している。図から、 α が約 1.5 ～ 2.0 で臨界 Marangoni 数 (M_{RC}) を与え、また、 L が小さい (溶質がスの D_A より生成物の D_p が大きい) ほど中立曲線は左に寄り、不安定化している。 a と b の比較をすると、 b の方がわずかに安定で、かつ α が大きくなると共に M_R の変化が大きい。しかし、全般的な傾向はよく似ているので、Case (i) について以下示し、後に特徴と比較する。

図 3, 4 は、 $\gamma = 1$, $N_g = 0$ で、 N_c の効果を示している。図 2.a



12 2

10

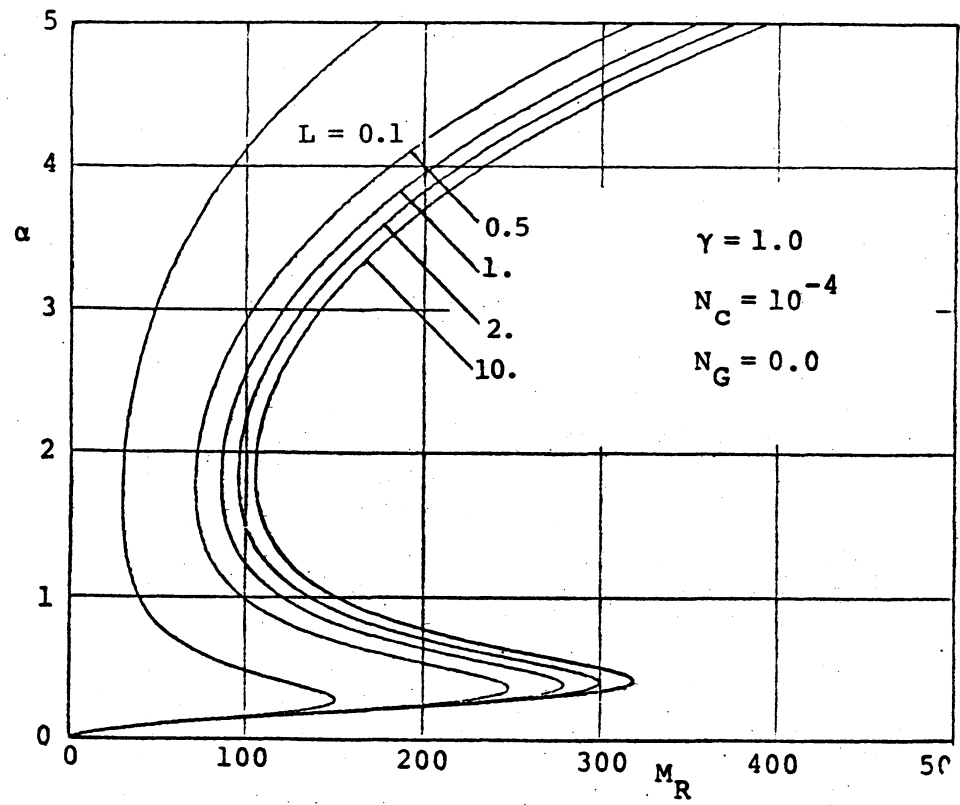


图 3

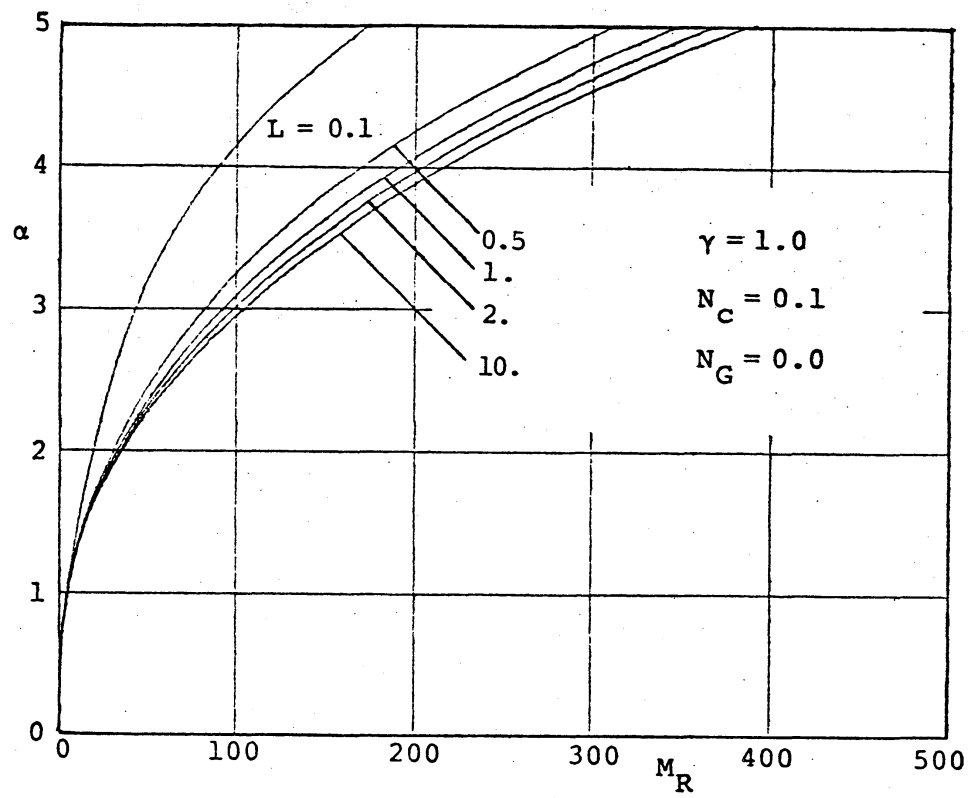


图 4

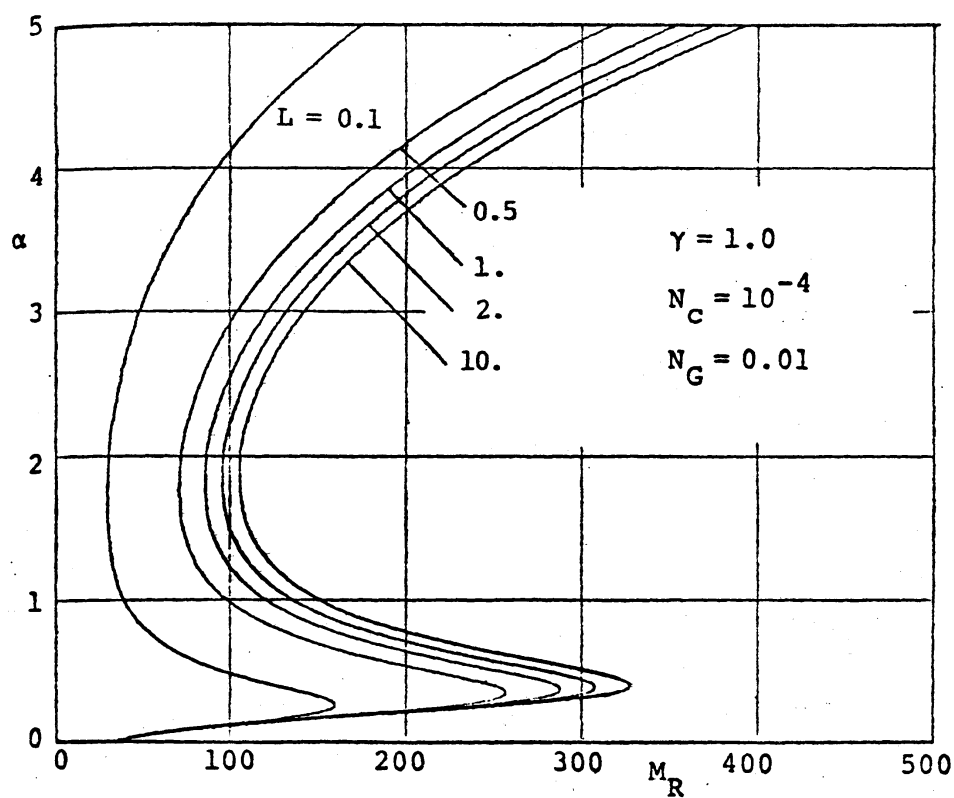


图 5

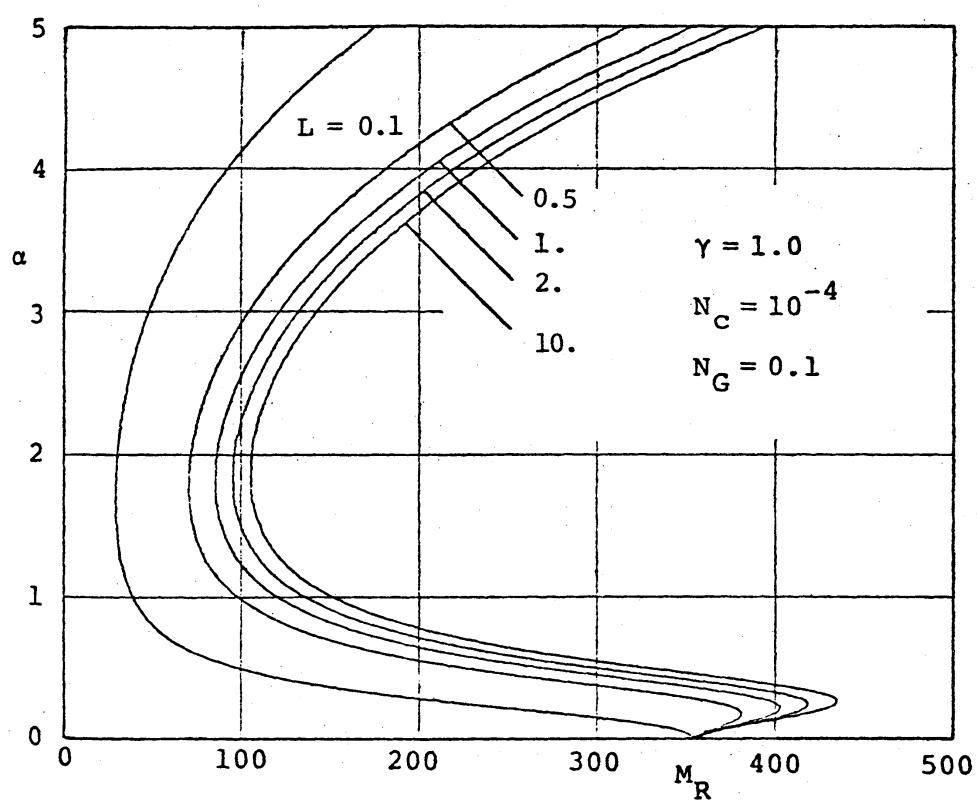


图 6

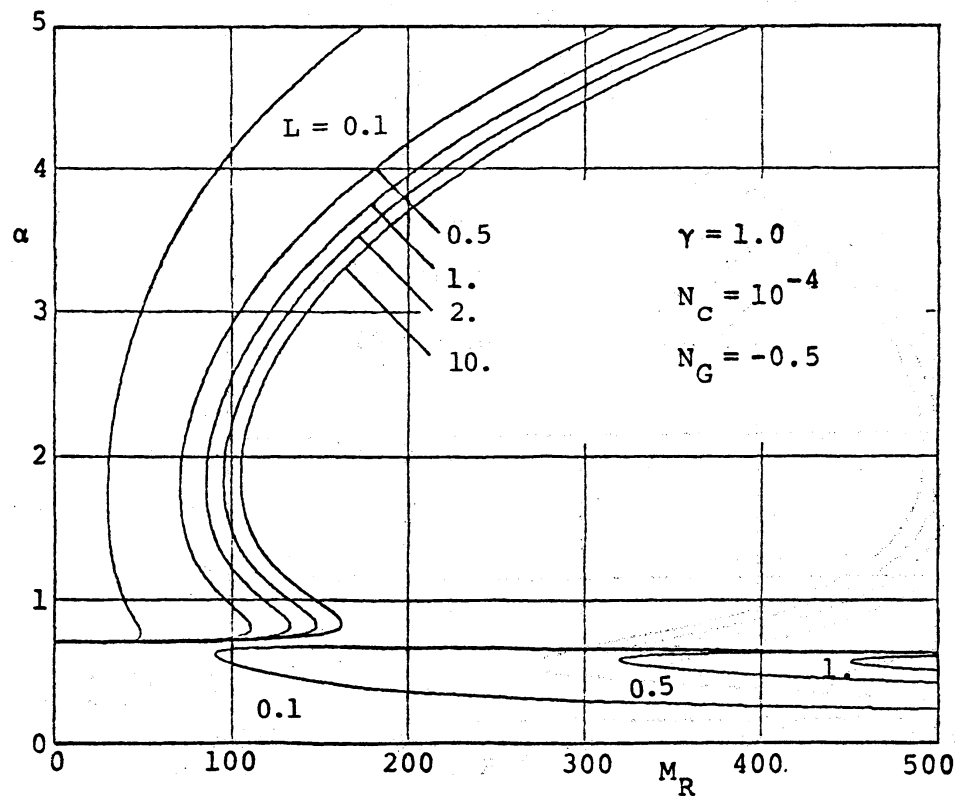


図 7

と比べると、低波数域に顕著な違いが現われている。特に、 M_{RC} は常に $\alpha=0$ で $M_{RC}=0$ となっている。また、 N_C の値が大きいほど、平滑表面の場合からずれ、不安定化する。

図5, 6は、 N_G の効果を調べるため、 N_G が各々 0.01, 0.1 について示したものである。この場合も低波数域で違いが生ずるが、図3 ($N_G=0$) で $\alpha=0$ の時 $M_R=0$ であったものが、 N_G と共に大きな値の M_R に変わる。つまり、 N_G は低波数域において安定化作用を持っている。この事は、Scriven⁵⁾ の論文中で Benjamin に指摘されていたが、解析は Smith⁶⁾ による。そして、本解析により、反応吸収系においても熱対流と同様な結果

が得られた。

図7に N_q が負の場合の例を示す。これは、§3で議論した天井下面に付着した液層に対応する。 $N_q = -0.5$ について調べると、 $\alpha^2 = 0.5$ を境に異なった構造を持つている。これは、(3.4)に示されるように、表面変位と対流が異なった様相を呈することによって起因している。また M_{RC} は負の値を持つ。

以上の結果から、表面変位による効果は低波数域で顕著な振る舞いを示すことが明らかであるから、 $\alpha \rightarrow 0$ についての M_R の漸近解を求める。

$\langle S \neq 0 \rangle$

$$M_R \sim \frac{2}{3} (N_q + \alpha^2) \frac{E}{N_c} + \frac{N_q}{N_c} \cdot O(\alpha^2) \quad (4.2)$$

$$\text{Case (i); } E = \frac{\gamma \cosh \gamma - \sinh \gamma}{\gamma (\cosh \gamma - \gamma / \sinh \gamma)} \quad (4.3a)$$

$$\text{Case (ii); } E = \frac{\gamma \sinh \gamma - \cosh \gamma + 1}{\gamma (\sinh \gamma - \tanh \gamma + \gamma / \cosh \gamma)} \quad (4.3b)$$

$\langle S = 0 \rangle$

Case (i);

$$M_R \sim \frac{3360L}{11(1+3L)} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \quad (\gamma \rightarrow 0) \quad (4.4a)$$

$$M_R \sim 80/\alpha^2 \quad (\gamma \gg 1) \quad (4.5a)$$

Case (ii);

$$M_R \sim 120/\alpha^2 \quad (\gamma \rightarrow 0) \quad (4.4b)$$

$$M_R \sim 80/\alpha^2 \quad (\gamma \gg 1) \quad (4.5b)$$

表面変位が存在する($S \neq 0$)場合、 $\alpha = 0$ での M_R は、Cases (i),

(ii)とも $N_g/c (=N_g/N_c)$ と γ に依存し、 L には関係しないことがわかる。なお、 N_g/c は ρ を含んでいない。 E は、Cases (i), (ii)とも $E = 0.5 (\gamma=0)$ から $E=1 (\gamma \rightarrow \infty)$ となる γ の単調関数である。図8からわかるように、Case(ii)より(ii)の E の方が大きく、その差は γ が約2で最大である。この差は、境界条件の違いに因るもので、 $\gamma \ll 1$ では、 $h(1) \sim -\beta(g(1)-g(0)) \sim \frac{-1}{\gamma-1}(g(1)-g(0))$ と評価できて、 g の条件の違い ((2.22a) と (2.22b)) が主要因となっている事が示される。また、 $\gamma \gg 1$ では、 $g(0) \sim 0$ (Case(ii)) となり、両者共漸近形 $E = \frac{\gamma-1}{\gamma}$ に近づく。

一方、平滑表面 ($S=0$) について、 $\alpha \rightarrow 0$ の分枝の漸近解は、

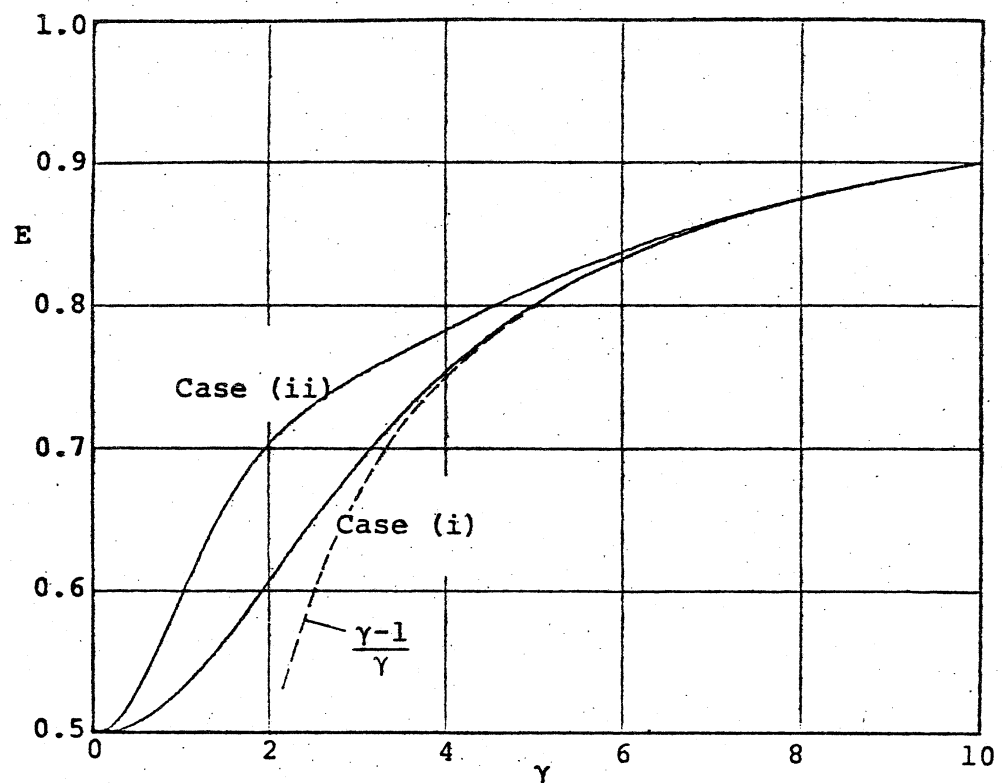


図 8

(4.4), (4.5) に示される。 $\gamma \gg 1$ のとき、 $\eta = 0$ における条件の差は無視できるので、(4.5a), (4.5b) は一致している。尚、そのとき、 $\eta \sim 0$ ($0 \leq \eta < 1$) が成り立つので、(4.5) は、 L にも依存しない。

$\gamma \rightarrow \infty$ の (4.3) および (4.5) は、熱対流の場合⁶⁾ に一致する。これは、Smith の線型定常温度分布における安定問題に対し、本解析では、仮定(I)により、 η の C_1 依存性が境界条件 (2.11), (2.13) に現われず、 $\gamma \rightarrow \infty$ の系が、Smith のそれと同等になるという事情 (詳細は省略) による。

図 9, 10 は、 M_{RC} 対 N_G/C をプロットしたものである。 N_G/C に比例する直線は、(4.2) の M_R で傾きが $2/3 \cdot E(\gamma)$ である。 N_G/C が大きくなると、 M_{RC} は、図 2 ~ 6 に示されている $\alpha \div 1.8$ における M_R の極小値 (平滑表面と同様の結果) で与えられる。前者を、表面変位不安定、後者を対流不安定と呼ぶ事にする。これらの不安定機構の代表的な値は、境界条件 (2.19) 第 2, 3 式と方程式 (2.17), (2.18) の非同次項とで評価できる。 $\gamma, L = O(1)$ とし、波数依存性に注目すると、両者の比は S/f となり、

$$\left. \begin{aligned} |S/f| &\sim \frac{N_C}{N_G} \alpha^{-2} & (N_G \neq 0, \alpha \rightarrow 0) \\ &\sim N_C \alpha^{-4} & (N_G = 0, \alpha \rightarrow 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.6a) \quad (4.6b)$$

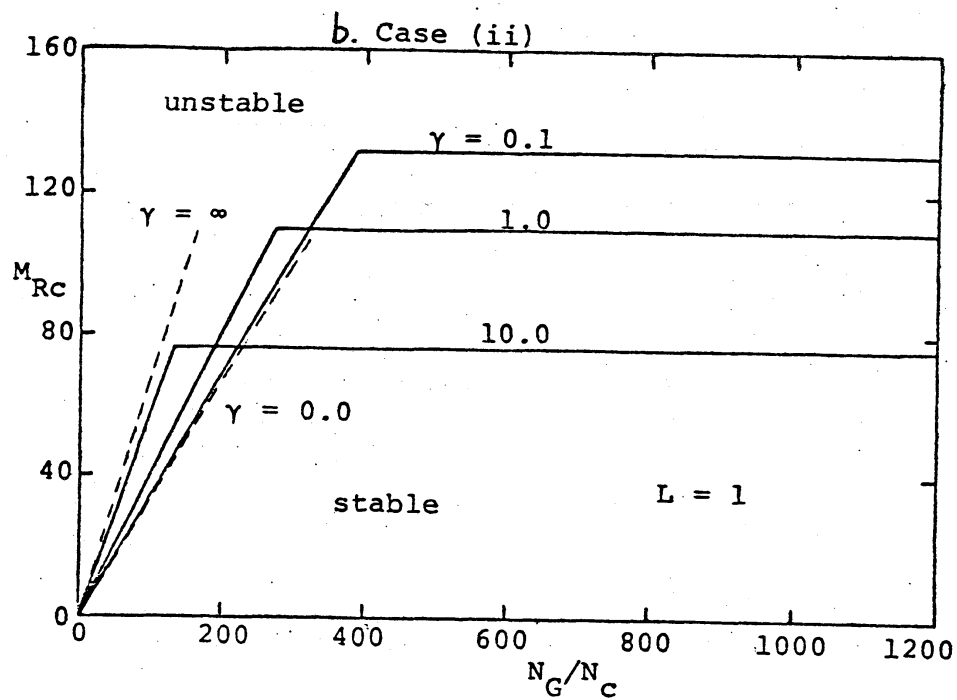
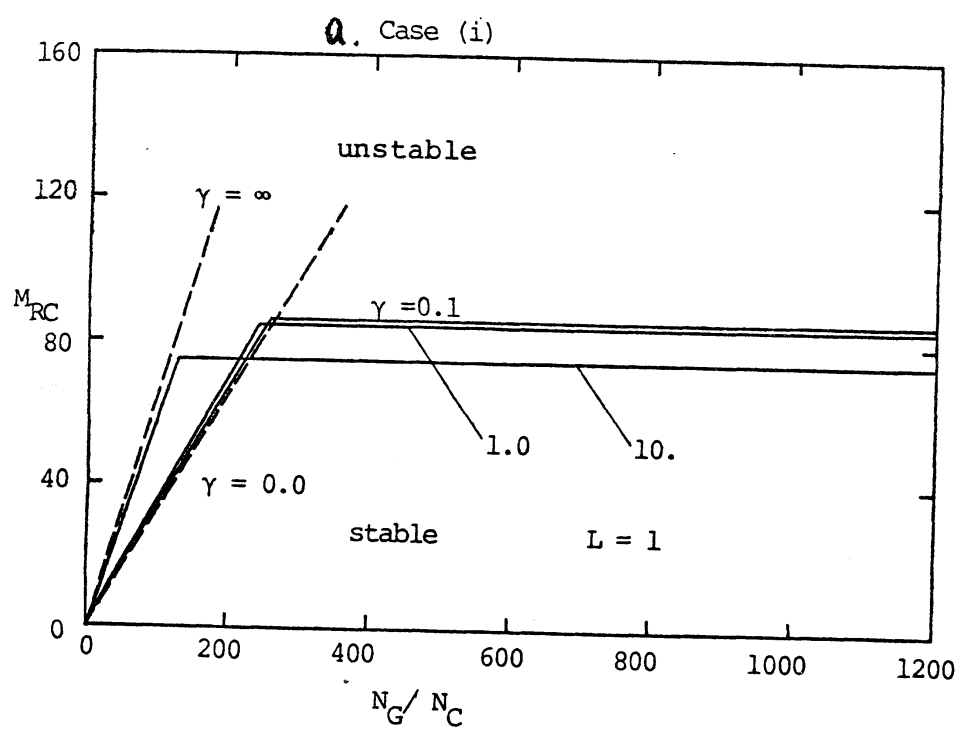
$$|S/f| < N_C e^{-\alpha} \quad (\alpha \rightarrow \infty) \quad (4.7)$$

を得る。従って、表面変位不安定が低波数域で顕著となるこ

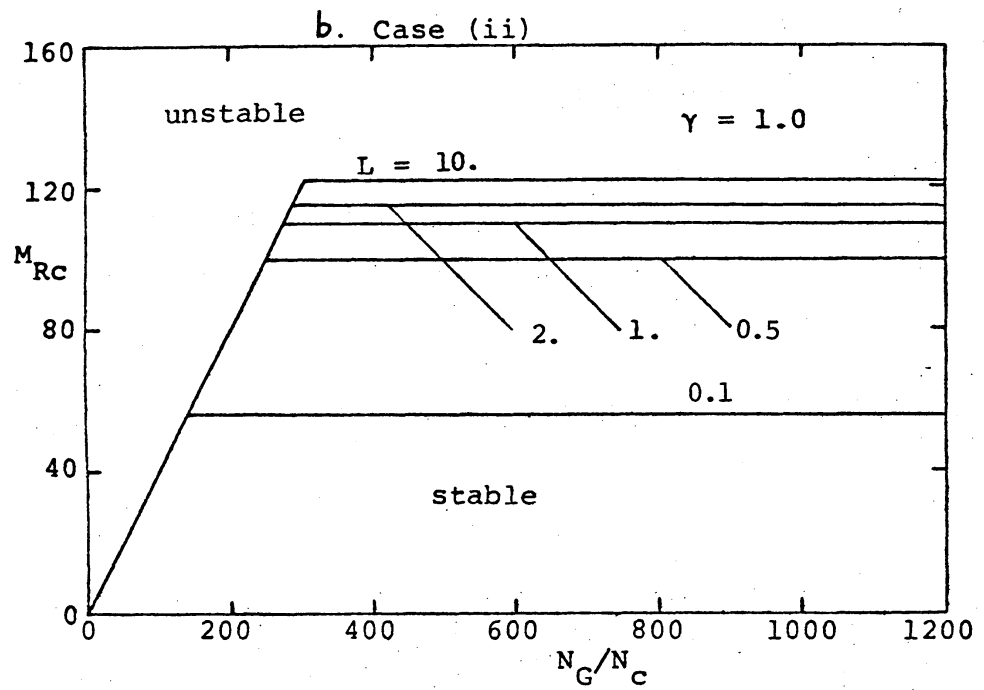
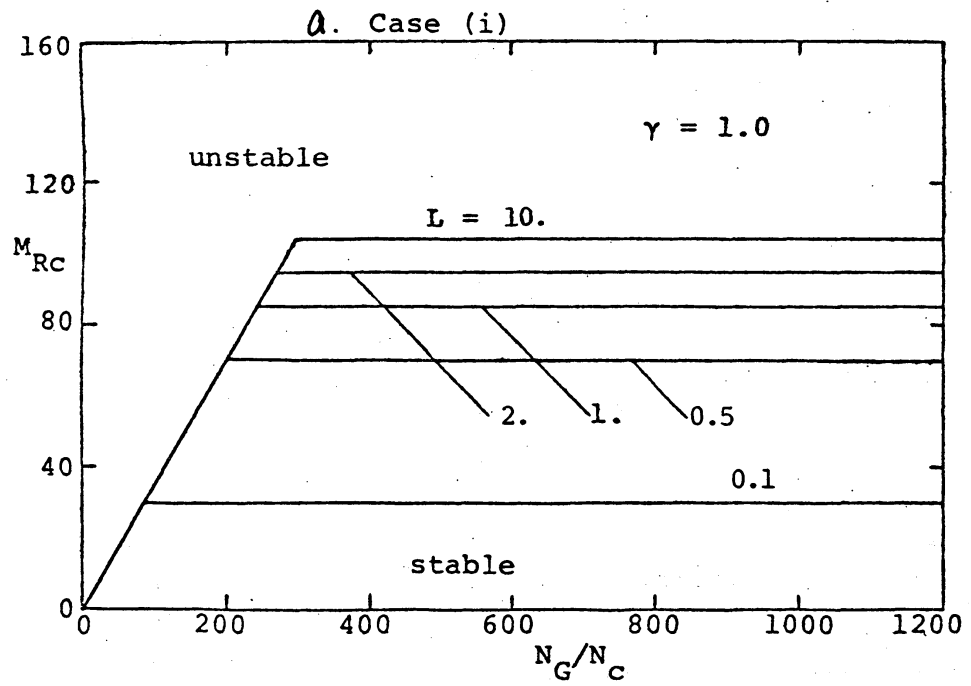
と(4.6)、および大きな Ng/c または $\alpha \gg 1$ については、対流不安定が卓越すること(4.6a), (4.7)がわかる。

図9は、表面不安定では、大きな γ 程安定であることを示している。これは、 γ が大きくなると攪乱 C_p は大きくなるが、 $\bar{q}_i$ がより大きくなる為、結果的に $n(1)$ は減少(即ち、 MR が増加)することによる(図を参照)。また、Cases (i), (ii)の違いは、既に述べたように境界条件の違いに原因している。一応、対流不安定について、図9は、小さな γ では安定であることを示している。また、Cases (i), (ii)を比較すると、同じ γ , L に対しては、(ii)の γ が大きな MRC を与え、 $\gamma \rightarrow \infty$ で (i), (ii) が一致する事がわかる。しかし、この場合、 $MRC-\gamma$ 曲線は単調ではなく、極小値を持つ¹⁴⁾ので注意しなければならない。 $\gamma \gg 1$ では、 γ と共に MRC が増える事、 $\gamma \rightarrow \infty$ で Cases (i), (ii) が一致する事は、対流項を評価して証明されるが、極値近傍では事情が複雑である。

L の依存性は、図10に示されている。表面変位不安定は、(2.17), (2.18)の同次解から求められるので、 L には依存しない。対流不安定に対して、定性的には、 L が大きくなり程安定化し、Case (ii) の γ がより安定である事がわかる。



□ 9



10

§5. まとめ

反応吸収系に生じる界面攪乱に対し、定常擬1次反応吸収を伴う等温静止液層の安定問題として線型理論により考察した。そして、この系では表面変位不安定と対流不安定とが存在し、両者は質的に異なる不安定機構であること、および各機構に対するパラメータの依存性を議論した。その結果を以下にまとめる。

(1) 表面変位 $S(\alpha, N_c, N_g)$ を考慮することにより、表面張力および重力の影響をそれぞれ無次元パラメータ N_c, N_g として考察した。 α 対 M_R の中立曲線において、表面平滑な場合に比べ、 N_c 及び N_g により低波数域に顕著な違いが現われる。特に $N_g = 0$ の時、 $M_{Rc} = 0$ となる。 $\alpha = 0$ における M_R は L に依存せず、 N_g/N_c および γ によって決まり (4.2), $N_g > 0$ では重力は安定化作用を示す。

(2) Schiven 3 が指摘したように表面張力勾配に起因する攪乱の構造は、上昇流において表面が下降し、下降流で表面隆起となっていることを確認した。しかし、重力が逆向きの場合には $N_g + \alpha^2 < 0$ のとき、流動と表面変位は同位相となる。この効果は重力波によるものである。

(3) 4つの液相層部の条件を考え、可能な解を持つ二通りについて計算し、境界条件の違いが安定性にどう影響するかを

調べた。その結果、Case (i) ($C_A = C_P = 0$; $\eta = 0$) より Case (ii) ($\partial C_A / \partial \eta = C_P = 0$; $\eta = 0$) の方がより安定である事が示された。

本研究について、有益な御意見、御助言を頂いた大阪市立大学高島正樹助教授、大阪大学角谷典彦教授、東京大学宮内照勝教授、西村肇助教授に、深く感謝致します。

Reference

- 1) J.R.A. Pearson: J. Fluid Mech. 4 (1958) 489
- 2) C.V. Sternling and L.E. Scriven: AIChE J. 5 (1959) 514
- 3) L.E. Scriven and C.V. Sternling: J. Fluid Mech. 19 (1964) 321
- 4) D.A. Nield: J. Fluid Mech. 19 (1964) 341
- 5) J.C. Berg and A. Acrivos: Chem. Eng. Sci. 20 (1965) 737
- 6) K.A. Smith: J. Fluid Mech. 24 (1966) 401
- 7) M. Takashima: J. Phys. Soc. Japan 31 (1971) 283
- 8) P.L.T. Brian, J.E. Vivian and D.C. Matiatos: AIChE J. 13 (1967) 28
- 9) 足田晴夫, 浅井 悟, 日昔吉紀, 石原立憲: 化学工学 32 (1968) 278
- 10) 足田晴夫, 浅井 悟, 日昔吉紀: 化学工学 35 (1971) 1021
- 11) 今石 宣文, 藤縄勝彦: 化学工学論文集 4 (1978) 484
- 12) E. Ruckenstein and C. Berbente: Chem. Eng. Sci. 19 (1964) 329
- 13) Y.T. Shah and A.Z. Szeri: Chem. Eng. Sci. 29 (1974) 2219
- 14) 今石 宣文, 藤縄勝彦: 化学工学論文集 4 (1978) 490