

直交基底気泡関数要素安定化法による流体解析

Orthogonal Basis Bubble Function Element Stabilization Method for Fluid Analysis

独) 産業技術総合研究所・先進製造プロセス研究部門 松本 純一 (Junichi Matsumoto)
Advanced Manufacturing Research Institute,
National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST)

Summary. A two-level three-level formulation of finite element method with bubble function is proposed for the incompressible Navier-Stokes equations. Numerically, spatial discretization is applied to the mixed interpolation for the velocity and pressure fields by bubble element and linear element, respectively. Numerical solutions for shape optimization with shape smoothing based on selective lumping method of flow past a circular cylinder are treated in this paper. The purpose of the study is to formulate and solve an analysis of shape optimization for Navier-Stokes equations with unsteady flow. To improve efficiency, stability, and accuracy of the calculation, the mixed interpolation that uses an orthogonal basis bubble function element stabilization method for the state equations of incompressible viscous fluid is applied. To validate the present method, shape optimization for drag force of flow past a circular cylinder with periodic flow is analyzed.

Keywords : *Navier-Stokes equations, shape optimization, shape smoothing, bubble function element stabilization method, orthogonal basis bubble function element*

1 緒言

近年、コンピュータの急速な発達および並列計算の普及により、非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いた大規模な 3 次元計算が行われている。また、数値解析の応用問題として流体問題の計算において逆解析理論を用いた定常 Stokes 方程式の形状最適化問題の解析 [1],[2],[3],[4],[5],[6]、低レイノルズ数における定常及び非定常 Navier-Stokes 方程式の形状最適化問題・形状同定の解析 [7],[8],[9],[10],[11],[12]が行われている。本研究では、その応用問題として、非圧縮 Navier-Stokes 方程式における形状最適化の解析を行う。制御・同定などの逆問題を扱う場合には、その制御・同定量を求めるために、対象としている流れ場の状態方程式に対する随伴方程式を導き、状態方程式、随伴方程式をそれぞれ解いていかなければならない。さらに、これらの未知量をもとに最小化手法を適用して制御・同定量を反復計算により求めなければならない。以上の計算は、通常の計算（順解析）に比べて非常に定式化が複雑になる [13]。このことから、状態方程式、随伴方程式の定式化として、できるだけ簡便な安定化手法をとる必要がある。本研究では、これらの問題に対して従来提案されている解析手法に比べ計算を安定にかつ高精度に行い、極めて簡便に安定化手法の定式化を行うことのできる直交基底気泡関数要素安定化法 [13],[14],[15]を適用し、非圧縮 Navier-Stokes 方程式における評価関数に流体力を用いた形状最適化の解析を行う。最小化手法による最適形状問題では数値的に形状を求めていく反復過程において、計算された形状が振動し、一般的に形状の波打ち現象が発生してしまうことが問題となる [16]。本研究では、この形状の波打ち現象を回避することのできるセレクトィブランピング法 [17]による形状平滑化法を提案する。検証の問題として、円柱周りの計算を取り上げ、カルマン渦が発生する領域において、抗力最小・面積一定の形状最適化問題と抗力一定・面積最大の形状最適化問題の二つの問題を取り上げ提案手法の検証を行う。

2 基礎方程式

非圧縮粘性流れにおける基礎方程式は以下の運動方程式と連続式によって表される.

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで, u_i , p は流速, 圧力, また $\nu = 1/Re$ であり, Re はレイノルズ数である. 境界 Γ は Γ_1 と Γ_2 に分けられ, 以下の境界条件が規定される.

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\{-p \delta_{ij} + \nu (u_{i,j} + u_{j,i})\} \cdot n_j = t_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (4)$$

ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数, n_j は境界 Γ_2 の外向き法線ベクトルである.

3 直交基底気泡関数要素安定化法

3.1 MINI 要素

本研究では, 流体の基礎方程式における空間方向の定式化として, 混合補間を用いる. ここで, 混合補間の組み合わせとして MINI 要素 [14] は混合補間を用いた手法の中で最も自由度が少なく, かつ定式化が極めて容易に行える要素である. また, 計算を安定にかつ高精度に行うための安定化項の考慮が SUPG/PSPG 法 [18], BTD 法 [19] などの安定化手法に比べて非常に簡単に行える. 混合補間の要素の選択として, 流速に高次の要素を用いる場合には, 質量行列を集中化することは不可能であるが, MINI 要素は質量行列の集中化が可能である. さらに, 最近では, 基底 (形状関数) が直交する気泡関数要素 (直交基底気泡関数要素) [15] が開発され質量行列が自然に対角質量行列になる要素を選択できる.

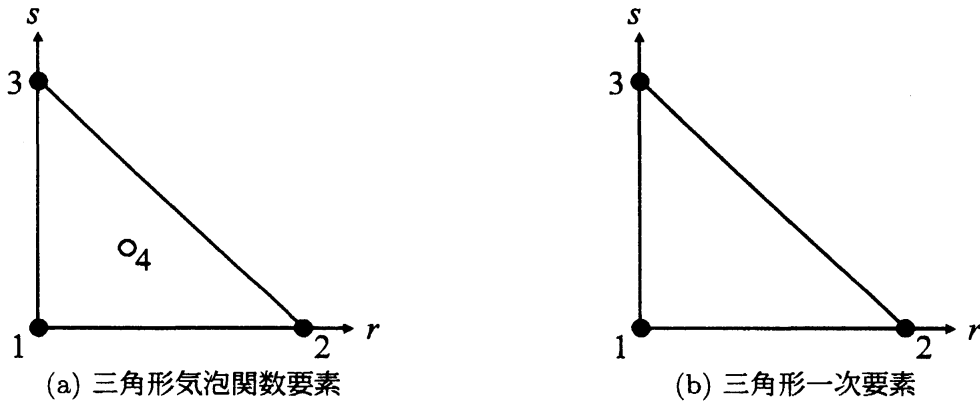


図 1: MINI 要素

したがって, 流速に高次要素を用いる他の混合補間に比べて, 極めて計算効率が高い手法であると考えられる. 上記理由により, 混合補間の組み合わせとして, MINI 要素を用いるものとする. すなわち, 要素の選択として, 流速に関しては気泡関数要素を圧力に関しては 1 次要素を補間関数に用いる (図 1 参照).

3.2 有限要素方程式

近似空間に2レベル, 重み空間に3レベルを採用した2レベル-3レベル有限要素近似 [15] を行う. 気泡関数要素安定化法を用いた定式化では, 次の1次要素の有限要素空間 $\bar{V}_i^h, Q^h$ と気泡関数の空間 $V_i^{h'}, \hat{V}_i^{h'}$ を用いる.

$$\bar{V}_i^h = \{\bar{v}_i^h \in (H_0^1(\Omega))^2, \bar{v}_i^h|_{\Omega_e} \in (P1(\Omega_e))^2\} \quad (5)$$

$$V_i^{h'} = \{v_i^{h'} \in (H_0^1(\Omega))^2, v_i^{h'}|_{\Omega_e} \in \phi_B v_{Bi}', v_{Bi}' \in \mathbf{R}^2\} \quad (6)$$

$$\hat{V}_i^{h'} = \{\hat{v}_i^{h'} \in (H_0^1(\Omega))^2, \hat{v}_i^{h'}|_{\Omega_e} \in \varphi_B v_{Bi}', v_{Bi}' \in \mathbf{R}^2\} \quad (7)$$

$$Q^h = \{q^h \in H_0^1(\Omega), q^h|_{\Omega_e} \in P1(\Omega_e), \int_{\Omega} q^h d\Omega = 0\} \quad (8)$$

ϕ_B, φ_B は Ω_e をコンパクトな台とする2レベル気泡関数 (直交基底となる気泡関数), 3レベル気泡関数 (安定化作用制御項を導く気泡関数) であり, それぞれ下記条件式 (9), (10) を満たす気泡関数である.

$$\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e} = \|\phi_B\|_{\Omega_e}^2 = \frac{N+1}{N+2} A_e \quad (9)$$

$$\langle 1, \varphi_B \rangle_{\Omega_e} = \langle \phi_B, \varphi_B \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad (10)$$

$V_h', \hat{V}_h'$ は気泡関数による近似空間に対応しており, Ω_e, N, A_e は, 要素領域, 次元数, 各要素の面積を示している. 有限要素空間として速度場に対して $V_i^h = \bar{V}_i^h \oplus V_i^{h'}$ を圧力場に対して Q^h を用いることにより, 有限要素近似解 $(u_i^h, p^h) \in V_i^h \times Q^h$ を見いだす次の近似問題が得られる.

$$\langle \dot{u}_i^h, \hat{v}_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, \hat{v}_i^h \rangle + \langle p_i^h, \hat{v}_i^h \rangle - \langle \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h), \hat{v}_i^h \rangle = 0 \quad \forall \hat{v}_i^h \in \hat{V}_i^h \quad (11)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (12)$$

ここで, $\langle u, v \rangle = \sum_{e=1}^{N_e} \langle u, v \rangle_{\Omega_e} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} uv \, d\Omega$ であり, N_e は要素数である. 流速場に対して V_i^h に属する近似解 u_i^h と

$$\hat{V}_i^h = \bar{V}_i^h \oplus \{v_i^{h'} + \hat{v}_i^{h'}; v_i^{h'}|_{\Omega_e} + \hat{v}_i^{h'}|_{\Omega_e} = (\phi_B + \varphi_B)v_{Bi}'\},$$

に属する重み関数 $\hat{v}_i^h$ は1次要素による補間関数の近似空間の元 $\bar{u}_i^h, \bar{v}_i^h \in \bar{V}_i^h$ および気泡関数による近似空間の元 $u_i^{h'}, v_i^{h'} \in V_i^{h'}$, $\hat{v}_i^{h'} \in \hat{V}_i^{h'}$ を用いて次のように表現できる.

$$u_i^h = \bar{u}_i^h + u_i^{h'}, \quad \hat{v}_i^h = \bar{v}_i^h + v_i^{h'} + \hat{v}_i^{h'} = v_i^h + \hat{v}_i^{h'} \quad (13)$$

気泡関数要素安定化法を適用した有限要素方程式は, 以下のように書きかえることができる.

$$\begin{aligned} & \langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle + \langle p_i^h, v_i^h \rangle - \langle \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h), v_i^h \rangle \\ & + \sum_{e=1}^{N_e} \langle \nu_i'(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} = 0 \quad \forall v_i^h \in V_i^h \end{aligned} \quad (14)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (15)$$

$$\nu_i' := \langle \dot{u}_i^h + u_j^h u_{i,j}^h + p_i^h - \nu(u_{i,j}^h + u_{j,i}^h), \varphi_B \rangle_{\Omega_e} / \langle (u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), \phi_{B,j} \rangle_{\Omega_e}$$

式 (14) の $\sum_{e=1}^{N_e} \langle \nu_i'(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e}$ は3レベル気泡関数による安定化作用を制御する項である. 有限要素方程式 (14), (15) の弱形式を適用した有限要素方程式は式 (16), (17) のように表すことができる.

$$\langle \dot{u}_i^h, v_i^h \rangle + \langle u_j^h u_{i,j}^h, v_i^h \rangle - \langle p^h, v_{i,i}^h \rangle + \langle \nu(\bar{u}_{i,j}^h + \bar{u}_{j,i}^h), \bar{v}_{i,j}^h \rangle$$

$$+ \sum_{e=1}^{N_e} \langle (\nu + \nu'_i)(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} = \langle t_i, v_i^h \rangle_{\Gamma} \quad \forall v_i^h \in V_i^h \quad (16)$$

$$\langle u_{i,i}^h, q^h \rangle = 0 \quad \forall q^h \in Q^h \quad (17)$$

ここで,

$$\langle (\nu + \nu'_i)(u_{i,j}^{h'} + u_{j,i}^{h'}), v_{i,j}^{h'} \rangle_{\Omega_e} = \frac{\langle \phi_B, 1 \rangle_{\Omega_e}^2}{A_e} \tau_{eR}^{-1} \delta_{ij} u'_{Bi} v'_{Bi} \quad (18)$$

$$\tau_{eR} = \left[\left(\frac{2|u_i|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

であり, h_e, A_e は各要素の代表長さ, 面積である [14]. 一般的に, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式などの移流拡散方程式系の方程式は, その計算を安定にかつ高精度に行うために安定化項の考慮が必要である. 式 (16), (17) をみるとこの安定化項は式 (16) の左辺第 5 項の重心点の項のみである. これは, 計算を安定にかつ高精度に行うための安定化項の考慮を行う手法である SUPG/PSPG 法 [18], BTD 法 [19] などの安定化項に比べてその数が極端に少なくかつ, 非常にその項が簡単なものである. また, 気泡関数要素安定化法は気泡関数の形状は固定して, その代わりに 3 レベル気泡関数を導入し, 式 (18) によって安定化の適切な作用を制御するのみで良いので, 気泡関数の形状を変化させて精度の向上を図る気泡関数の方法 [20], [21], [22] と比較しても定式化が簡便になる.

4 形状最適化

4.1 評価関数

有限要素方程式 (16), (17) を, 以下のように書き表す.

$$v_i^T (M \dot{u}_i + S(\bar{u}_j) u_i - B p - M_{\Gamma} t_i) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (19)$$

$$q^T (B^T u_i) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (20)$$

$$u_i(t_0) = \hat{u}_{i0} \quad \text{on } \Omega \quad (21)$$

ここで, M は整合質量行列 (直交基底を用いているので対角行列), $S(\bar{u}_j)$ は移流項 (移流速度 $\bar{u}_j$ は要素内 3 点平均値) と粘性項の行列, B は勾配行列, $M_{\Gamma} t_i$ は境界積分の項である. 本研究で定義される形状同定とは, 以下に示すような, 流体力を用いた評価関数を最小にする最適移動量を決定する問題である.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i)^T Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (A_C - A_0) Q_a (A_C - A_0) dt \quad (22)$$

ここで,

$$e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i = - \int_{\Gamma_B} t_i d\Gamma, \quad e_{\Gamma_B}^T = [0, 0, 0, -1, -1, -1, \dots, 0, 0, 0] \quad (23)$$

である. $e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i$ および D_i は, 物体表面上における流体力の計算値と目的値を, A_C は計算された形状の外部あるいは内部面積, A_0 は面積の目的値を表す. $e_{\Gamma_B}^T$ ベクトル成分は, 境界上の節点において対象とする物体 B 上の節点では -1 , その他の部分では 0 とする. 本研究では, 流体力に関する重みを $Q_i = 1$ とし, 面積に関する重み Q_a は式 (24) を用いる.

$$Q_a = \int_{t_0}^{t_f} (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i)^{T(0)} Q_i (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_i - D_i)^{(0)} dt / \int_{t_0}^{t_f} A_C^{2(0)} dt \quad (24)$$

式 (24) の上付き添え字 (0) は, 逆解析における反復計算の最初の回数を示している.

4.2 随伴方程式

有限要素方程式を考慮して、評価関数 J を以下のように拡張する。

$$J^* = J + \int_{t_0}^{t_f} \lambda_{u_i}^T (-S(\bar{u}_j)u_i + Bp + M\Gamma t_i - M\dot{u}_i) dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda_p^T (B^T u_i) dt \quad (25)$$

λ_{u_i} , λ_p はそれぞれ流速, 圧力に対するラグランジュ乗数を表す。すなわち, 拡張された評価関数 J^* において拘束条件として有限要素方程式を満足し, かつ評価関数 J が全時間で最小化されることになる最適移動量 x_j を求めることになる。次式のように J^* の第一変分をとり, 評価関数 J^* の最小値を求める。

$$\delta J^* = 0 \quad (26)$$

上式の条件 (必要条件) により, ラグランジュ乗数に対する随伴方程式が得られる。

$$M\dot{\lambda}_{u_i} - \tilde{S}(u_j)^T \lambda_{u_i} + B\lambda_p = 0 \quad in \quad \Omega \quad (27)$$

$$B^T \lambda_{u_i} = 0 \quad in \quad \Omega \quad (28)$$

$$\lambda_{u_i(t_f)} = 0 \quad in \quad \Omega \quad (29)$$

$$\lambda_{u_i} = -e_{\Gamma_B} Q_i (e_{\Gamma_B}^T M\Gamma t_i - D_i) \quad on \quad \Gamma \quad (30)$$

式 (27) の $\tilde{S}(u_j)^T$ は非線形項 $S(\bar{u}_j)u_i$ を線形化した行列の転置行列を示している。

4.3 時間方向の離散化

4.3.1 状態方程式

時間方向の離散化には, 安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し, 連続式 (20) は完全陰的に扱い, 計算効率の良い分離型解法を用いる [10]。圧力 Poisson 方程式の導出については, 運動方程式と連続式に対して, 連続式を完全に満足しない中間流速 $\tilde{u}_i^{n+1}$ を導入し, 次式によって流速と圧力を求める。

$$M \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + S(\bar{u}_j^*) \tilde{u}_i^{n+1/2} - Bp^n = M\Gamma_2 t_i \quad (31)$$

$$B^T M^{-1} B \Delta t (p^{n+1} - p^n) = -B^T \tilde{u}_i^{n+1} \quad (32)$$

$$M \frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} S(\bar{u}_j^*) (u_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}) - B (p^{n+1} - p^n) = 0 \quad (33)$$

ここで,

$$\bar{u}_i^* = \frac{1}{2} (3\bar{u}_i^n - \bar{u}_i^{n-1}), \quad \tilde{u}_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_i^{n+1} + u_i^n)$$

であり, $n, \Delta t$ は時間ステップ数, 時間増分量を示している。

4.3.2 随伴方程式

状態方程式の時間方向の離散化と同様に, 安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用し, 連続式 (28) は完全陰的に扱い, 計算効率の良い分離型解法を用いる。圧力のラグランジュ

乗数に対する Poisson 方程式の導出については、ラグランジュ乗数の運動方程式と連続式に対して、連続式を完全に満足しない中間流速 $\tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1}$ を導入し、次式によって流速と圧力を求める。

$$M \frac{\tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1} - \lambda_{u_i}^n}{\Delta t} + \tilde{S}(u_j)^T \tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1/2} - B \lambda_p^n = 0 \quad (34)$$

$$B^T M^{-1} B \Delta t (\lambda_p^{n-1} - \lambda_p^n) = -B^T \tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1} \quad (35)$$

$$M \frac{\lambda_{u_i}^{n-1} - \tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \tilde{S}(u_j)^T (\lambda_{u_i}^{n-1} - \tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1}) - B (\lambda_p^{n-1} - \lambda_p^n) = 0 \quad (36)$$

ここで、

$$\tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1/2} = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_{u_i}^{n-1} + \lambda_{u_i}^n)$$

である。注意すべき点として、式 (32), (35) は、質量行列 M の逆行列が必要となるが、補間関数として直交基底気泡関数要素を採用した場合には、質量行列が自然に対角行列となり、その逆行列は対角成分の逆数となるため逆行列の計算が容易であり、質量行列の人為的な集中化を行なうことによる解の劣化がない。

4.4 形状平滑化を考慮した降下法

本研究では最小化手法として、次式の形状平滑化を考慮した降下法を用いる。

$$x_j^{(l+1)} = x_j^{(l)} + \alpha^{(l)} \tilde{d}_j^{(l)} \quad (37)$$

$\tilde{d}_j^{(l)}$ は、式 (38) に示す降下方向 $d_j^{(l)}$ をセレクトイブランピング法 [17] によって平滑化した値である。

$$\begin{aligned} d_j^{(l)} = & - \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \lambda_{u_i}^T \left[- \left\{ \frac{\partial S(\bar{u}_j)}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i + \left\{ \frac{\partial B}{\partial x_j^{(l)}} \right\} p \right] \right. \\ & \left. + \lambda_p^T \left\{ \frac{\partial B^T}{\partial x_j^{(l)}} \right\} u_i + \left\{ \frac{\partial A_C}{\partial x_j^{(l)}} \right\} Q_a (A_C - A_0) \right\}^{T(l)} dt \end{aligned} \quad (38)$$

(l) は降下法の収束計算に対する反復回数である。 $\alpha^{(l)}$ は Sakawa-Shindo 法 [23] の重み係数を採用し、重み係数の初期値 $\alpha^{(0)}$ は、以下のように定めた。

$$\alpha^{(0)} = \Delta \hat{x}_{j \max}^{(1)} / \|\tilde{d}_j^{(0)}\|_{\infty} \quad (39)$$

$\|\cdot\|_{\infty}$ は最大ノルム、 $\Delta \hat{x}_{j \max}^{(1)}$ は $l = 1$ 回目の最大移動量である。本アルゴリズムは以下のようになっている。

1. $l = 0$ とし初期形状 $x_j^{(0)}$ を設定する。
2. 式 (19), (20) を用いて状態量 $u_i^{(l)}$, $p^{(l)}$ を求める。
3. 式 (22) を用いて評価関数 $J^{(l)}$ を求める。
4. 式 (27), (28) を用いて随伴量 $\lambda_{u_i}^{(l)}$, $\lambda_p^{(l)}$ を求める。
5. 式 (37) を用いて同定形状座標 $x_j^{(l+1)}$ を求める。
6. 誤差ノルム $e = \|x_j^{(l+1)} - x_j^{(l)}\|_{\infty}$ を計算し、 $e < \varepsilon$ なら計算を終了する。そうでなければ、次のステップに進む。
7. 式 (19), (20) を用いて状態量 $u_i^{(l+1)}$, $p^{(l+1)}$ を求める。
8. 式 (22) を用いて評価関数 $J^{(l+1)}$ を求める。
9. 重み係数 $\alpha^{(l)}$ を次のように修正する。
 $J^{(l+1)} \leq J^{(l)}$ ならば $\alpha^{(l+1)} = \frac{10}{9} \alpha^{(l)}$, $l+1 \rightarrow l$ としてステップ 4 へ、そのほかは $\alpha^{(l)} = \frac{1}{2} \alpha^{(l)}$ としステップ 5 へ。

4.5 形状平滑化法

本研究では、降下方向 $d_j^{(l)}$ を以下のセレクトイブランピング法によって平滑化を施している。

- Iterate: For $m = 1, 2, \dots, m_s$ do:

$$\bar{M}_s \tilde{d}_j^{(l)} = \tilde{M}_s d_j^{(l)} \quad (40)$$

$$\tilde{d}_j^{(l)} \longrightarrow d_j^{(l)} \quad (41)$$

m_s は平滑化処理における反復回数, $\bar{M}_s, \tilde{M}_s$ は、逆解析によって求める形状の表面要素 (2 次元では線一次要素, 3 次元では三角形一次要素) における集中質量行列, 混合質量行列である. 混合質量行列は次式によって表わされる.

$$\tilde{M}_s = e_s \bar{M}_s + (1 - e_s) M_s, \quad 0 \leq e_s \leq 1 \quad (42)$$

e_s は質量行列の集中化 (ランピング) の度合いを調整する変数でランピングパラメータと呼ばれており, $e_s = 1$ のときは集中質量行列に, $e_s = 0$ のときは整合質量行列 M_s になる. 式 (42) は以下のように変形できる.

$$\bar{M}_s \tilde{d}_j^{(l)} = \tilde{M}_s d_j^{(l)} - (1 - e_s)(\bar{M}_s - M_s) d_j^{(l)} \quad (43)$$

式 (43) より, 混合質量行列は集中質量行列に $-(1 - e_s)(\bar{M}_s - M_s)$ の項が加わった式である. 線の幅を l とした線一次要素, 一辺の幅を l とした正三角形一次要素の要素レベルでの整合質量行列 $M_s^{(e)}$, 集中質量行列 $\bar{M}_s^{(e)}$, 拡散行列 $K_s^{(e)}$ は以下のようになる.

線一次要素

$$M_s^{(e)} = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_s^{(e)} = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 3 & \\ & 3 \end{bmatrix}, \quad K_s^{(e)} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

正三角形一次要素

$$M_s^{(e)} = \frac{\sqrt{3}}{48} l^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_s^{(e)} = \frac{\sqrt{3}}{48} l^2 \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad K_s^{(e)} = \frac{\sqrt{3}}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

上式により, 線一次要素, 正三角形一次要素の $(1 - e_s)(\bar{M}_s^{(e)} - M_s^{(e)})$ は以下になる.

線一次要素

$$(1 - e_s)(\bar{M}_s^{(e)} - M_s^{(e)}) = (1 - e_s) \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

正三角形一次要素

$$(1 - e_s)(\bar{M}_s^{(e)} - M_s^{(e)}) = (1 - e_s) \frac{\sqrt{3}}{48} l^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

式 (46), (47) に現れる係数行列は式 (44), (45) の拡散行列と同じ形になっており, $(1 - e_s)(\bar{M}_s^{(e)} - M_s^{(e)})$ は数値拡散の効果を与える項であることがわかる. また, e_s が 1 に近づくと拡散の効果が小さくなり, e_s が 0 に近づくと拡散の効果が大きくなる. 式 (48) により, 式 (49), (50) に示した拡散係数 ν_s とランピングパラメータ e_s の関係が得られる.

$$(1 - e_s)(\bar{M}_s^{(e)} - M_s^{(e)}) = \nu_s^{(e)} K_s^{(e)} \quad (48)$$

線一次要素

$$\nu_s^{(e)} = (1 - e_s) \frac{l^2}{6} = (1 - e_s) \frac{h_e^2}{6}, \quad h_e = A_e, \quad A_e = l \quad (49)$$

正三角形一次要素

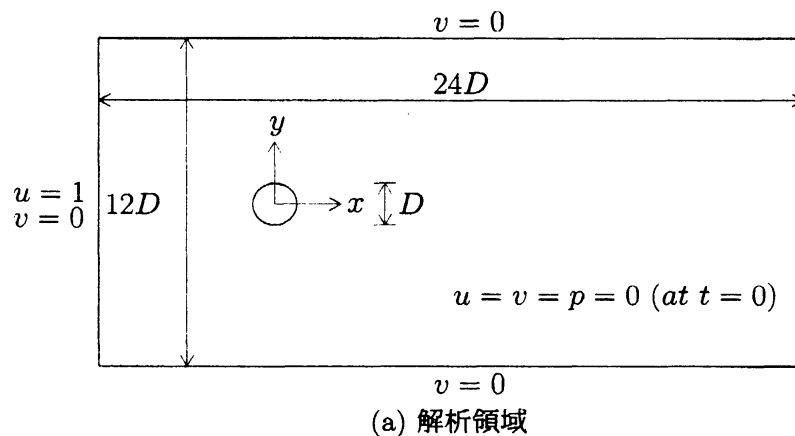
$$\nu_s^{(e)} = (1 - e_s) \frac{l^2}{8} = (1 - e_s) \frac{h_e^2}{6} \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad h_e = \sqrt{2A_e}, \quad A_e = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \quad (50)$$

h_e は各要素 e における代表長さであり、線一次要素の A_e は線の幅、正三角形一次要素の A_e は正三角形の面積を示している。式 (49), (50) より、ランピングパラメータ e_s によって導入される数値拡散の効果は、線一次要素のほうが正三角形一次要素よりも大きいことがわかる。線一次要素におけるランピングパラメータを $e_s = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、正三角形一次要素におけるランピングパラメータを $e_s = 0$ とすると線一次要素、正三角形一次要素の双方において、要素 e ごとに式 (51) に示す拡散係数の効果を与えることができる。

$$\nu_s^{(e)} = \frac{\sqrt{3}}{12} h_e^2 \quad (51)$$

5 2次元円柱周りにおける形状最適化問題

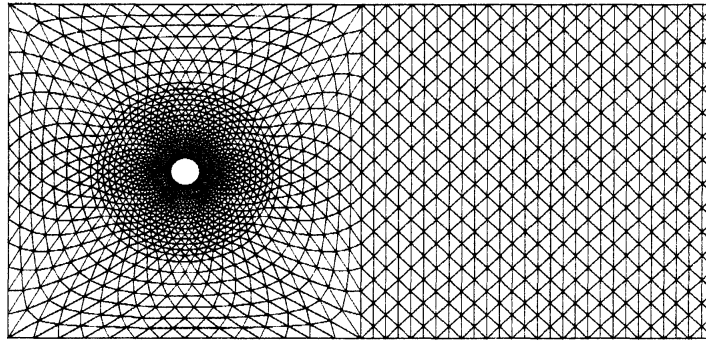
形状最適化問題の検証問題として流体力を評価関数に用いた円柱周りの解析を行う。この解析は、目的とする流体力（抗力）の値を評価関数に設定し、円形状から逆解析を開始して、評価関数が最小となるような形状を求める問題である。解析領域および有限要素メッシュを図 2(a), (b) に示す。図 2(b) の有限要素メッシュの節点数、要素数は 1834, 3500 であり円柱の周りを 56 分割している。形状同定解析を行うための円柱の初期形状の直径 D は 1.0 を設定した。初期形状に対するレイノルズ数 $Re = 250$ （カルマン渦が発生する領域）とし、時間増分量は 0.2 を用い、評価関数で用いる始端時間、終端時間は $t_0 = 200$, $t_f = 300$ としている。始端時間を $t_0 = 200$ とした理由は、非定常解析であるので、現象が周期解に移行した時間からの抗力をコントロールすることを考慮したためである。降下法で使用する初期設定量 $\Delta \hat{x}_j^{(1)} \max$, ε はそれぞれ 10^{-2} , 10^{-5} とした。



5.1 形状最適化問題について

本研究では、式 (52), (53) の二つの形状最適化問題を取り扱う。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_1)^T Q_1 (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_1) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (A_C - A_0) Q_a (A_C - A_0) dt \quad (52)$$



(b) 有限要素メッシュ

図 2: 解析領域と有限要素メッシュ

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_1 - D_1)^T Q_1 (e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_1 - D_1) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} A_C Q_a A_C dt \quad (53)$$

$(e_{\Gamma_B}^T M_{\Gamma} t_1)$ は抗力の計算値, A_C は計算によって得られる形状の外部面積 (有限要素分割された図 2(b) の領域) である. 式 (52) は抗力の目的値 $D_1 = 0$, 面積の目的値 A_0 を初期形状の外部面積と設定することにより, 抗力最小・面積一定の形状最適化問題となっている. 式 (53) は抗力の目的値 D_1 を式 (52) の問題で得られた抗力の計算値とし, 面積の目的値 $A_0 = 0$ として外部面積 A_C を最小 (得られる形状の内部面積を最大) と設定した, 抗力一定・(内部) 面積最大の形状最適化問題となっている.

5.2 形状平滑化作用の検討

4.5 節で提案した形状平滑化法の効果とパラメータ e, m_s の設定について検討を行う. 図 3 に, 式 (52) の評価関数を用い, $e = 1, m_s = 1$ (平滑化の作用なし), $e = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ と固定し, m_s を 1, 5, 10, 15, 20 とした場合の計算結果を示す. 図 3 の点線の円は直径 $D=1.0$ の初期形状を, 実線は形状最適化問題によって得られた最終形状を示している. 図 3 の (a) は平滑化の作用が働いていないため, 得られた形状がとがった形となっている. 図 3(b), (c) の場合も, 平滑化の作用が少ないため, 得られた形状がとがった形となっている. これに対して, 図 3(d), (e), (f) は, 平滑化の作用が働き, 得られた形状がなめらかな形となっており, 本研究で提案した形状平滑化法の有効性がわかる.

5.3 計算結果

図 4 に, 図 3(d) の平滑化パラメータを採用した場合の, 式 (52) における抗力最小・面積一定の形状最適化問題と式 (53) における抗力一定・(内部) 面積最大の形状最適化問題の計算結果を示す. 図 4 をみると, (a) 抗力最小・面積一定の形状最適化問題と (b) 抗力一定・(内部) 面積最大の形状最適化問題によって得られた最終形状は, ほぼ同様な形状になっている. 図 5 に図 4(a), (b) の形状最適化問題によって得られた形状と初期形状の内部面積 (物体内部), 外部面積 (物体外部) に対する体積 (面積) の変化率を示す. (a), (b) の形状最適化問題の双方とも, 物体外部の体積変化率はほとんど零であるが, 物体内部の体積変化率は -20% 前後になっている. この原因は, 内部面積に比べて面積の大きさが 300 倍以上の外部面積を評価関数に採用したためであると考えられる.

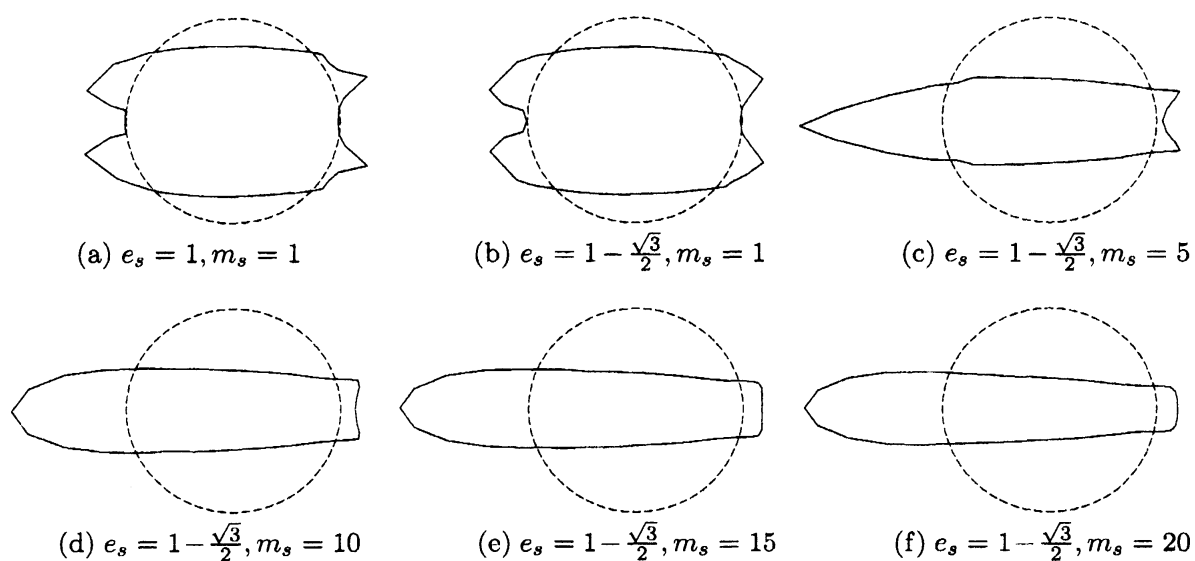
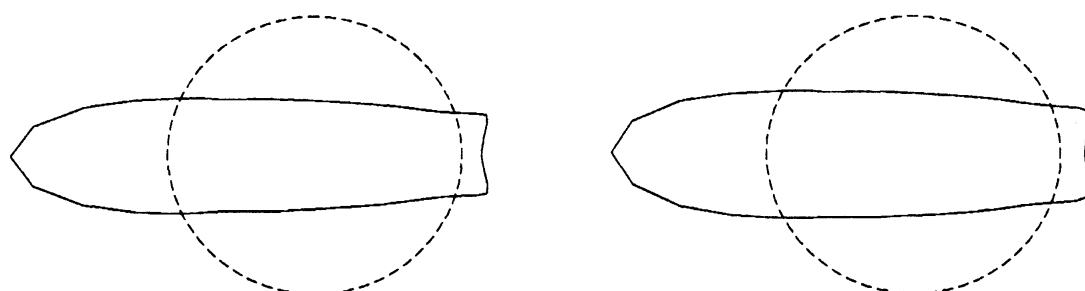
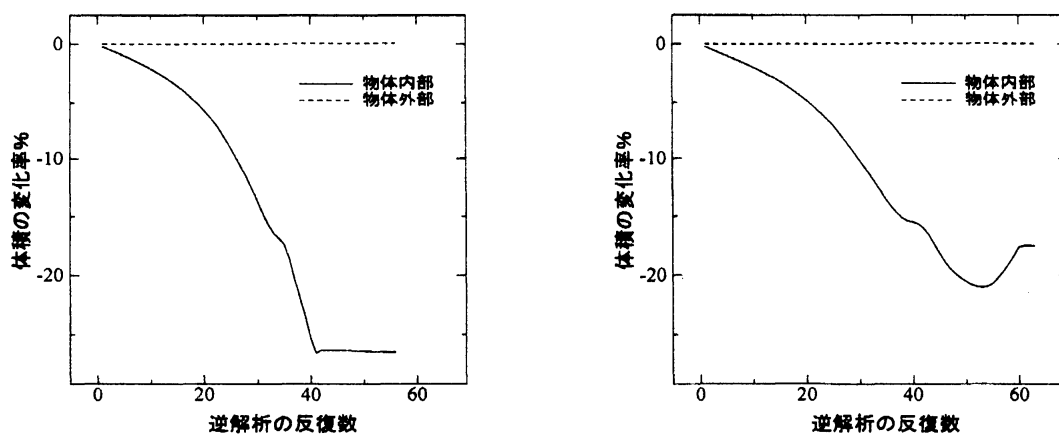


図 3: 抗力最小・面積一定の形状最適化問題における形状平滑化



(a) 抗力最小・面積一定の形状最適化問題 (b) 抗力一定・(内部)面積最大の形状最適化問題

図 4: 形状平滑化 ($e_s = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, m_s = 10$) を考慮した形状最適化問題の計算結果

(a) 抗力最小・面積一定の形状最適化問題 (b) 抗力一定・(内部)面積最大の形状最適化問題

図 5: 体積 (面積) の変化率

図6に、式(52)における A_C を内部面積の計算値、 A_0 を初期形状の内部面積と設定した場合の抗力最小・面積一定の形状最適化問題の計算結果を示す。図6(a)の最終形状は、図4(a),(b)で

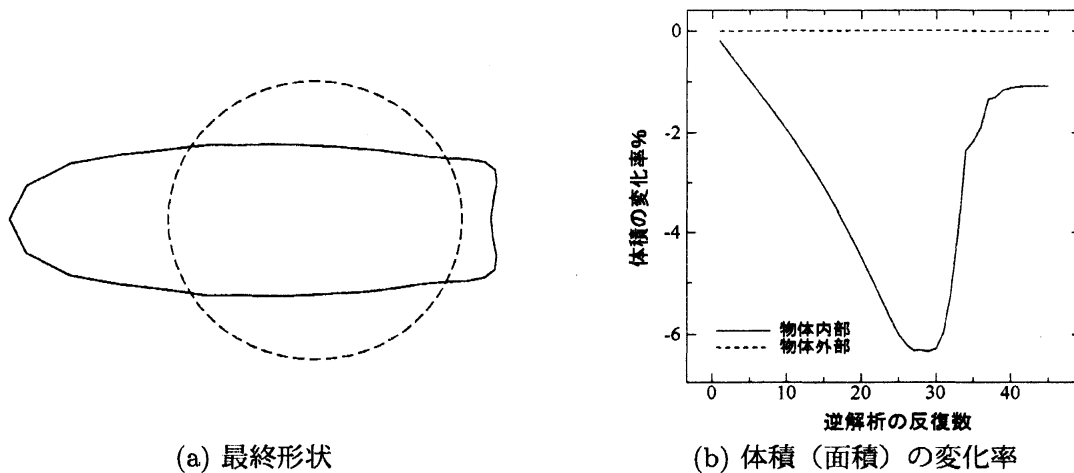


図6: 内部面積を用いた抗力最小・面積一定の形状最適化問題 ($e_s = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $m_s = 10$)

得られた形状と類似した形状になっている。図6(b)の体積(面積)の変化率は、物体外部の体積変化率がほとんど零で、物体内部の体積変化率は-1%程度となっており、内部面積を評価関数に採用することにより体積(面積)の変化率の度合いが改善されていることがわかる。

6 結言

本研究では、従来の安定化手法に比べて定式化が極めて簡便な直交基底気泡関数要素安定化法を用いた非定常問題における逆解析手法を提案した。評価関数に流体力を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式における円柱周りの形状最適化問題を取り上げ、形状の波打ち現象を回避できるセレクトティブランピング法 [17] による形状平滑化法を提案した。検証の問題として、抗力最小・面積一定、抗力一定・面積最大の二つの形状最適化問題の解析を行い双方の形状最適化問題において、ほとんど同様の形状を求めることが出来ることを示し、本提案手法の有効性を検証した。

参考文献

- [1] O.Pironneau :On optimum profiles in Stokes flow, *J. Fluid Mech.*, **59**, Part 1, pp.117, 1973.
- [2] O.Pironneau :On optimum design in fluid mechanics, *J. Fluid Mech.*, **64**, Part 1, pp.97, 1974.
- [3] J.M.Bourot :On the numerical computation of the optimum profile in Stokes flow, *J. Fluid Mech.*, **65**, Part 3, pp.513, 1975.
- [4] 別所, 姫野 :2次元 Stokes 流れにおける最適形状について, 関西造船協会誌, **193**, pp.115, 1985.
- [5] 畔上 :領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A, **60**, 574, pp.165, 1994.
- [6] H.Ogawa and M.Kawahara :Shape Optimization of Body Located in Incompressible Viscous Flow Based on Optimal Control Theory, *Int. J. Comput. Fluid Dynamics*, **17**, pp.243-251, 2003.

- [7] R.K.Ganesh :The minimum drag profile in laminar flow: a numerical, *Transaction of the ASME, J. Fluids Engng.*, **116**, pp.456-462, 1994.
- [8] 片峯, 津幡, 畔上 :粘性流れ場における形状最適化問題の解法, 日本応用数理学会, 平成 14 年度年会, 2002.
- [9] J.Matsumoto :Shape identification for incompressible viscous flow analysis using finite element method, *The Second China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*, pp.725-730, 2002.
- [10] 松本純一 :安定化気泡関数有限要素法を用いた非圧縮粘性流れにおける形状同定解析, 応用力学論文集 (JSCE), **6**, pp.267-274, 2003.
- [11] H.Yagi and M.Kawahara :Shape optimization of a body located in low Reynolds, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **48**, pp.:819-833, 2005.
- [12] 篠原, 奥田, 伊東, 中島, 井田 :随伴変数法による形状最適化技術, 第 19 回数値流体力学シンポジウム, **D4-1**, 2005.
- [13] J.Matsumoto and M.Kawahara :Shape identification for fluid-structure interaction problem using improved bubble element, *Int. J. Comput. Fluid Dynamics*, **15**, pp.33-45, 2001.
- [14] J.Matsumoto :A fractional step method for incompressible viscous flow based on bubble function element stabilization method, *Int. J. Comput. Fluid Dynamics*, **20(3-4)**, pp.145-155, 2006.
- [15] J.Matsumoto :A relationship between stabilized FEM and bubble function element stabilization method with orthogonal basis for incompressible flows, *Journal of Applied Mechanics*, JSCE, **8**, pp.233-242, 2005.
- [16] 海津, 畔上 :最適形状問題と力法について, 日本応用数理学会論文誌, **16(3)**, pp.277-290, 2006.
- [17] M.Kawahara and H.Hirano, :Two step explicit finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow, *Proc. of JSCE*, **329**, 1983.
- [18] T.E.Tezduyar et al. :Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure element, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **95**, pp.221-242, 1992.
- [19] 丸岡, 太田, 平野, 川原 : 同次補間を用いた陰的有限要素法による非圧縮粘性流れの解析, 構造工学論文集, **43A**, pp.383-394, 1997.
- [20] J.C.Simo, F.Armero, and C.A.Taylor :Stable and time-dissipative finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations in advection dominated flows, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **38**, pp.1475-1506, 1995.
- [21] T.Yamada :A bubble element for inviscid flow, *Finite Elements in Fluids*, **9**, pp.1567-1576, 1995.
- [22] 奥村, 川原 : 気泡関数要素を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する Petrov-Galerkin 有限要素法, 応用力学論文集, **4**, pp.121-126, 2001.
- [23] Y.Sakawa and Y.Shindo :On global convergence of an algorithm for optimal control, *Transactions on Automatic Control, IEEE*, **AC-25(6)**, pp.1149-1153, 1980.