

## ハミルトン問題の話題

電力中央研究所 坂内 広蔵

(BANNAI KOZO)

### 0. はじめに

ハミルトン問題に対するアプローチの一つに、ハミルトン路の存在しているグラフに対して、ハミルトン閉路が存在しているかどうかを調べる方法がある。特に、グラフのどの点に対しても、その点を端点とするハミルトン路が存在しているグラフでは、ハミルトン閉路が存在しやすいのでハミルトン閉路の非存在は興味深い。そのようなグラフの族として、Permutation Graphs および Generalized Petersen Graphs がある。これらのグラフ族のハミルトン閉路に対する研究の経緯を整理し、次の目標への予想を示す。

### 1. 定義

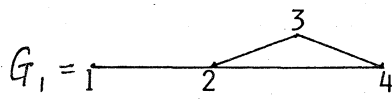
Permutation Graphs :  $P_{\alpha}(G)$ , Perm.G と略記する。

$G$  : グラフ, その頂点を  $1, 2, \dots, n$ ,

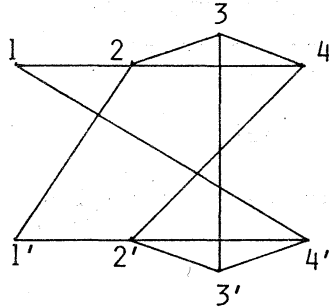
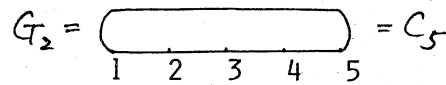
$\alpha$  : 置換 on  $\{1, 2, \dots, n\}$  とすると,

$P_{\alpha}(G)$  は  $G$  と  $G$  の COPY  $G'$  (頂点を  $1', 2', \dots, n'$ ) とを  $n$  個の線  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) で結んだグラフ。ただし  $x_i$  は  $G$  の頂点  $i$  と  $G'$  の頂点  $\alpha(i)'$  とを結ぶ。図1参照。

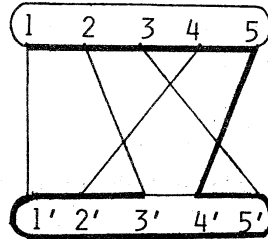
とくに、 $G$  が長さ  $n$  の cycle ( $C_n$ ) の時、図1 (b) のように  $P_{\alpha}(C_n)$  は、各頂点がハミルトン路の端点となっている。



$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a)  $P_{\alpha_1}(G_1)$ 

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



このグラフは  
Petersen graph  
と同型である。

(b)  $P_{\alpha_2}(C_5)$ 

図1. Permutation graphs の例.

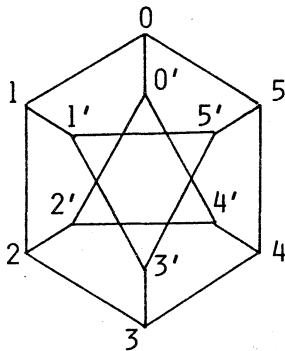
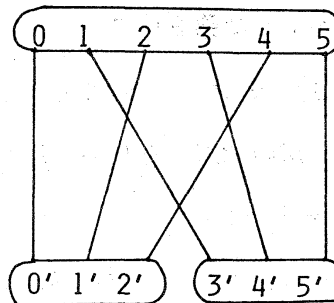
Generalized Petersen Graphs :  $G(n, k)$ , G.P.G. と略記する。

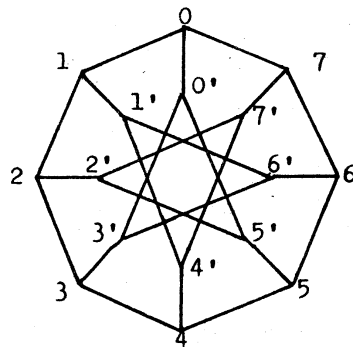
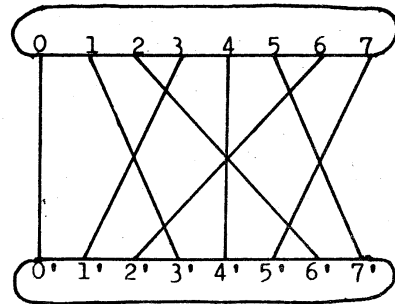
$n, k$  は正の整数,  $n > k$ ,  $n = 2k$  とすると,

$G(n, k)$  は,  $2n$  個の頂点  $\{i\}$  ( $0 \leq i < n$ ) および  $\{i'\}$  ( $0 \leq i < n$ ) を,  
 $3n$  個の線  $\{(i', i+k')\}$ ,  $\{(i, i+1)\}$ ,  $\{(i, i')\}$  ( $0 \leq i < n$ ) で  
 結んだグラフ。ただし, 添字はすべて modulo  $n$  で読む。図2参照。

とくに,  $n$  と  $k$  が互いに素の時, i.e.  $(n, k) = 1$ ,  $G(n, k)$  は長さが  $n$  の Cycle  
 をもとにしてできる Permutation Graph  $P_{\alpha}(C_n)$   $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k & 2k & \dots & nk \end{pmatrix}$  と同型となる。

図2 (b) 参照。

 $G(6, 2)$  $G(6, 2)$  と同型のグラフ図2 (a). Generalized Petersen graph の例  $(n, k) \neq 1$  の場合.

 $G(8,3)$  $G(8,3)$  と同型のグラフ図2 (b). Generalized Petersen graph の例  $(n,k) = 1$  の場合.

## 2. 研究の経緯

1967 Chartrand & Harary (6) Perm.G を定義。

1969 Chartrand & Frechen (5) Perm.G に関し, 次の問題を提起:

Q1: どのような  $P_\alpha(C_n)$  が Tait Cycle (even 2-factor) を持つか?

Q2: どのような  $P_\alpha(C_n)$  が ハミルトン閉路を持つか?

1969 Watkins (9) G.P.G. を定義。次の予想をたてる:

C1: G.P.G. は Petersen graph を除いて Tait Cycle を持つ。

1972 Castagna & Prins (4) C1を証明し, さらに次の予想をたてる:

C2: G.P.G. は Robertson (8) が識別した特定のグラフを除いてハミルトン閉路を持つ。

1968 Robertson (8) 上記特定のものの識別, すなわち

$G(n,2)$  は  $n \equiv 5 \pmod{6}$  のときハミルトン閉路を持たず, その他のときにはハミルトン閉路を持つ。

1972 Bondy (3)  $G(n,3)$  の場合を証明。

1972 Klee (7) 次の問題を提起し, 部分的解を与える,

Q3: (by Willoughby) ハミルトン閉路を持たない  $P_\alpha(C_n)$  が存在する  $n$  は?

A3:  $n$  が odd,  $\neq 3, 7$  の時には存在する。

また, しらみつぶしに調べることにより, 次の結果を得る,

$n \leq 8$  の時, ハミルトン閉路を持たない  $P_\alpha(C_n)$  は Petersen Graph のみ。

1978 Bannai (2)  $(n, k) = 1$  の場合,  $G(n, k)$  のハミルトン閉路の存在を証明する。付録で手法を紹介する。

1981 Alspach 他 (1)  $(n, k) \neq 1$  の場合についても適用可能な手法をもちいて, 大部分の  $G(n, k)$  がハミルトン閉路を持つことを証明。付録で手法を紹介する。

### 3. 結果と予想

G.P.G.に対するハミルトン閉路の存在は, ほとんど調べられたので, 残されている問題は, Cycle をもとにして作られる  $P_\alpha(C_n)$  に対してのハミルトン閉路についてである。ここでは, Q1~Q3に対して得られた次の結果および予想をのべる。

(1) Q3 に対する  $n$  が even の場合の結果:

$n$  : even,  $(\geq 22, 18)$  に対して, ハミルトン閉路をもたない  $P_\alpha(C_n)$  が存在する。

$n$  が 18 に対しては, 図3の  $P_\alpha(C_{18})$  がハミルトン閉路を持たない。 $n \geq 22$ の偶数

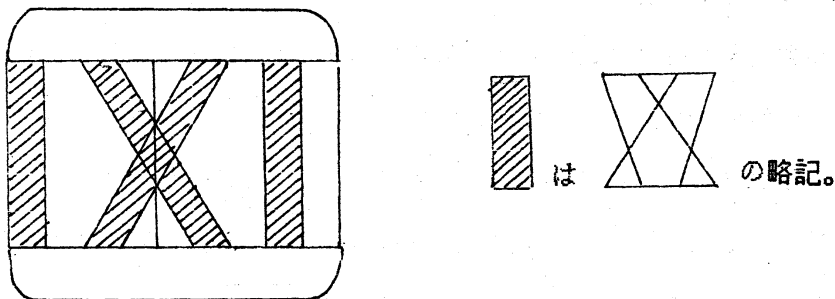


図3 ハミルトン閉路を持たない  $P_\alpha(C_{18})$  .

に対しては図3の  $P_\alpha(C_{18})$  から帰納的に構成することができる。そのために,  $SG(n, k)$  というグラフを定義する。これは, 図4のように  $G(n, k)$  と同型なグラフから線で結ばれている上下の2点を取りのぞいてできるグラフである。そして  $P_\alpha(C_n)$  に  $SG(5, 2)$  を付加することによって  $n$  から  $n+4$  の場合へと, あるいは  $SG(11, 2)$  で  $SG(5, 2)$  を置き換えることにより  $n$  から  $n+6$  の場合へとハミルトン閉路を持たない  $P_\alpha(C_n)$  が構成できる。

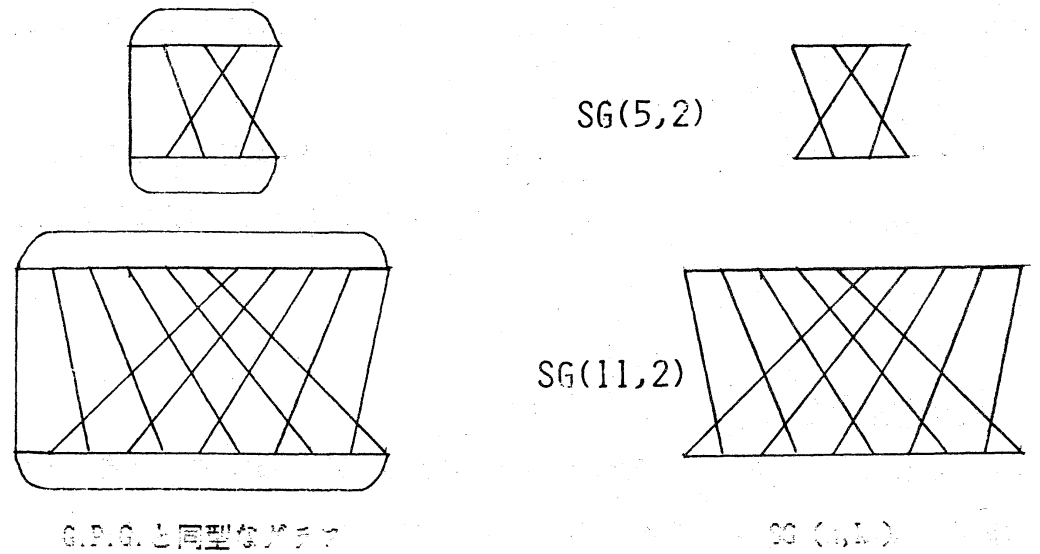


図4. G.P.G. と同型なグラフおよび  $SG(n, 2)$  の例.

$n = 20, 16, 14$  に対する存在は未証明。 $n \leq 12$  に対しては、存在しないことをしらみつぶしに調べて確認した。

## (2) Q2 に対する予想:

ハミルトン閉路をもたない  $P_\alpha(C_n)$  は、特定のブロック (Subgraph) を含む。

$n$  が 12 以下の時にはハミルトン閉路を持たない  $P_\alpha(C_n)$  は Robertson (8) が識別したグラフを除いて図5中のグラフで代表される  $n$  が9の場合だけである。これらは

Petersen graph に  $SG(5, 2)$  を付加してできたグラフである。ハミルトン閉路をも

たない  $P_\alpha(C_n)$  は、特定のブロック (Subgraph) (i)  $SG(n', 2)$   $n' \equiv 5 \pmod{6}$

あるいは (ii)  $G(n', 2)$   $n' \equiv 5 \pmod{6}$  と同型なグラフを cyclic に移動させてできる図6に示されているようなグラフ、を含むと予想される。

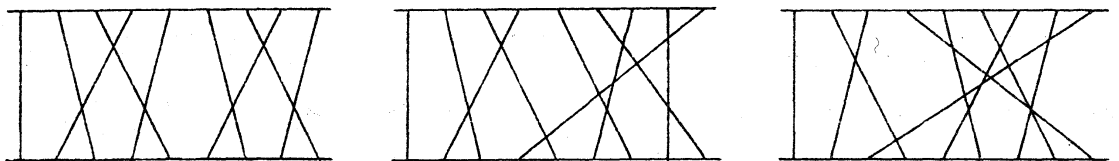


図5. ハミルトン閉路を持たない  $P_\alpha(C_9)$  の例.

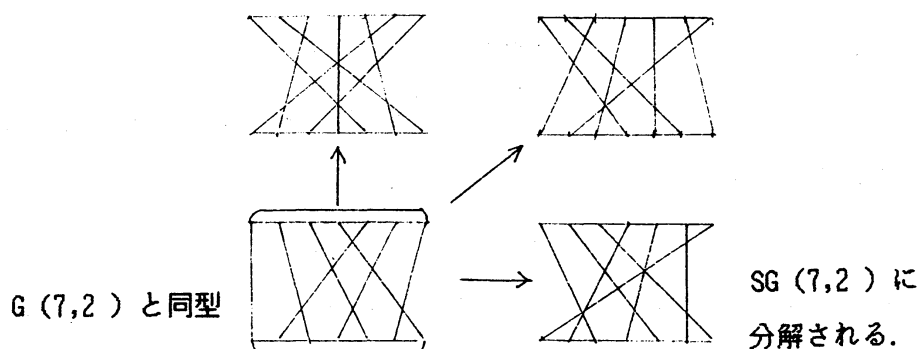


図6. G.P.G.から導かれるグラフの例.

(3) Q1 に対する予想:

Q2の予想に対して,  $P_\alpha(C_n)$  がSubgraph (i) および (ii) で  $n' > 5$  の場合, を含む時にはTait Cycleを持つと考えられる。Tait Cycleをもたない  $P_\alpha(C_n)$  は, ブロック (Subgraph) としてSG (5,2) あるいは  $n' = 5$  の (ii) のSubgraphを含む, と予想される。

### 付録

Bannal (2) の手法の紹介

G.P.G.は  $(n, k) = 1$  のとき, girth が8となり図7のような形のcycle が存在する。このcycle は, 上下のcycle の辺と上下を結ぶ線とを交互に通過しているので, Alternating cycle と呼ぶ。そして, disjointなAlternating cycle の集りをconfiguration と呼ぶ。次に, configuration のinterchange graph をかんがえる。これは

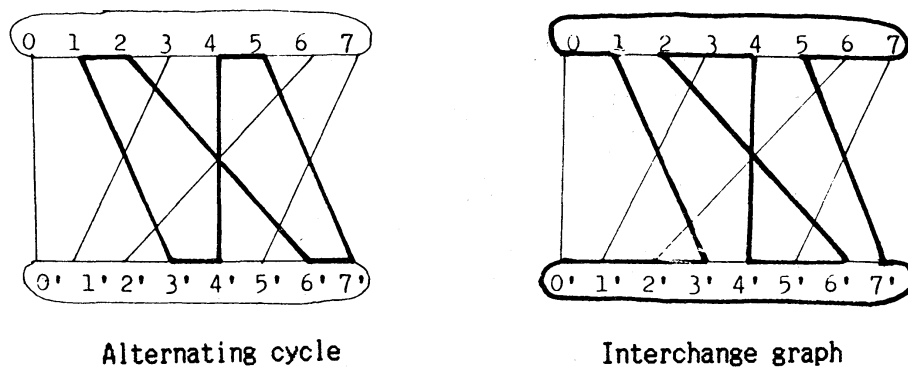


図7. Alternating cycle と Interchange graph.

与えられた configuration から上下の辺を取りのぞき、かわりに configuration には使用されていない上下の辺を付けくわえて出きるグラフである。interchange graph がハミルトン閉路となる configuration を  $h$ -configuration と呼ぶ。図8は  $h$ -configuration とその interchange graph である。従って、G.P.G. 上でハミルトン閉路を見付けるためには、 $h$ -configuration をさがせば良い。 $h$ -configuration は  $k/n$  及び  $k^{-1}/n$  (但し  $k^{-1}$  は  $kk^{-1} = 1 \pmod{n}$  となる整数) の値に注目することにより見付けることができる。例えば、 $0 < k/n < 1/3$  及び  $0 < k^{-1}/n < 1/3$  の時には図8のような  $h$ -configuration が存在して、 $G(n, k)$  はハミルトン閉路を持つ (正確には多少の条件が付加される)。  $0 < k/n < 1$  及び  $0 < k^{-1}/n < 1$  の領域を適当に分割することにより、各領域内の  $G(n, k)$  にハミルトン閉路があることをしめせる。ただし、分割の境界付近にある  $G(n, k)$  に対しては、詳細に調べる必要がある。

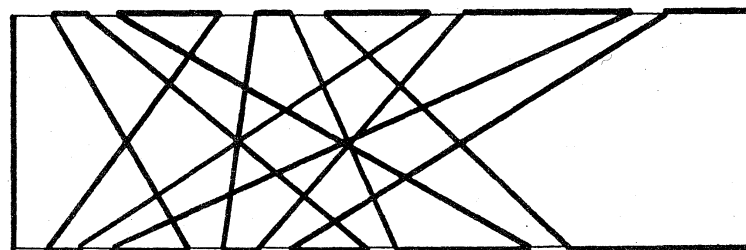
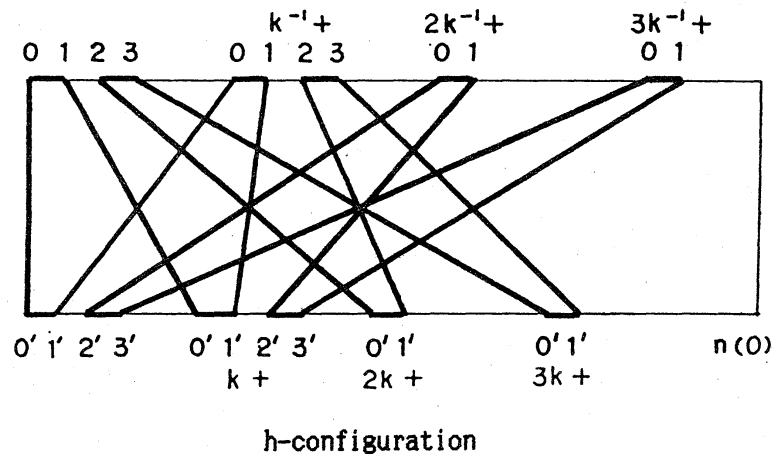


図8.  $h$ -configuration とその Interchange graph.

Alspach 他 (1) の手法の紹介

$G(13,5)$  を例として説明する。2次元格子の点に対して、 $\mathbb{Z}_{13}$  の要素のラベルをつける。 $(a,b)$  のラベルを  $i$  とすると、 $(a+1,b)$  のラベルは  $i+1$ 、 $(a,b-1)$  のラベルは  $i+5$  とする。図9中のグラフ  $G'$  は、上のようにしてラベルをつけられている。次に、 $G'$  の Euler trail を考えると、それが  $G$  のハミルトン閉路と対応していることがわかる。すなわち  $G'$  の Euler trail は、図9にみられるように  $0,1,6,11,12,7,2,3,8,7,6,5,4,9,10,5,0$ 、そして  $G$  のハミルトン閉路は、 $0,1,1',6',11',11,12,12',$

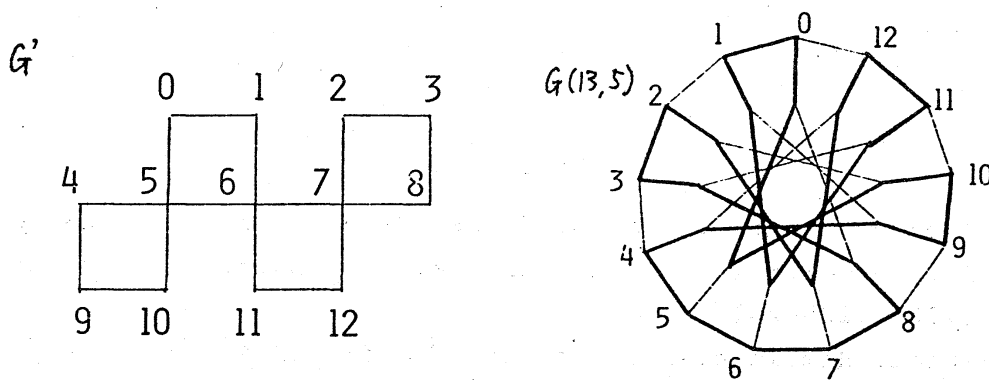


図9.  $L(13,5)$  上の  $G'$  の Euler trail と対応するハミルトン閉路.

$7',2',2,3,3',8',8,7,6,5,4,4',9',9,10,10',5',0',0$ 、となる。対応関係は、 $G$  の水平線が  $G$  の  $i$  から  $i+1$  への移動を、 $G'$  の垂直線が  $G$  の  $i'$  から  $i+5'$  への移動とし、そして  $G'$  の水平線から垂直線への移動には  $G$  の  $i$  から  $i'$  への移動あるいはその反対の移動が対応する。もちろんこの対応がただしくハミルトン閉路を作るためには、 $G'$  および Euler trail はいくつかの条件を満足していなければならない。2次元格子  $L(n,k)$  の部分グラフ  $G$  は、以下の条件を満たす開あるいは閉 Euler trail を持つ時、 $h$ -graph であるという。すなわち、(i) degree 4 の点を通過するときは方向を変えず、(ii) 各点のラベル  $i \in \mathbb{Z}$  に対して、(a)~(e) のいずれかがなりたつ。

(a)  $i$  は 1 点, degree 4,

(b)  $i$  は 1 点, degree 2, 水平線と垂直線とに接する,

(c)  $i$  は 2 点, 各点の degree 2, 1 点は 2 つの水平線と, 他の 1 点は 2 つの垂直線とに接する,

(d)  $i$  は 2 点, 各点の degree 1, 1 点は水平線と, 他の 1 点は垂直線とに接する

(e)  $i$  は 3 点, うち 2 点は degree 1 で同一方向の線と, 他の 1 点は degree 2 で, degree 1 の点に接する線と垂直方向の線と接する。

$L(n, k)$  上で  $h$ -graph を見付けることにより,  $G(n, k)$  にハミルトン閉路が存在することがわかる。

#### References

1. B. Alspach, P. J. Robinson and M. Rosenfeld, A Result on Hamiltonian Cycles in Generalized Petersen Graphs, J. Combin. Theory Ser. B 31 (1981), 225-231.
2. K. Bannai, Hamiltonian cycles in generalized Petersen graphs, J. Combin. Theory Ser. B 24 (1978), 181-188.
3. J. A. Bondy, Variations on the Hamiltonian theme, Canad. Math. Bull. 15 (1972), 57-62.
4. F. Castagna and G. Prins, Every generalized Petersen graph has a Tait Coloring, Pacific J. Math. 40 (1972), 53-58.
5. G. Chartrand and J. B. Frechen, On the chromatic number of permutation graphs, A proof Technique in Graph Theory, Academic Press (1969), 21-24.
6. G. Chartrand and F. Harary, On planar permutation graphs, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol III, No. 4 (1967), 443-448.
7. V. Klee, Which generalized prisms admit H-circuit ?, Graph Theory and Applications, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972 [Lecture Notes in Mathematics, vol. 303]), 173-178.
8. G. N. Robertson, Graphs under Girth, Valency, and Connectivity Constraints, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1968.
9. M. E. Watkins, A Theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs, J. Combin. Theory 6 (1969), 152-164.