

平面における
characteristic O^+ の流れ

神戸大 理 浦 太郎

§ 1. Introduction.

Shair Ahmad: Dynamical systems of characteristics O^+ , to appear in Pacific Journal of Mathematics
の紹介をする。

論文の意図は, characteristic O^+ という大域的性質をもった, R^2 または S^2 の流れをできるだけ詳しく分類しようとするものである。Characteristic O^+ の意味は後に述べる。

元来, われわれの力学系研究の最終目標は, 何か妥当な isomorphism を定め, それによって決定される equivalence relation を法として, すべての力学系を完全に分類することである。Isomorphism を定めることにも大きな問題があるが [13], それには相空間の homeomorphism が入ることは自然であるので, 相空間は定まった位相空間と考

えて研究に着手するのは当然の出発点である。

Isomorphism は何であれ, R^1 , S^1 の流れの分類は終局に近い所まで, できている。

これに反し, R^2 , S^2 , T^2 の流れは非常に難しく, 研究結果は, われわれの最終目標から非常に遠い。

その結果, ある種の性質をとりあげて, その性質をもつ流れについて, 分類を考えるのが一つの判明である。とりあがる性質がうまいものであれば, 分類はきれいにいく。一方, その性質が面白いものでなければ, 結果がきれいでも, 興味はない。

そのような性質として, 特異点がない [14], 平行化可能である, global な Poincaré center である [4], 等が考えられている。この論文では characteristic O^+ という性質をとり上げたわけであるが, この性質は面白味をもつて, 結果は完全ではないが, 可成りのところまで達し, かつきれいだと思う。

注. R^2 ではすべての平行化可能な流れは互に isomorphic である。global Poincaré centers は, [9] に述べられている, または Smale 一派の考える isomorphism に関しては互に isomorphic であるが, もっと細かい isomorphism に対しては, さらに分類される, [R. McCann, unpublished]

§2. Notation, Status of the problem.

R, R^+, R^- は実数全体, 負でない実数全体, 正でない実数全体の集合を表わす.

π が X の上の流れ (または力学系) であるとは

X : 位相空間, $\pi: X \times R \rightarrow X$ の写像

1. Identity axiom: $\pi(x, 0) = x$

2. Homomorphism axiom: $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$

3. Continuity axiom: π : continuous on $X \times R$

をみたすことをいう. X を phase-space (相空間) といふ. [7], [9].

$$\pi(x, R) = C(x), \quad \pi(x, R^+) = C^+(x), \quad \pi(x, R^-) = C^-(x)$$

と書き, x の orbit, + semi-orbit, - semi-orbit と呼ぶ. [6], [7], [9].

$$K(x) = \overline{C(x)}, \quad K^+(x) = \overline{C^+(x)}, \quad K^-(x) = \overline{C^-(x)}$$

と書き, x の orbit-closure, + semi-orbit closure, - semi-orbit closure と呼ぶ. [7], [10] ~ [12].

$$L^+(x) = \bigcap \{ \overline{\pi(x, [a, \infty))} \mid a \in R \}^{1)}$$

1) 一般に f が $X \rightarrow Y$ または, $X \rightarrow 2^Y$ なる写像であるとき, 同じ記号 f で, $f(M) = \{ f(x) \mid x \in M \}$ または $\bigcup_{x \in M} f(x)$ で定義される写像 $f: 2^X \rightarrow 2^Y$ を表わす.

を x の $+$ limit set または ω -limit set という。

[Lefschetz], [13]. 以下 $L(2)$ 等については説明を省略する。

$\mathcal{V}(x)$ で 点 $x \in X$ の近傍のフィルターを表わすものとする。

$$D^+(x) = \bigcap \{ \overline{C^+(V)} \mid V \in \mathcal{V}(x) \}$$

を x の $+$ prolongation という。[3], [11].

$$J^+(x) = \bigcap \{ \overline{\pi(V, [a, \infty))} \mid V \in \mathcal{V}(x), a \in \mathbb{R} \}$$

を x の $+$ prolongational limit set という。[2], [3], [6].

以下相空間は Hausdorff 空間であると仮定する。

$$\mathcal{L}(x) = \{ t \mid \pi(x, t) = x, t \in \mathbb{R} \}$$

と置く。 $\forall x \in X, \mathcal{L}(x) \ni 0$ である。 $\mathcal{L}(x) \neq \{0\}$ のとき, x は self-intersecting であるという。 二つの場合がある。

(1) $\mathcal{L}(x) = \mathbb{R} \stackrel{d}{\Leftrightarrow} x: \text{singular (critical, rest etc.)}$

singular points 全体の集合を $\mathcal{S}$ と書く。

(2) $\mathcal{L}(x): \text{discrete subgroup of } \mathbb{R} \stackrel{d}{\Leftrightarrow} x: \text{periodic}$

periodic points 全体の集合を $\mathcal{P}$ と書く。

$\emptyset \neq M \subset X$ とする

$$M: + \text{ invariant} \stackrel{d}{\Leftrightarrow} C^+(M) = M (\Leftrightarrow C^+(M) \subset M)$$

一般に

$x \in X \Rightarrow C^+(x): +\text{invariant}$, しかもこれは x を含む
最小の $+ \text{invariant set}$ である

$\Rightarrow C(x): \pm \text{invariant}$.

$\Rightarrow K^+(x): + \text{strongly invariant}$,

$x \in S^c P \Rightarrow C^+(x): \pm \text{strongly invariant}$

($\Leftarrow$ は真でない)。

$C^+(x): + \text{strongly invariant} \Leftrightarrow C^+(x) \supset L^+(x)$

特例 $L^+(x) = \emptyset$ ($x: + \text{receding}$ という [9]) $\Rightarrow C^+(x):$
 $+ \text{strongly invariant}$.

(1) $X = R^2$ のときは, $C^+(x) \cap L^+(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow C^+(x) \supset$

$L^+(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in P^u S$. これは Poincaré-Bendixson
の定理という。[4], [8],

(2) $X: \text{locally compact}$ なときは, $X^u \setminus \{\infty\}$ を X の
Alexandroff compactification とすれば, $L^+(x) = \emptyset \Leftrightarrow$
 $\pi(x, t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$ である。

$\emptyset \neq M \subset X$ のとき,

$M: +L\text{-stable} \stackrel{d}{\Leftrightarrow} \forall V \in \mathcal{V}(M), \exists V' \in \mathcal{V}(M) \ni C^+(V') \subset V$

$M: +D\text{-stable} \stackrel{d}{\Leftrightarrow} D^+(M) = M$

と定義する。

$M: +L\text{-stable} \Rightarrow M: + \text{invariant}$

$M: +D\text{-stable} \Rightarrow +\text{strongly invariant.}$ [12]

Proposition. $X: \text{locally compact, } M: \text{compact}$ ならば

$$M: +L\text{-stable} \Leftrightarrow M: +D\text{-stable} \quad [11]$$

Definition. $x \in X$ のとき

$$x: \text{characteristic } 0^+ \stackrel{d}{\Leftrightarrow} D^+(x) = K^+(x)$$

$$\pi: \text{characteristic } 0^+ \stackrel{d}{\Leftrightarrow} \forall x \in X, x: \text{char. } 0^+$$

+ 両方に characteristic $0^+, 0^-$ のとき, characteristic 0 とする。

説明は省略するが, 任意の有限, 超限順序数 α に対して, 位数 α の $+ \text{prolongation } D_\alpha^+$ を定義することができる。

$$x: \text{characteristic } \alpha^+ \stackrel{d}{\Leftrightarrow} D_\alpha^+(x) = D_{\alpha+1}^+(x)$$

と定義される。 $K^+ = D_0^+$ と理解すれば, characteristic 0^+ はこの特別の場合である。

Proposition

$$\pi: \text{characteristic } 0^+$$

$$\Leftrightarrow \forall \text{ 全ての } +\text{strongly invariant set は } +D\text{-stable.}$$

かくて, R^2 における characteristic 0^+ の流れ, π があると, 全ての $+ \text{strongly } \text{stable} \text{ invariant set}$ は $+D\text{-stable}$ であるような流れを, できるかぎり, くわしく分類するのが, われわれの目的である。

$\phi \neq M \subset X$ のとき

$A^+(M) = \{x \mid \phi \neq L^+(x) \subset M\}$ is region of + attraction of M

と $\cup$ する. $A^+(M)$ is invariant である.

M : + attractor $\stackrel{d}{\Leftrightarrow} A^+(M) \in \mathcal{V}(M) \Rightarrow A^+(M)$ open

M : + attractor & + $D(\exists t \neq L)$ -stable

$\stackrel{d}{\Leftrightarrow} M$: + asymptotically $D(\exists t \neq L)$ -stable

M : globally + asymptotically $D(\exists t \neq L)$ -stable

$\stackrel{d}{\Leftrightarrow} A^+(M) = X$ & M : + $D(\exists t \neq L)$ -stable.

[6].

π : dispersive $\stackrel{d}{\Leftrightarrow} J(X) = \phi$

π : parallelizable $\stackrel{d}{\Leftrightarrow} \exists Y \ni X = Y \times \mathbb{R}$,

$$\pi((y, \tau), t) = (y, \tau + t).$$

Proposition X : locally compact separable metric space.
とある.

π : parallelizable $\Leftrightarrow \pi$: dispersive [1]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, D^+(x) = O^+(x) \\ \mathcal{S} \cup \mathcal{P} = \phi \end{cases} \quad [5].$$

注 前節で述べた Poincaré center, global Poincaré center
また次節でのべる noend (= node), foyer (= focus) 等について
は, 常微分方程式の教科書を見られたい.

§3. Flows of characteristic O^+ in the plane.

平面上の characteristic O^+ の流れ π は, 次の (1) ~ (6) に分類される.

(1) $S = \emptyset$. このとき π は parallelizable である.

(2) $S = \{x_0\}$, $P \neq \emptyset$. (注意 $P \neq \emptyset \Rightarrow S = \{x_0\}$).

このとき π は, さらに次の 1, 2 の二つに分類される.

1. $\{x_0\}$ は global Poincaré center である. (したがって, $P \cup \{x_0\} = R^2$).

2. $\{x_0\}$ は non-global Poincaré center である.

$N = P \cup S$ とおくと, N は simply connected

continuum であって (したがって $N \neq R^2$),

globally + asymptotically stable である. (注

意: N は compact であるから, stability に用

いて, D, L の区別はない.) また $x \notin N \Rightarrow$

$L^+(x) = \partial N$, $L^-(x) = \emptyset$.

(3) $S = \{x_0\}$, $P = \emptyset$.

このとき, $\{x_0\}$ は globally + asymptotically stable

(したがって, x_0 は noed または foyer) である.

(4) S は bounded であるが singleton ではない.

このとき π は, 次の性質 a, b をもつ.

a. $P = \emptyset$.

b. S は simply connected continuum であって,
globally + asymptotically stable である.

c. $x \notin S \Rightarrow L^+(x)$ は ∂S に含まれる
singleton である. また $L^-(x) = \emptyset$.

逆に $y \in \partial S \Rightarrow \exists x \notin S \rightarrow L^+(x) = \{y\}$.

15) $R^2 = S$ (immobile flow).

(6) S は unbounded であって $S \neq R^2$.

このとき π は, 次の性質 $a \sim f$ を持つ.

a. S の connected components は高々可附番個
であって, 各 component は simply connected,
unbounded である.

b. $R^2 - S$ の connected components も高々可附番個
であって, 各 component は simply connected,
unbounded である.

c. S およびその各 component は + asymptotically D-stable である. しかし S が
connected な場合をのぞくと, S もそのどの
component も globally + asymptotically D-stable
ではない. S が connected な場合には, S が
globally + asymptotically D-stable な ~~とき~~ ^{とき}と,
そうではない ~~とき~~ ^{とき}と, いずれも起る.

d. $R^2 - A^+(S)$ ($\neq \emptyset$ ならば) は parallelizable である. (したがって $J(R^2 - A^+(S)) = \emptyset$.)

e. (i) $A^+(S)$ は高々可附番個の components をもち, 各 component は simply connected であって, J 度一つの S の component を含む.

(ii) $A^+(S)$ の各 component の境界は, 高々可附番個の, $J(x) = \emptyset$ なるような orbit $C(x)$ で成り立つ.

(iii) $A^+(S)$ の各 component は R^2 に homeomorphic である.

f. $x \in A^+(S) - S$ に対して, $L^+(x)$ は singleton であって S に含まれる. 逆に与えられた $y \in S$ に対して $\exists x \in A^+(S) - S \rightarrow L^+(x) = \{y\}$.

§ 4. Flows of characteristic O^+ in S^2 .

S^2 の上の characteristic O^+ の流れは, 次の二つの場合 (1), (2) にかぎる.

(1) $S = S^2$ (immobile flow)

(2) $S = \{x, y\}$, $P = S^2 - \{x, y\}$. ここで x, y は P 上の Poincaré centers.

したがって characteristic O^+ 及び characteristic O^-

1. $h^0 \rightarrow 2$ characteristic 0 2つある.

§ 6. Flows of characteristic 0 in R^2 .

R^2 上の characteristic 0 の流れは, 次の三つの場合
(1) ~ (3) に分けられる.

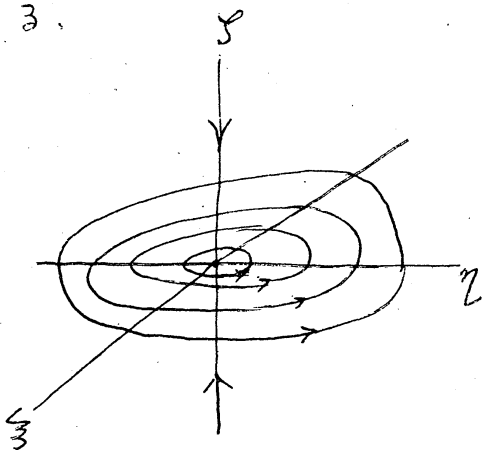
(1) $S = \emptyset$, parallelizable

(2) $S = R^2$ (immobile)

(3) $S = \{x_0\}$, global Poincaré center.

§ 6. An example of a flow of characteristic 0.

R^2, S^2 上の phase-space 上の流れは, h^0 2つある characteristic 0 2つあり, asymptotically stable 2つも Poincaré center 2つもないような特異点をもつ.



$X = \xi\eta$ -plane $\vee$ ζ -axis

$S = \{(0, 0, 0)\}$

$P = \xi\eta$ -plane

この流れは characteristic 0 2つをもつことが容易にたしかめられる.

REFERENCES

- [1] H. Antosiewicz and J. Dugundji; Parallelizable flows and Liapunov's second method, *Ann. of Math.* 73 (1961) 543-555.
- [2] J. Auslander; Generalized Recurrence in Dynamical Systems, *Contr. to Diff. Equations* 3 (1964) 65-74.
- [3] J. Auslander and P. Seibert; Prolongations and stability in dynamical systems, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 14 (1964) 237-268.
- [4] I. Bendixson; Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.* 24 (1901) 1-88.
- [5] Nam P. Bhatia; Criteria for dispersive flows, *Math. Nachr.* 32 (1966) 89-93.
- [6] N. P. Bhatia and G. P. Szegö; *Dynamical Systems: Stability Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [7] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund; *Topological Dynamics*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 36, 1955.
- [8] I. Kimura and T. Ura; Sur le courant extérieur à une région invariante; Théorème de Bendixson, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* 8 (1960) 23-39.
- [9] V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov; *Qualitative Theory of Differential Equations*, Moscow, 1947-9; English translation, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1960.
- [10] P. Seibert and P. Tulley; On dynamical systems on the plane, *Arch. Math.* 18 (1967) 290-292.
- [11] T. Ura; sur le courant extérieur à une région invariante; Prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, *Funkcial. Ekvac.* 2 (1959) 143-200; nouv. édition 105-143.
- [12] T. Ura; Sur le courant extérieur à une région invariante; Prolongement d'une caractéristique et l'ordre de stabilité, complément, *Funkcial. Ekvac.* 9 (1966) 171-179.
- [13] T. Ura; Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems, *Funkcial. Ekvac.* 12 (1969) 99-122.
- [14] R. McCann; Planar dynamical systems without critical points (to appear).