

ADIABATIC LIMITS, THETA FUNCTIONS, AND GEOMETRIC QUANTIZATION (ANNOUNCEMENT)

吉田尚彦

明治大学理工学部数学科

TAKAHIKO YOSHIDA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

MELJI UNIVERSITY

1. INTRODUCTION

Lagrange fibration の幾何学的量子化において, Spin^c Dirac 作用素の指数と Bohr-Sommerfeld ファイバーと呼ばれる離散的に現れるファイバーの個数とが一致する現象が, 様々な例で確認されている [1, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 18, 10, 14, 15]. これについて, ある条件の下, 非特異 Lagrange fibration (つまり, Lagrange ファイバー束) に対して, Bohr-Sommerfeld 点で添え字づけられた正則切断の族で

- (1) 正則切断の空間の基底をなし,
- (2) 各々の切断のサポートは, 断熱極限の下で, 対応する Bohr-Sommerfeld 点の周りに集中する

ようなものが構成できたので, 論文 [17] にまとめている. 本稿はこの論文 [17] の予報である. [17] では本稿の内容よりも一般的な状況も論じる予定である.

2. LAGRANGE ファイバー束

2.1. 整アファイン構造. (M, ω) をシンプレクティック多様体とする.

定義 2.1. (M, ω) を全空間とするファイバー束 $\pi: (M, \omega) \rightarrow B$ で, ファイバーが Lagrange 部分多様体であるようなものを **Lagrange ファイバー束**とよぶ.

例 2.2. n 次元トーラス $T^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ の余接束の全空間 $(\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$ から $\mathbb{R}^n$ への射影 $\pi: (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は Lagrange ファイバー束である. ここで, x_i は $\mathbb{R}^n$ 方向の, y_i は T^n 方向の標準的な座標とする.

例 2.2 は, Lagrange ファイバー束の局所モデルを与える.

定理 2.3 (Arnold-Liouville の定理 [2]). ファイバーがコンパクト, 弧状連結であるような Lagrange ファイバー束は, 局所的には例 2.2 の $(\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ と同一視できる.

以下では断らない限り, Lagrange ファイバー束は全てファイバーがコンパクト, 弧状連結と仮定する.

定義 2.4. Lagrange ファイバー束 $\pi: (M, \omega) \rightarrow B$ の切断 u で $u^*\omega = 0$ となるものを **Lagrange 切断**とよぶ.

補題 2.5. $\psi: (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$ を例 2.2 の Lagrange ファイバー束 $\pi: (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ のファイバーを保つシンプレクティック同相とする. このとき, 行列 $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, 定数 $c \in \mathbb{R}^n$ と π の Lagrange 切断 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times T^n: x \mapsto (x, \tilde{u}(x))$ が存在して, ψ は

$$\psi(x, y) = (Ax + c, {}^t A^{-1}y + \tilde{u}(x))$$

と表せる.

特に, 補題 2.5 から次のことが分かる.

命題 2.6. $\pi: (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$ を *Lagrange* ファイバー束とする. このとき, B の座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ と各 $\alpha \in A$ に対してシンプレクティック同相 $\psi_\alpha: (\pi^{-1}(U_\alpha), \omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) \rightarrow (\varphi_\alpha(U_\alpha) \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$ で次の図式が可換になるようなものがある

$$\begin{array}{ccc} (\pi^{-1}(U_\alpha), \omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & (\varphi_\alpha(U_\alpha) \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & \varphi_\alpha(U_\alpha). \end{array}$$

さらに, 各 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の局所定数な写像 $A_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $c_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$ と *Lagrange* 切断 $u_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow (\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$ が存在して,

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, y) = \left(A_{\alpha\beta}x + c_{\alpha\beta}, {}^t A_{\alpha\beta}^{-1}y + u_{\alpha\beta} \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x) \right) \right)$$

とかける.

定義 2.7. 命題 2.6 の B の座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を整アフライン構造とよび, 多様体と整アフライン構造の組を整アフライン多様体とよぶ.

例 2.8. (1) $a_1, \dots, a_n$ を実線型空間 $\mathbb{R}^n$ の基底とする. このとき, $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用

$$\phi_\gamma(x) = x + \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i \quad (\gamma \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{R}^n)$$

による商空間 $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ には, 整アフライン構造が入る. この商空間は位相的には T^n である.

(2) n を自然数, a, b をともに正の実数とする. このとき, $\mathbb{Z}^2$ の $\mathbb{R}^2$ への作用を

$$\phi_{e_1}(x) := x + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{e_2}(x) := \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

で定める. ここで, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. この作用の商空間には, 整アフライン構造が入る. この商空間は位相的には T^2 であるが, この作用から誘導される整アフライン構造は (1) のものとは同型でないことが Mishachev によって知られている [16, Theorem A].

(3) $m, n \in \mathbb{Z}^3$ に対して, 積 $m \cdot n \in \mathbb{Z}^3$ を

$$m \cdot n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{m_1} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

で定める. $\mathbb{Z}^3$ は積 $\cdot$ に関して, 非可換な群になる. 次に, 群 $(\mathbb{Z}^3, \cdot)$ の $\mathbb{R}^3$ への作用を

$$\phi_n(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{n_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (n \in (\mathbb{Z}^3, \cdot), x \in \mathbb{R}^3)$$

で定めると, 商空間には整アフライン構造が入る.

(4) $l, m \in \mathbb{Z}^n$ に対して, 積 $l \cdot m \in \mathbb{Z}^n$ を

$$l \cdot m := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^{l_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{l_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

で定める. $\mathbb{Z}^n$ は積 $\cdot$ に関して非可換な群になる. 次に, 群 $(\mathbb{Z}^n, \cdot)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用を

$$\phi_m(x) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^{m_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{m_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \quad (m \in (\mathbb{Z}^n, \cdot), x \in \mathbb{R}^n)$$

で定めると, 商空間には整アファイン構造が入る. $n = 2$ の時, この商空間はクラインの壺である.

(5) 整数 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}$ に対して, $\mathbb{Z}^n$ の積を

$$\gamma' \cdot \gamma := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & & \\ & 1 & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{\gamma'_n} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} \quad (\gamma', \gamma \in \mathbb{Z}^n)$$

で定める. $\mathbb{Z}^n$ は積 $\cdot$ に関して非可換な群になる. 次に, 群 $(\mathbb{Z}^n, \cdot)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用を

$$\phi_\gamma(x) := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & & \\ & 1 & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{\gamma_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \quad (\gamma \in (\mathbb{Z}^n, \cdot), x \in \mathbb{R}^n)$$

で定めると, 商空間には整アファイン構造が入る.

命題 2.9. B を多様体とする. B が *Lagrange* ファイバー束の底空間であるための必要充分条件は, B が整アファイン構造を許容することである.

2.2. Developing map と completeness. $\pi: (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$ を *Lagrange* ファイバー束, $p: \tilde{B} \rightarrow B$ を B の普遍被覆とする. $\Gamma := \pi_1(B)$ とおくと, $\tilde{B}$ への Γ 作用の $p^*(M, \omega) \rightarrow \tilde{B}$ への持ち上げが存在する. このとき, 次が知られている.

命題 2.10. $\mathbb{R}^n$ の開集合 O , O 上の *Lagrange* ファイバー束 $(\tilde{M}, \tilde{\omega}) \rightarrow O$, $\tilde{B}$ から O への全射はめ込み $\text{dev}: \tilde{B} \rightarrow O \subset \mathbb{R}^n$, 及び $p^*(M, \omega)$ から $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ へのファイバーを保つシンプレクティック同相写像 $\widetilde{\text{dev}}: p^*(M, \omega) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\omega})$ で dev をカバーするものが存在する. さらに, Γ の $\mathbb{R}^n$ への整アファイン作用 $\phi \in \text{Hom}(\Gamma, \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n)$ と Γ の $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ への作用 φ が存在し, 次が成り立つ.

- (1) ϕ は O を保つ.
- (2) φ は ϕ をカバーする.
- (3) dev と $\widetilde{\text{dev}}$ は Γ 同変写像.

定義 2.11. $\text{dev}: \tilde{B} \rightarrow B$ を **developing map** とよぶ. また, $\tilde{B}$ と $\mathbb{R}^n$ が整アファイン多様体として同型であるとき¹, B は **complete** であるという.

例 2.12. 例 2.8 にある整アフィン多様体は全て complete である.

例 2.13 (complete でない整アファイン多様体の例). $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}$ の $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ への自然な作用による商空間は整アファイン多様体であるが², $n \geq 2$ の場合は complete でない.

Bieberbach の定理 [3, 4] より, 次が従う.

命題 2.14. B がコンパクトな平坦 *Riemann* 多様体ならば, complete である.

¹このとき, $O = \mathbb{R}^n$ で, dev は $\tilde{B}$ から $\mathbb{R}^n$ への, 整アファイン多様体としての同型を与えることが知られている

Duistermaat による Lagrange ファイバー束の分類定理 [6] により, 次が分かる.

補題 2.15. B が complete ならば, $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}) = (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$ ととることができ, $\widetilde{\text{dev}}$ は $p^*(M, \omega) \rightarrow \widetilde{B}$ から $(\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ へのファイバーを保つシンプレクティック同相写像で dev をカバーする.

$(L, \nabla) \rightarrow (M, \omega)$ を前量子化束とする. (L, ∇) の $p^*(M, \omega)$ への引き戻しも $p^*(L, \nabla)$ と表すことにする. 定義より, $p^*(M, \omega)$ への Γ 作用の $p^*(L, \nabla)$ への持ち上げが存在する.

補題 2.16. B は complete とする. このとき, $p^*(L, \nabla)$ から $(\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{C}, d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i)$ への束同型で $\widetilde{\text{dev}}$ をカバーするものが存在する.

注 2.17. 補題 2.16 この同一視の下, Γ の $(\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{C}, d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i)$ への作用を $\widetilde{\varphi}$ で表すことにする.

以上, まとめると次のようになる.

定理 2.18. B が complete ならば, 前量子化束付き Lagrange ファイバー束 $(L, \nabla) \rightarrow (M, \omega) \rightarrow B$ は, $(\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{C}, d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ を Γ 作用でわった商空間として得られる.

3. 主定理

3.1. Bohr-Sommerfeld 点. $\pi: (M^{2n}, \omega) \rightarrow B^n$ を Lagrange ファイバー束, $(L, \nabla) \rightarrow (M^{2n}, \omega)$ を前量子化束とする.

定義 3.1. $b \in B$ が Bohr-Sommerfeld であるとは, $(L, \nabla)|_{\pi^{-1}(b)} \rightarrow \pi^{-1}(b)$ が非自明な平行切断を許容するときをいう.

以下では, B は complete と仮定する. また, N を自然数とする.

$$(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}) := (\mathbb{R}^n \times T^n, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$$

$$(\widetilde{L}, \widetilde{\nabla}) := (\mathbb{R}^n \times T^n \times \mathbb{C}, d - 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n x_i dy_i)$$

とおくと, 定理 2.18 から, $(L, \nabla)^{\otimes N} \rightarrow (M, N\omega) \rightarrow B$ は $(\widetilde{L}, \widetilde{\nabla})^{\otimes N} \rightarrow (\widetilde{M}, N\widetilde{\omega}) \rightarrow \widetilde{B} \cong \mathbb{R}^n$ への $\Gamma := \pi_1(B)$ 作用による商空間として得られる. このとき,

命題 3.2. $x \in \mathbb{R}^n$ が $(\widetilde{L}, \widetilde{\nabla})^{\otimes N} \rightarrow (\widetilde{M}, N\widetilde{\omega}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ の Bohr-Sommerfeld 点である為には, $x \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$ であることが必要十分である. 特に, $\mathbb{R}^n$ への Γ 作用の基本領域を F , $(L, \nabla)^{\otimes N} \rightarrow (M, N\omega) \rightarrow B$ の Bohr-Sommerfeld 点全体のなす集合を B_{BS} とすると, $F \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$ と B_{BS} は一対一に対応する.

3.2. 概複素構造. 定理 2.18 より, $N\omega$ と整合的な $(M, N\omega)$ の概複素構造は $N\widetilde{\omega}$ と整合的な $(\widetilde{M}, N\widetilde{\omega})$ 上の Γ 同変概複素構造と一対一に対応する. ここで,

$$\mathcal{S} := \{Z = X + \sqrt{-1}Y \in M_n(\mathbb{C}) \mid X, Y \in M_n(\mathbb{R}), {}^t Z = Z, Y \text{ は正定値}\}$$

とすると ($\mathcal{S}$ を Siegel 上半空間という), $C^\infty(\widetilde{M}, \mathcal{S})$ と $(\widetilde{M}, N\widetilde{\omega})$ 上の $N\widetilde{\omega}$ と整合的な概複素構造全体の集合は, 対応

$$C^\infty(\widetilde{M}, \mathcal{S}) \ni Z \mapsto J_Z := \begin{pmatrix} XY^{-1} & -Y - XY^{-1}X \\ Y^{-1} & -Y^{-1}X \end{pmatrix} : T_{(x,y)}\widetilde{M} = T_x\mathbb{R}^n \oplus T_yT^n \hookrightarrow$$

で一対一に対応することが知られている.

3.3. Γ 作用. 定理 2.18 から, $(L, \nabla)^{\otimes N} \rightarrow (M, N\omega) \rightarrow B$ は $(\tilde{L}, \tilde{\nabla})^{\otimes N} \rightarrow (\tilde{M}, N\tilde{\omega}) \rightarrow \tilde{B}$ への $\Gamma := \pi_1(B)$ 作用による商空間として得られる. そこで, $\tilde{B}$, $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$, $(\tilde{L}, \tilde{\nabla})$ への Γ 作用を, $\gamma \in \Gamma$ に対してそれぞれ ϕ_γ , φ_γ , $\tilde{\varphi}_\gamma$ とすると, 補題 2.5 より, $A_\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $c_\gamma \in \mathbb{R}^n$, 及び Lagrange 切断 u_γ が存在して, φ_γ と ϕ_γ はそれぞれ

$$\phi_\gamma(x) = A_\gamma x + c_\gamma, \quad \varphi_\gamma(x, y) = (\phi_\gamma(x), {}^t A_\gamma^{-1} y + u_\gamma(x))$$

と表せる. このとき,

補題 3.3. $Z \in C^\infty(\tilde{M}, \mathcal{S})$ に対応する $(\tilde{M}, N\tilde{\omega})$ 上の $N\tilde{\omega}$ と整合的な概複素構造 J_Z が Γ 作用で保たれる為には,

$$\begin{cases} XY^{-1}A_\gamma - (Y + XY^{-1}X)Du_\gamma = A_\gamma XY^{-1} \\ (Y + XY^{-1}X){}^t A_\gamma^{-1} = A_\gamma(Y + XY^{-1}X) \\ Y^{-1}A_\gamma - Y^{-1}XDu_\gamma = Du_\gamma XY^{-1} + {}^t A_\gamma^{-1}Y^{-1} \\ Y^{-1}X{}^t A_\gamma^{-1} = Du_\gamma(Y + XY^{-1}X) + {}^t A_\gamma^{-1}Y^{-1}X \end{cases}$$

が成り立つことが必要十分である. ここで, Du_γ は u_γ のヤコビ行列である.

また, $\tilde{\varphi}_\gamma$ については, 直接計算により次が分かる.

補題 3.4. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して, $\tilde{\varphi}_\gamma$ が $\tilde{\nabla}$ を保つ為には, $c_\gamma \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$ であることが必要十分である. またこのとき, $\tilde{\varphi}_\gamma$ は

$$\tilde{\varphi}_\gamma(x, y, w) = \left(\varphi_\gamma(x, y), g_\gamma \exp 2\pi\sqrt{-1}N \left[\frac{1}{2}x({}^t Du_\gamma A_\gamma)x + {}^t x{}^t Du_\gamma c_\gamma + {}^t (A_\gamma^{-1}c_\gamma)y \right] w \right)$$

$((x, y, w) \in \tilde{L})$ と表せる. ここで, g_γ は $g \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$ の γ における値である.

3.4. 主定理. $(L, \nabla) \rightarrow (M, \omega) \rightarrow B$ を前量子化束付き Lagrange ファイバー束, N を自然数とする. また, J を $N\omega$ と整合的な $(M, N\omega)$ の概複素構造とする. 次が成り立つ.

定理 3.5. B は complete であると仮定する. また, J の $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ への引き戻しに対応する $Z \in C^\infty(\tilde{M}, \mathcal{S})$ は定値写像であると仮定する². このとき, 各 $\frac{m}{N} \in F \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n$ に対して, L の切断 $\vartheta_{\frac{m}{N}}$ を

$$\begin{aligned} \vartheta_{\frac{m}{N}}(x, y) := & \sum_{\gamma \in \Gamma} g_\gamma \exp \pi\sqrt{-1}N \left[-\frac{{}^t m}{N}(\Omega + {}^t A_\gamma Du_\gamma) \frac{m}{N} \right. \\ & + {}^t \left(\phi_{\gamma^{-1}}(x) - \frac{m}{N} \right) (\Omega + {}^t A_\gamma Du_\gamma) \left(\phi_{\gamma^{-1}}(x) - \frac{m}{N} \right) \\ & \left. - 2\frac{{}^t m}{N} {}^t A_\gamma u_\gamma(0) - 2{}^t c_\gamma u_\gamma(0) + 2{}^t \phi_\gamma\left(\frac{m}{N}\right)y \right] \end{aligned}$$

と定義すると, 全ての g_γ のノルムが $|g_\gamma| < 1$ ならば $\vartheta_{\frac{m}{N}}$ は L の正則切断であり, $\{\vartheta_{\frac{m}{N}}\}_{\frac{m}{N} \in F \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n}$ は $H^0(M; \mathcal{O}_L)$ の基底をなす.

定理 3.5 の証明の概要を述べる. 定理 2.18 より, (M, ω) の概複素構造に付随した L 係数 Spin^c Dirac 作用素の核に含まれる L の切断を求めるためには, $(\tilde{L}, \tilde{\nabla}) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\omega}) \rightarrow \tilde{B}$ 上で同様の問題の Γ 同変版を考えればよい. そこで, $(\tilde{L}, \tilde{\nabla}) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\omega}) \rightarrow \tilde{B}$ 上で微分方程式を解き, Γ 同変という条件を考慮すると, $\vartheta_{\frac{m}{N}}$ が得られる.

注 3.6. 定理 3.5 における概複素構造についての仮定があると, M は平坦 Riemann 多様体になる. 論文 [17] では, この仮定を弱めた場合を論じる予定である.

²このとき, (M, J, ω) は Kähler であり, L には正則直線束の構造が入る.

REFERENCES

1. J. E. Andersen, *Geometric quantization of symplectic manifolds with respect to reducible non-negative polarizations*, Comm. Math. Phys. **183** (1997), no. 2, 401–421.
2. V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, second ed., Graduate texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989.
3. L. Bieberbach, *über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume*, Math. Ann. **70** (1911), no. 3, 297–336.
4. ———, *über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume (Zweite Abhandlung.) Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich*, Math. Ann. **72** (1912), no. 3, 400–412.
5. V. Danilov, *The geometry of toric varieties (Russian)*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 2, 85–134, English translation: Russian Math. Surveys **33** (1978), no. 2, 97–154.
6. J. J. Duistermaat, *On global action-angle coordinates*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), no. 6, 687–706.
7. H. Fujita, M. Furuta, and T. Yoshida, *Torus fibrations and localization of index I*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **17** (2010), no. 1, 1–26.
8. ———, *Torus fibrations and localization of index II*, Comm. Math. Phys. **326** (2014), no. 3, 585–633.
9. ———, *Torus fibrations and localization of index III*, Comm. Math. Phys. **327** (2014), no. 3, 665–689.
10. M. D. Grossberg and Y. Karshon, *Equivariant index and the moment map for completely integrable torus actions*, Adv. Math. **133** (1998), no. 2, 185–223.
11. V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), no. 3, 515–538.
12. L. Jeffrey and J. Weitsman, *Bohr-Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 3, 593–630.
13. Y. Kamiyama, *The cohomology of spatial polygon spaces with anticanonical sheaf*, Int. J. Appl. Math. **3** (2000), no. 3, 339–343.
14. Y. Karshon and S. Tolman, *The moment map and line bundles over presymplectic toric manifolds*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 3, 465–484.
15. M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans, and equivariant index*, Tohoku Math. J. **51** (1999), no. 2, 237–265.
16. K. N. Mishachev, *The classification of lagrangian bundles over surface*, Differential Geom. Appl. **6** (1996), no. 4, 301–320.
17. T. Yoshida, *Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization*, in preparation.
18. ———, *On counting lattice points and Riemann-Roch numbers in Lagrangian fibrations*, Talk at University of Toronto, January 2008.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, MEIJI UNIVERSITY,
 1-1-1 HIGASHIMITA, TAMA-KU, KAWASAKI, 214-8571, JAPAN
E-mail address: takahiko@meiji.ac.jp