

Association scheme の指標表の いくつかの具体的な計算例

九大・理 坂内英一
(Eiichi Bannai)

序.

筆者はここ数年間、何人もの数学者の協力も得て、association scheme の指標表 (character table) について色々と調べてきた。これらの仕事については、既に色々な機会に発表したものがあるので、ここではくり返さない。参考文献にあげた [2-12] 等を参照されたい。この中で [2, 3, 4, 5] は総合報告的な論文であり、専門外の人でも取り付き易いと思います。また更に詳しい文献はこれらの (特に [4] の) 末尾の参考文献も参照して下さい。

この方向の研究は、川中宣明氏の最近の仕事により、様相が一変しつつあります。これらの目ざましい仕事については川中 [19, 20] 等を参照して下さい。更にこれらのことは、川中氏自身によりもっと目ざましい形で、すなわち、一般に有限古典群 (又は Chevalley 群) の "良い" 等質空間の球函数の決定 (= Hecke ring の表現の決定、Hecke ring

が可換な場合は association scheme の指標表の決定に対応する) が reductive な代数群の表現論と類似した形で得られるという形で、進展中だと思います。これらの代数群的な仕事は既に私の理解出来るレベルをはるかに越えていますが、association scheme の指標表を見るという(すなわち球函数の全部を一まとめのものとしてみる)立場が、その最初の motivation の一部として役に立ったことはうれしいことだと思います。

この講演では、もと初等的なレベルでの、association schemes の具体的ないくつかの指標表についての実験的な結果(観察)を主に問題提起という形で紹介します。

以下の話で使うための notation を固定します。association scheme およびその指標表についての一般論は、[1], [4] 等を参照して下さい。

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を Γ 上 d の可換な association scheme とする。 A_i を関係 R_i に対する隣接行列、 $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ を Bose-Mesner algebra (= Hecke algebra) とする。この時 $A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k (= A_j A_i)$ をみたす。 $E_0 (= \frac{1}{|X|} J)$, $E_1, \dots, E_d$ を algebra $\mathcal{A}$ の原始巾等元全体とする。 $\mathcal{A}$ の 2 つの bases $(A_0, A_1, \dots, A_d)$

$(E_0, E_1, \dots, E_d)$ の間の変換行列 P を可換な association scheme $\mathcal{A}$ の指標表とよぶ。すなわち

$$(A_0, A_1, \dots, A_d) = (E_0, E_1, \dots, E_d) \cdot P$$

が成り立つ。この時、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 & \dots & k_d \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

の形をしている。

[注: 可換な association scheme の多くの例は、

multiplicity-free な (i.e. 1_H^G が multiplicity-free な、

ここで H は G の固定群) 可換置換群 G から得られる。

詳しくは [1], [4] 等を参照せよ。]

§1. Ennola-type dualities in the character tables of some association schemes.

有限一般ユニタリ群 $GU(n, q^2)$ の (通常群論の意味での) 指標表が一般線型群 $GL(n, q)$ の指標表から、essential には q を $-q$ に置き換えて得られるというこ

とは、Ennola [15] (1963) により予想され、証明が比較的最近 Hotta-Springer [18] (1977), Kawanaka [21] (1985) により完成されたことはよく知られている。

ここではいくつかの association schemes の指標表の間に q を $-q$ に置き換え (かつ必要な modification を行うと) 一方向から他方向が得られるという例をいくつか述べる。

[もともと Ennola duality とよぶ $GU(n, q^2)$ と $GL(n, q)$ の 2 つの指標表の間の関係は q を $-q$ に変えるだけでなく、 $\binom{1}{q+1}$ 乗根と $q-1$ 乗根を置き換えることも同時に起こるので、以下で述べる例では実質な所々あります。] この節の内容は Bannai-Kwok-Song [9] にもとづいています。もちろん定義されていない記号等は [9] を参照して下さい。

例 1. 3 次直交群 $O_3(q)$ ($= P\Omega_3(q)$) が negative type の non-isotropic (projective) points の集合 Ω_2 の上に transitive に働く作用から出来る可換の association scheme

$\mathcal{X}(O_3(q), \Omega_2) \cong \mathcal{X}(PGL(2, q), PGL(2, q)/D_{2(q+1)})$ を考える。ただし以下 $q = \text{奇素数}$ 巾を固定する。この association scheme のパラメータは $d = \frac{1}{2}(q-1)$ であり、

その指標表は.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q+1 & q+1 & & q+1 & \frac{1}{2}(q+1) \\ 1 & & & & & \\ \vdots & & \psi_{ij} & & & \\ \vdots & & & 1 \leq i \leq \frac{1}{2}(q-1) & & \\ \vdots & & & 1 \leq j \leq \frac{1}{2}(q-1) & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

(size $\frac{q+1}{2} \times \frac{q+1}{2}$)

である。ただし $\psi_{ij} \in \mathbb{Q}(\theta) \cup \mathbb{Q}(p)$,

$\theta = e^{2\pi i/(q+1)}$, $p = e^{2\pi i/(q-1)}$ である。

[ψ_{ij} の値は具体的に書き下すことは可能ではあるが非常に複雑である。Kwok [23] も用いて計算可能である。]

この行列 P に対して次の操作をほどこす。

(1) q を $-q$ に変える (各 ψ_{ij} は q を $-q$ とする)。

(2) このとき一行は $1, -q+1, -q+1, \dots, -q+1, \frac{1}{2}(-q+1)$ となるので、それを全て正にするために、281 以後に -1 をかける。

このようにして出来た行列を

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & q-1 & q-1 & q-1 & \frac{1}{2}(q-1) \\ 1 & & & & \\ \vdots & & -(\psi_{ij}) & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

とす。[P' 自身は association scheme の指標表が満たすべき直交関係 [1, p. 63 参照] をみたさない.]

(3) P' に γ と $\delta\gamma$ を -1 ずつ加えて

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} & & & b_0 \\ & & & b_1 \\ & & & \vdots \\ & & & b_{\frac{q-1}{2}} \\ & & & \vdots \\ & & & c \\ \vdots & & & \\ 1 & a_1 & a_2 & \vdots \\ & & & a_{\frac{q-1}{2}} \end{pmatrix}$$

(size $\frac{q+3}{2} \times$

と置き、 a_i, b_i, c も $\overline{P}$ が association scheme の指標表が与えらるべき直交関係をもたすように決める。 $(a_i, b_i, c$ 達は一意に定まる。) このとき $\overline{P}$ は次のようになる。

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & q-1 & & q-1 & \frac{1}{2}(q-1) & 2(q-1) \\ 1 & & & & & -2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & -\psi_{ij} & & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & & & & & -2 \\ 1 & -2 & & -2 & -1 & q-3 \end{pmatrix}$$

(size $\frac{q+3}{2} \times \frac{q+3}{2}$)

この時. $\overline{P}$ は $O_3(q)$ の positive-type の non-isotropic (projective) points の全体 Ω_1 に働きいて出来た可換な association scheme

$\mathcal{X}(O_3(q), \Omega_1) \cong \mathcal{X}(PGL(2, q), PGL(2, q)/D_{2(q-1)})$ の指標表そのものが知られている。(このことは両者の association schemes の構造定数 p_{ij}^k を見ればこれにより、 ψ_{ij} の値を具体的に知ることも可能に示される。)

例2. 例1と同様な関係が. 群 $O_2^-(q) (= GO_2^-(q) \cong D_{2(q+1)})$ の $GF(q)$ 上の2次元 vector space V_2 の作用から出来た可換な association scheme $\mathcal{X}(O_2^-(q), V_2)$ とする. この association scheme $\mathcal{X}(O_2^+(q), V_2)$ の指標表の間にも成り立つ。すなわち、 P を $\mathcal{X}(O_2^-(q), V_2)$ の指標表とすれば、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q+1 & q+1 & \cdots & q+1 \\ 1 & & & & \\ \vdots & (\psi_{ij}) & & & \\ 1 & & 1 \leq i \leq q-1 \\ & & 1 \leq j \leq q-1 \end{pmatrix} \quad (\text{size } q \times q)$$

であり、例 1 と同様の操作で、

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & q-1 & q-1 & \cdots & q-1 & 2(q-1) \\ 1 & & & & & -2 \\ \vdots & (-\psi_{ij}) & & & & \vdots \\ 1 & & 1 \leq i \leq q-1 \\ & & 1 \leq j \leq q-1 & & & -2 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & q-2 \end{pmatrix} \quad (\text{size } (q+1) \times (q+1))$$

となり、これは $\mathcal{K}(O_2^+(q), V_2)$ の指標表となることになる。

Remarks ① 例 1, 例 2 以外にも似たようなことが成り立つ例がいっぱいある ([9] 参照)。群のレベルだけでなく、association scheme のレベルで、何故この種のことが成り立つかは intrinsic に理解することは (理解出来るならば) 興味深いと思われる。

② 一般に、association scheme の指標表から、別の association scheme の指標表を作り出す systematic な操作の色々と見つか

っていけばおもしろいと思います。実際に対応する association scheme が必ずしも存在しなくても (もちろん正確にいえば、association scheme の指標表のみたすような代数的条件 (e.g. 直交関係等) をみたすような正交行列) 指標表から指標表を作り出す操作が見つかればおもしろいと思います。([11] の $Sp(4, 2)/S_2(q)$ の character table の候補者 $\in S_2(q)$ の指標表から作り出す操作は依然予想の段階です。

(3) Ennola-type duality のことと離れて、一般に一つの指標表からその一部を変えたことにより別の指標表 (の候補者) を見つけることができないこと。 (例えば、1つの行を1つの列だけと2つに split して出来たものが何かを考えたこと、これは置換群では、multiplicity-free な可移置換群の multiplicity-free な可移部分群に対する rank が1つだけ増えたものがあつた時にその association scheme としての指標表から別の指標表からどう出来たかということに対応していい) けれども、おもしろい問題だと思います。例えば、 $O_7(q) \rightarrow \Omega_1 = O_7(q)/O_6^+(q)$ の subgroup $G_2(q) \subset O_7(q)$ は Ω_1 の上に可移な、multiplicity-free に (7と2は1つだけ増える) 作用し、その一重の固定群は $SL(3, q) \cdot 2$ とつたが、その時の association scheme の character table は計算出来る。具体的に今は現在計算中 (Bannai-Song)。

§2. "Gauss 和と Legendre 多項式" と association scheme

spherical harmonics (2-次元空間の単位球面上の調和関数) と cyclotomic association scheme の間の類似は良く知られてゐる。こゝで cyclotomic association scheme とは、 $q = ef + 1$ とし、 $H \in (GF(q), \text{乗法群}) (GF(q))^*$ の index e の部分群とし、 $(GF(q), +) \cdot H \in (GF(q), +) (= GF(q))$ の加法群) の上に働きかゝる出来事 f の (可換な) association scheme のことをいう。こゝの類似に、いゝのは、例えば、Yamamoto [27], 小野 [25] 等を参照。

Gauss 和 $\longleftrightarrow$ Γ -函数

Jacobi 和 $\longleftrightarrow$ ベータ-函数

等の対応関係が見られる。

spherical harmonics と association scheme の表理論の類似は、また Delsarte 等による代数的組合せ論の立場から良く知られてゐる。([13], [14], [1] 等を参照)

spherical harmonics の addition formula (加法公式) は Legendre 多項式 ($d \geq 3$ の時は Gegenbauer 多項式) $Q_h(x)$ に対応し、 $\text{Harm}(h)$ の任意の正規直交基底 $\{f_{h1}, \dots, f_{hN_h}\}$ に対応して

$$\sum_{j=1}^{N_h} f_{hj}(\vec{x}) f_{hj}(\vec{y}) = (\text{const}) \cdot Q_h(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle)$$

for $\forall x, y \in S^d$, ただし (x, y) は $\mathbb{R}^{d+1}$ の通常の内積, $x \neq y$ として知られている。

この解釈が正しいといふことは議論があるかもしれないが,

小野 [25] で目的としていることは, Gauss 和を用いて,

spherical harmonics の addition formula の類似を,

cyclotomic association scheme に対しておこなうとしている,

と私は理解している。(小野 [25] でおこなうとしている

formula とは異なるとは思われるが), 一般の (可換な) associ-

ation scheme に対して次のような addition formula が一般

的に (従って cyclotomic association scheme の場合も) 成り立

つことが知られている。(ここでは簡単なため symmetric な

association scheme に対して述べる。必要の記号などはこ

こでは [1] を参照せよ。

symmetric association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ の指標表 P に対して, $Q = |X| \cdot P^{-1}$ とする。行と列の (i, j) -成分を $q_j(i)$ と表す。(Q は Delsarte により 2nd eigenmatrix と知られているとあり。

$$(E_0, E_1, \dots, E_d) = \frac{1}{|X|} \cdot (A_0, A_1, \dots, A_d) \cdot Q$$

とする。 P は 1st eigenmatrix と知られている。

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \dots \perp V_d$$

は $L^2(X)$ の自然な直交分解 (この時 $\dim V_i = \text{rank } E_i = m_i$)

とし、 V_i の任意の正規直交基底 $\{f_{h1}, \dots, f_{hm_h}\}$ とすると、

$$\sum_{j=1}^{m_h} f_{hj}(x) f_{hj}(y) = (\text{const}) \cdot g_h(i)$$

for $\forall x, y \in X$ とする。ただし $i = i(x, y)$ は $(x, y) \in R_i$ とする x, y に属する数 ($0 \leq i \leq d$) である。

Cyclotomic association scheme の時、 $g_h(i)$ は定数 Gauss periods と呼ばれることがある。これは Gauss 数の線型一次結合として得られるものである。(詳しくは [23], [24] 等を参照。) [小野 [25] では i に対応する $x \neq y$ の有限体上の vector 空間の通常の内積であるという言い方があり、したがって cyclotomic association scheme の $i(x, y)$ は $x \neq y$ の間の内積と見なすことができる。ただし次のように注意することになる。]

spherical harmonics の類似 association scheme の表現論に求めるに、cyclotomic association scheme のかわりに、association scheme $\ast(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ を考えるのも自然であると思われる。(一つの理由は、 $\Omega_2 = O_3(q)/O_2^-(q)$ が $GF(q)$ 上の 3次元 vector space の単位球と考えることができる。(ここで $O_3(q)$ は $GO_3(q)$ 、 $O_2^-(q)$ は $GO_2^-(q)$ のいかに、前節とは違、と、使、といふ。) この場合の一つの問題は $g_j(i)$ が非常に複雑になることである。

[$g_j(i)$ は Kwok [23] により計算されている。ただし Kwok [23] の計算でもその値が完全に explicit に与えられていると言えない部分がある。] この $g_j(i)$ は、 i が有限体 $GF(q)$ の上に動くと考えられたい (ここでもないので)。Legendre 多項式の有限体上版とも言えるであろう。この $g_j(i)$ を関数として、もっと intrinsic な形で理解することは、重要な問題であると考えます。

一応、既に、Legendre 多項式の有限体上版として考えられているものが (それが最善かどうかは未定としても) 全然別な方向から知られています。これについて簡単に記し、上の $g_j(i)$ との関連を何らかの形で求めることを問題提起として提出したいと思います。

(i) (Evans [16]) Legendre 多項式の積分表示。

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1-2xu+u^2)^{-\frac{1}{2}} u^{-n} \frac{du}{u} \quad \text{と表わす。}$$

$$P_N(x) = \frac{1}{q} \sum_u N(u) \phi(1-2xu+u^2).$$

ただし N は $GF(q)$ の multiplicative character である。

ϕ は $\phi^2 = \varepsilon (= \text{id})$ とする mult. character ($\neq \varepsilon$) とする。

$P_N(x)$ は $GF(q)$ の上で定義された複素数値の関数である。

(ii) (Greene [17]) 有限体上の ($\mathbb{C}$ の値をとる) 超幾何級数 ${}_2F_1$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} A, B \\ C \end{matrix} \middle| x \right] &= \varepsilon(x) \frac{BC(-1)}{q} \sum_y B(y) \overline{BC}(1-y) \overline{A}(1-xy) \\ &= \frac{BC(-1)}{q(q-1)} \sum_{\chi} J(\overline{A}, \overline{\chi}) J(\overline{BC}, B\overline{\chi}) \chi(x) \end{aligned}$$

と定義する。ただし A, B, C, χ 等は $GF(q)$ の multiplicative characters で $\overline{}$ は複素共役指標を表す。(最後の可逆 J は Jacobi 和を表す。) χ は $x \neq 0, 1$ とする。) $[\text{ }]$ も、一般に ${}_rF_s$ が定義され、これを用いて classical orthogonal polynomials の有限体上版の類似の色々と定義される。]

(iii) (Sawabe [26]) $P_N(x)$ は (有限体上の) 超幾何級数 ${}_2F_1$ を用いて (その essential part を) 記述出来る。(従って補正項が必要)。

問題 先に述べた association scheme $*(\mathcal{O}_3(q), \mathcal{O}_3(q)/\mathcal{O}_2^-(q))$ の $g_j(i)$ と有限体上の Legendre 多項式 $P_N(x)$ を何らかの意味で関連付けられたいか？

Remarks

(a) $\mathcal{K}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ は symmetric association scheme であり, $g_j(i)$ は常に実数値をとる。大雑把に言いますが, 系半分の j' に対して $g_j(i)$ は $Q(e^{\frac{2\pi i}{q-1}})$ に入り, 他の系半分の j' に対しては $Q(e^{\frac{2\pi i}{q+1}})$ に入ります。また $P_N(x)$ は一般に複素数値をとる, $Q(e^{\frac{2\pi i}{q-1}})$ に入ります。従って, $Q(e^{\frac{2\pi i}{q-1}})$ に入る j に対して $g_j(i)$ と実数値をとる $P_N(x) + P_{\bar{N}}(x)$ の間に何らかの関係を持つわけになっています。

(b) 我々の目的はあくまで $\mathcal{K}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ の $g_j(i)$ を intrinsic に理解したいことにあります。上にのべた Legendre 多項式の有限体上版は, 残念ながら最近に候補者があるというだけで, その関係が明らかになることが非常に望ましいが, そうでなくとも全然かまわないわけである。(逆に何らかの Legendre 多項式の有限版としても, ともふさふさしいかも, この $g_j(i)$ を通して見てくれるわけである。)

(c) Kwok [23] の計算は $\mathcal{K}(O_3(q), O_3(q)/O_2^+(q))$ であり,

$\mathcal{K}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ への (b) に §1 で述べたような類似の Ennola-type duality が成り立つ。([9], Remark 4, 参照。)

References

1. E. Bannai and T. Ito : Algebraic Combinatorics I , Benjamin / Cummings , 1984.
2. 坂内英一 : 第33回代数学シンポジウム報告集.
1987年7月. 福井.
3. ——— : 第35回代数学シンポジウム報告集.
1989年7月. 札幌.
4. E. Bannai : Character tables of commutative association schemes,
Proc of Conf. "Finite buildings and related geometries", Oxford U. P.
1990.
5. ——— : Orthogonal polynomials in coding theory and algebraic
combinatorics, Proc of NATO-ASI on orthogonal polynomials and
their applications, Vol 294. (1990), Kluwer, p 25-53.
6. E. Bannai - S. Hao - S. Y. Song : Character tables of the assoc. schemes
of finite orthogonal groups acting on the non-isotropic points,
J. C. T. (A), 1990.
7. E. Bannai - S. Hao - S. Y. Song - H. Z. Wei : Character tables of the
assoc. schemes coming from finite unitary and symplectic groups,
to appear in J. of Algebra.
8. E. Bannai - N. Kawanaka - S. Y. Song : The character table of
the Hecke algebra $H(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), \mathrm{Spin}(\mathbb{F}_q))$, J. of Algebra
129 (1990), 320-366.

9. E. Bannai - W. M. Kwoh - S. Y. Song : Ennola type dualities in the character tables of some association schemes, to appear in Mem. ^{Fac. Sci.} Kyushu Univ.
10. E. Bannai - S. Y. Song : The character tables of Paige's simple Moufang loops and their relationship to the char. tables of $PSL(2, q)$, Proc. London Math. Soc. 58 (1989), 209-236.
11. ————— : On the character table of the assoc. scheme $Sp(4, q)/Sz(q)$, Graphs and Comb. 5 (1989), 291-293.
12. ————— : The char. table of commutative assoc. scheme coming from the action of $GL(n, q)$ on non-incident point-hyperplane pairs, to appear in Hokkaido Math. J.
13. P. Delsarte : An algebraic approach to the assoc. schemes of coding theory, Philips Res. Repts. Suppls. No 10, 1973.
14. P. Delsarte - J. M. Goethals - J. J. Seidel : Spherical codes and designs, Geom. Dedicata, 6 (1977), 363-388.
15. V. Ennola : On the characters of the finite unitary groups, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI No 323 (1963), 1-35.
16. R. Evans : Hermite character sums. Pac. J. Math. 122 (1986), 357-390.
17. J. Greene : Hypergeometric functions over finite fields, Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1987), 77-101.
18. R. Hotta - T. A. Springer : A specialization theorem for certain

- Weyl group representations and an application to the Green functions of the unitary groups, *Invent. Math.* 41 (1977), 113-127.
19. 川中宣明: $\mathbb{H}$ 環 $N(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), \mathrm{Sp}_n(\mathbb{F}_q))$ の指標等 Σ について対称式「フィンキン数学」研究集会報告集 1987年11月. 筑波
20. ———: 第35回代数学シンポ. シライ報告集. 1989年7月. 札幌.
21. N. Kawanaka: Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, *Alg. Groups and Related topics*, *Adv. Stud. Pure Math.* Vol 6. Kinokuniya-North-Holland, (1985), 175-206.
22. W. M. Kwok: Character tables of association schemes of affine type, *Ph.D. Thesis*, Ohio State Univ. 1989 (= to appear in *Europ. J. of Comb.*)
23. W. M. Kwok: Character table of a controlling assoc. scheme defined by the general orthogonal gp $O_3(q)$, to appear in *Graphs and Comb.*
24. R. J. McEliece and H. Rumsey, Jr.: Euler products, cyclotomy and coding, *J. Number Theory*, 4(1972), 302-311.
25. 小野孝: ガウス和とルジャンドル多項式: 数学セミナー連載 1986年10月号-1987年4月号.
26. Y. Sawabe: Legendre character sums, to appear.
27. K. Yamamoto: On a conjecture of Hasse concerning multiplicative relations of Gaussian sums, *J. C. T.* 1 (1966), 476-489. (上, 下)