

モジュラー形式がみたす微分方程式 の具体例について

京大理・真野 智行

モジュラー形式がみたす微分方程式の
最初の例は Jacobi による次のもので
あろう. (Crelles J. 36 (1848))

$$(y^2 y''' - 15 y y' y'' + 30 y'^3)^2 + 32 (y y'' - 3 y'^2)^3 \\ = -\pi^2 y^{10} (y y'' - 3 y'^2)^2 \quad \dots (1)$$

解は $y = g_2(0, \tau), g_3(0, \tau), g_4(0, \tau)$ となる.

$$\text{ここで } g_1(z, \tau) = i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n v^{n-\frac{1}{2}} q^{(n-\frac{1}{2})^2}$$

$$g_2(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v^{n-\frac{1}{2}} q^{(n-\frac{1}{2})^2}$$

$$g_3(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v^n q^{n^2}$$

$$g_4(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n v^n q^{n^2}, \quad v = e^{2\pi i z}, \quad q = e^{\pi i \tau}$$

微分方程式 (1) は Halphen により次の形に書き
換えられた。

$$(C.R. Acad. Sci., Paris 92 (1881))$$

$$\begin{cases} \omega'_1 = \omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1 \\ \omega'_2 = \omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_3 - \omega_3 \omega_1 \\ \omega'_3 = -\omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1 \end{cases} \dots (2)$$

(2) は特殊解 $\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\log g_2(\tau)^4)$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\log g_3(\tau)^4)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\log g_4(\tau)^4)$$

をもち 3次元分の任意定数を含む一般解はこの特殊解から変換

$$\omega_i^A = \frac{1}{(c\tau+d)^2} \omega_i \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d} \right) - \frac{c}{c\tau+d}, i=1,2,3$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

により得られる。

また, $\omega_1 - \omega_2 = \frac{\pi i}{2} g_4(\tau)^4$, $\omega_2 - \omega_3 = \frac{\pi i}{2} g_2(\tau)^4$, $\omega_3 - \omega_1 = -\frac{\pi i}{2} g_3(\tau)^4$

ゆえ $\mathbb{C}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ は $\Gamma(2)$ に関するモジュラ-形式のなる環 $\mathbb{C}[g_2(\tau)^4, g_3(\tau)^4]$ を含み, 微分に関して閉じた環を与えている. それゆえ (2) をレベル2のモジュラ-形式を解析的に特異数づける基本方程式と見なすことは自然である.

一方 (2) の方程式は次の3階の微分方程式

$$\{\lambda; \tau\} + \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda^2(1-\lambda)^2} \lambda'^2 = 0 \quad \dots (3)$$

とも同値である。

ここで $\{\lambda; \tau\} = \frac{\lambda'''}{\lambda'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} \right)^2$ (Schwarz 微分) で

(3) は $\lambda(\tau) = \frac{g_3(\tau)^4}{g_2(\tau)^4}$ を解にもつ。

未知関数を $X_1(\tau) = \frac{1}{2} (\log \lambda)'$
 $X_2(\tau) = \frac{1}{2} (\log \frac{\lambda'}{\lambda^2})'$
 $X_3(\tau) = \frac{1}{2} (\log \frac{\lambda'}{(1-\lambda)^2})'$ にとって
 (3) を書き直し簡単な変換を施せば (2) が得られる

このことから、elliptic modular surface に
 関する Picard - Fuchs 方程式 (fiber の elliptic
 curves の周期がみたす 2 階の線形微分
 方程式) が与えられるとモジュラー形式の
 対数微分を解にもつ非線形微分方程
 式が得られるのではないかという idea
 が生ずる。

大山陽介氏はレベル 3 の elliptic modular
 surface (Hesse pencil $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - 3\alpha x_0 x_1 x_2 = 0$)
 の Picard - Fuchs 方程式から次の微分
 方程式を構成した。

$$\begin{cases} W' + X' + Y' = WX + XY + YW \\ W' + Y' + Z' = WY + YZ + ZW \\ W' + X' + Z' = WX + XZ + ZW \\ X' + Y' + Z' = XY + YZ + ZX \\ e^{\frac{4}{3}\pi i}(XZ + YW) + e^{\frac{2}{3}\pi i}(XW + YZ) + (XY + ZW) = 0 \end{cases} \quad \dots (4)$$

解は Dedekind の eta 関数

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \text{ を用いて}$$

$$W = \left(\log \frac{\eta(\frac{\tau}{3})^3}{\eta(\tau)} \right)'$$

$$X = \left(\log \frac{\eta(3\tau)^3}{\eta(\tau)} \right)'$$

$$Y = \left(\log \frac{\eta(\frac{\tau+2}{3})^3}{\eta(\tau)} \right)'$$

$$Z = \left(\log \frac{\eta(\frac{\tau+1}{3})^3}{\eta(\tau)} \right)' \quad \text{と書ける}$$

この場合にもレベル3のモジュラー形式がなす環の偶数ウェイトの部分環が(4)から回復できる。

これらのことから他の elliptic modular surface の場合にどのような微分方程式が得られるかは興味ある問題である。

上の2つの場合に群の対称性(それぞれ

S_3, A_4 と同型)が重要な役割を果たすことを考慮して、 $\Gamma(4), \Gamma(5)$ の場合には特に簡明な結果が得られるに違いないと思われる。結論から言うとそれは正しい。しかし計算を始めた頃にはレベル5のモジュラ-形式のなす環は明確ではなかった。実際、ほぼ同じ頃 坂内英一氏はコード理論との関連から次の予想をたてた。

レベル5のモジュラ-形式のなす環は
分数ウェイトのものまでこめて考えると
2変数の多項式環と同型になる。

この予想はその後 坂内-小池-泉政-関口氏により分数ウェイトのモジュラ形式の定式化も込めて証明された。

以下では、このことを踏まえて我々の問題のレベル5の場合に関する結果を構成のあらずじも含めて述べる。

まずレベル5の elliptic modular surface の Picard-Fuchs 方程式を必要とする

か、我々の目的は具体的な表示にあるので、座標もよく分かったもので改ってやる必要がある。

そのため昔から知られている次の表示を利用する。(Bianchi, Math. Ann. 17 (1880))

$$\begin{cases} X_0^2 + aX_2X_3 - \frac{1}{a}X_1X_4 = 0 \\ X_1^2 + aX_3X_4 - \frac{1}{a}X_2X_0 = 0 \\ X_2^2 + aX_4X_0 - \frac{1}{a}X_3X_1 = 0 \\ X_3^2 + aX_0X_1 - \frac{1}{a}X_4X_2 = 0 \\ X_4^2 + aX_1X_2 - \frac{1}{a}X_0X_3 = 0 \end{cases} \quad \dots (5)$$

(5) は $a \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty, 0, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\varepsilon^k\}_{k=0, \dots, 4}$ ($\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$)

で $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$ の中の非特異楕円曲線 C_a を定める。

$\bigcup_{a \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})} C_a \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (正確にはその特異点を除去した

もの) はレベル 5 の elliptic modular surface と同型になる。

さらに底空間の同型 $\overline{\mathbb{H}/\Gamma(5)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ は

$$\tau \longmapsto a(\tau)$$

$$a(\tau) = \frac{\eta^{\frac{2}{5}} \mathcal{J}_3\left(\frac{\tau+1}{2}, 5\tau\right)}{\mathcal{J}_3\left(\frac{\tau+1}{2}, 5\tau\right)} = \eta^{\frac{2}{5}} \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \eta^{5n^2 - n}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \eta^{5n^2 - 3n}}$$

で与えられ 分岐被覆

$$\overline{H/\Gamma(5)} \rightarrow \overline{H/SL(2, \mathbb{Z})} \quad (\text{Galois 群は } A_5)$$

を上の $a(\tau)$ と J -関数を使って表示したもの
がいわゆる正二十面体式

$$J(\tau) = \frac{(-a^{20}+1)+228(a^{15}-a^5)-494a^{10}}{1728a^5(a^{10}+11a^5-1)^5} \quad \text{である.}$$

一方 (5) 上の正則 1-形式を適当にとりや
ると周期 $K(a)$ は 2 階の糸線形微分方程式

$$a(a^{10}+11a^5-1)\frac{d^2k}{da^2} + (11a^{10}+66a^5-1)\frac{dk}{da} + 25a^4(a^5+3)k = 0$$

--- (6)

をみたし.

$$\left(\begin{array}{l} \text{(6) の各特異点での局所指数は} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} a=0 & -\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})\varepsilon^k & \infty \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right\} \end{array} \right)$$

∞ で正則に 5 位の零点をもつ (6) の解を $K_1(a)$
としそれに $a(\tau)$ を合成したものを $K_1(\tau)$ とおくと

$$K_1(\tau) = 2\pi i q^{\frac{1}{4}} \wp_3\left(\frac{\tau+1}{2}, 5\tau\right)^5 \eta(\tau)^{-3} \quad \text{となる.}$$

また (6) より

$$\{\tau; a\} = \frac{a^{20}+1-228(a^{15}-a^5)+494a^{10}}{2a^2(a^{10}+11a^5-1)^2}$$

が計算できる.

これらのことから、詳しい計算は省略するが、
 (k, τ) を $SL(2, \mathbb{Z})/\Gamma(5)$ で変換した時の挙動を
 知る必要がある、 $\Gamma(2)$ の場合に (3) から
 (2) を導いたのと同様のことを行、7 次
 の結果を得る。

$$\alpha_1(\tau) = q^{\frac{1}{20}} \eta(\tau)^{-\frac{3}{5}} j_3\left(\frac{\tau+1}{2}, 5\tau\right) = q_0^{-\frac{3}{5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{5n^2-n}$$

$$\alpha_2(\tau) = q^{\frac{1}{20}} \eta(\tau)^{-\frac{3}{5}} j_3\left(\frac{3\tau+1}{2}, 5\tau\right) = q_0^{-\frac{3}{5}} q^{\frac{3}{5}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{5n^2-3n}$$

$$\text{但し } q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \quad \text{とし}$$

$$(\alpha_1(\tau))^5 = k_1(\tau), \quad \frac{\alpha_2(\tau)}{\alpha_1(\tau)} = a(\tau) \quad \text{に注意)}$$

$$X_{\infty}(\tau) = \frac{d}{d\tau} (\log \alpha_1(\tau)).$$

$$X_0(\tau) = \frac{d}{d\tau} (\log \alpha_2(\tau)).$$

$$X_{2k+1}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left\{ \log(\alpha_2(\tau) + \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\varepsilon^k \alpha_1(\tau)) \right\},$$

$$X_{2k+2}(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left\{ \log(\alpha_2(\tau) + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\varepsilon^k \alpha_1(\tau)) \right\},$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \text{とあくと}$$

$$X_{\infty}, X_0, X_1, \dots, X_{10} \text{ は次をみたす}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{dX_\infty}{dt} &= \sum_{k=0}^{10} X_\infty X_k - X_\infty X_0 - X_1 X_2 - X_3 X_4 - X_5 X_6 - X_7 X_8 - X_9 X_{10} \\
 \frac{dX_j}{dt} &= X_\infty X_j + \sum_{k=0}^{10} X_j X_k - X_j^2 - X_\infty X_0 - X_1 X_2 - X_3 X_4 - X_5 X_6 - X_7 X_8 - X_9 X_{10} \\
 &\quad (j=0, 1, \dots, 10) \\
 \frac{X_j - X_k}{a_j - a_k} \cdot \frac{X_l - X_n}{a_l - a_n} &= \frac{X_j - X_n}{a_j - a_n} \cdot \frac{X_l - X_k}{a_l - a_k} \quad \dots (7) \\
 (X_j - X_\infty) \frac{X_l - X_k}{a_l - a_k} &= \frac{X_j - X_k}{a_j - a_k} \cdot (X_l - X_\infty) \\
 \text{但し } j, k, l, n &\in \{0, 1, \dots, 10\} \text{ で互に相異なる} \\
 \{a_0, a_1, \dots, a_{10}\} &= \{0, -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\varepsilon^k\}_{k=0, \dots, 4}
 \end{aligned} \right.$$

一方、先に述べた B-K-M-S による結果をもう少し正確に述べると、

$\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)$ は適当な保型因子に対して $\Gamma(5)$ に関するウェイト $1/5$ のモジュラー形式となり、その保型因子に関するモジュラー形式のなす環は $\mathbb{C}[\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)]$ に同型となる。

よって我々の微分方程式 (7) はモジュラー形式のなす環の生成元の対数微分がみたす方程式である (対数微分をとっているのが我々の場合には保型因子の

問題は生じない)。

さらに $\mathbb{C}[\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)]$ の中で偶数ウェイトのモジュラー形式のなす部分環を考えると (それは通常の係型因子による定義と一致する) それは差 $X_\infty - X_0, X_\infty - X_1, \dots, X_\infty - X_r$ をとることによって回復される。

以上の事に関して詳細に興味を持たれた方は

Differential Relations for
modular forms of level five,
to be appear in J.Math. Kyoto univ.
を参照して下さい。