

ある 4 次元開多様体とその中の 'bad disk' について

東大理 松本幸夫

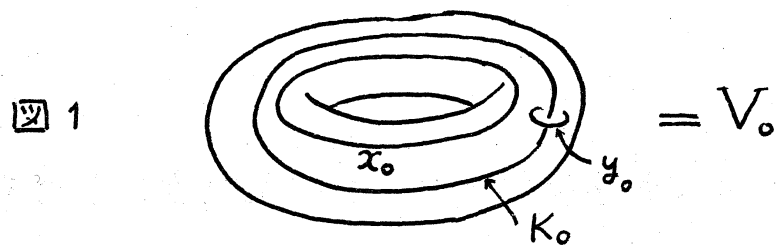
§ 1. 序

一般に、4次元多様体 M と、2次元球面からの連続写像 $f: S^2 \rightarrow M$ が与えられたとき、 f は必ずしも位相的埋め込み写像 (topological embedding) にホモトープではない。このノートの目的は、そのことを示すある 4次元開多様体の例を与え、その中に局所平坦に埋め込まれたある開円板 (これを仮に bad disk と呼ぶ) が、 S^2 の位相的埋め込みを許さない幾何学的障害になっている様子を示すことである。

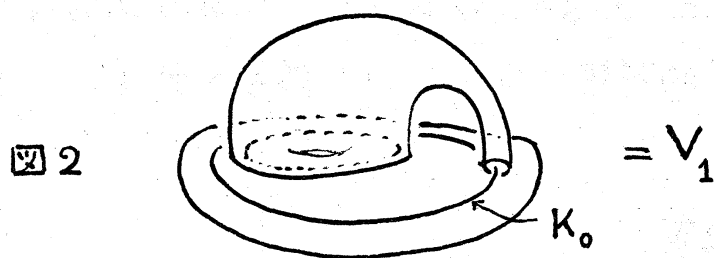
§ 2. その構成

定理 1 次の性質 (i), (ii) を持つ 4次元開多様体 U^4 が存在する。(i) U^4 は S^2 とホモトピー同値である ($U^4 \simeq S^2$)。 (ii) $H_2(U^4; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の、零でない要素は、 S^2 の位相的埋め込みによっては実現出来ない。

U^4 の構成 この多様体 U^4 は, Venema 氏との共著[1]で与えた W に他ならないが, 念のため, ここでその構成を復習しておく. まず, 4次元の Solid torus $D^3 \times S^1$ をとり, それを V_0 とする. V_0 の境界 ∂V_0 上に3つの円周 x_0, y_0, K_0 を, 図1に示されたように埋め込む.

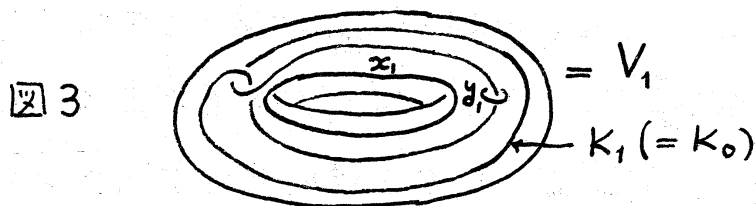


そして, x_0 と y_0 の管状近傍(∂V_0 の中でのそれ)に沿って $S^1 \times D^2 \times [0, 1]$ を V_0 に貼り付ける.(図2)得られた多様体を V_1 とする: $V_1 = V_0 \cup S^1 \times D^2 \times [0, 1]$. このような操作を



“円周 x_0, y_0 に沿って V_0 に round handle をくっつける操作”と呼ぼう. 論文[1]で示したように, こうして得られた V_1 は再び $D^3 \times S^1$ と PL 同形になる. そして, ∂V_1 の上に K_0 .

が乗っているが、 K_0 の位置は ∂V_1 では図3のように見える。
 (説明があとさきになってしまったが、round handle をく
 っつける際の framing は自明なものをとる。) ∂V_1 上に乗っ



ている K_0 のことを K_1 と名付ける。 ∂V_1 上に再び円周 x_1, y_1
 を(図3のように)とり、 x_1, y_1 に沿って V_1 に round
 handle をくっつける。得られた多様体を V_2 とする。 V_2 は、
 また $D^3 \times S^1$ とPL同形になっていて、その境界 ∂V_2 上で K_1
 は図4の K_2 のように見える。 ∂V_2 上にまた円周 x_2, y_2 を

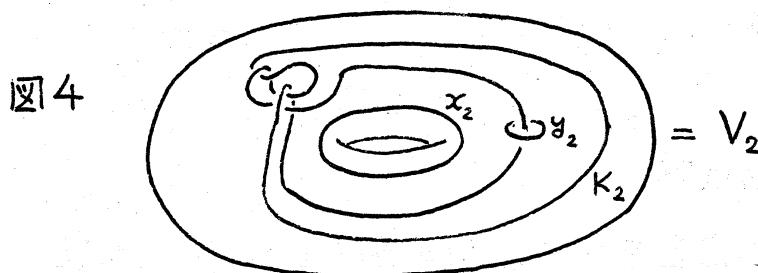


図4のようにとり、それ等に沿って V_2 に round handle を
 くっつける。得られた多様体を V_3 とする。以下同様に、同じ

操作を際限なく繰り返す。はじめの K_0 の ∂V_0 における円管状近傍を $N (\cong S^1 \times \mathbb{R}^2)$ とすると、 N は、どの ∂V_i にも埋め込まれているとしてよい。 V_i から V_{i+1} を構成するとき、 $K_i (= K_0)$ の管状近傍はそのままにしておく、と考えられるからである。さて $W_0 = N \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} \text{Int} V_i$ とおく。すなわち、無限の和集合 $\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ から、 N 以外の境界をとりはずしてしまふのである。 V_{i+1} を、 V_i から構成する方法をみれば、包含写像 $V_i \rightarrow V_{i+1}$ がホモトピーゼロであることがわかる。また、 $\partial W_0 \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$ は明らか。よって次の補題が得られた。

補題 2 W_0 は可縮であり、かつ $\partial W_0 \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$ である。

W_0 の境界 ∂W_0 に沿って、‘開いた 2 ハンドル’ $D^2 \times \mathbb{R}^2$ を貼り合わせて得られる多様体を U^4 とする。これが構成しようとしていた 4 次元円多様体である。補題 2 から直ちに

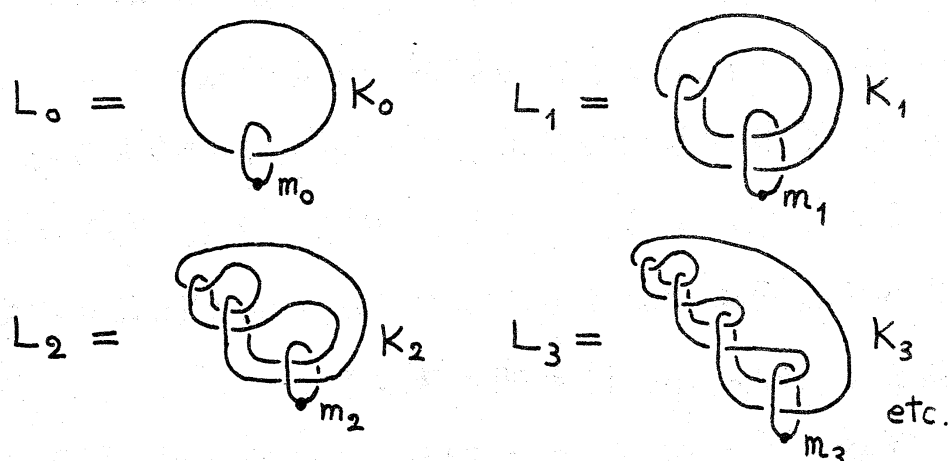
補題 3 $U^4 \simeq S^2$

がわかる。

§ 3. U^4 の性質

定理 1 の (ii) を示そう。前の論文 [1] では、 $H_2(U^4; \mathbb{Z})$ の零でない要素が PL に埋め込まれた S^2 で表わせない事を示したが、ほぼ同じ議論で、位相的に埋め込まれた S^2 でも表わせないことが言えるのである。まず、 U^4 の構造についての注意、

$\{L_i\} \ i=0, 1, 2, \dots$ を次のような絡み目の系列とする.



(このような絡み目の系列は、既にMilnor の論文[2]に現われている。) Kirbyの方法に従って、絡み目によって4次元多様体を表わす. 上図で、点(dot)のついた円周 m_i は $S^1 \times D^3$ を表わし、もう一方の円周 K_i に沿って $S^1 \times D^3$ に2ハンドルをつける.(framingは自明とする.) こうして得られた4次元多様体を U_i とする.

補題4 (i) 任意の $i \geq 1$ について, $U_i \simeq S^1 \vee S^2$. (ii) 次の性質(i), (ii)を持つ埋め込み $U_i \subset \text{Int}(U_{i+1})$ が存在する.
 (i) induced homomorphism $\pi_1(U_i) \rightarrow \pi_1(U_{i+1})$ は自明.
 (ii) $U^4 = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ (U^4 は §2 で構成した4多様体)

さて、もし $H_2(U^4; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ の零でない要素が S^2 の位相的な埋め込みで表わされるとすると、その埋め込まれた像

を Σ^2 として, Σ^2 は適当な U_i の内部に含まれる (補題 4 の (ii))
 $\Sigma^2 \subset U_i$. すると, このことから, 論文 [1] の p 213
 の Thms 1.1 and 1.2 の証明と全く同様にして, 多様体 $W^4(L_i)$
 の $\mathbb{Q}$ -基底が互いに交わらない S^2 の位相的埋め込みで表わさ
 れることがわかる. ここに, $W^4(L_i)$ は, 絡み目 L_i に沿っ
 て 4 次元円板 D^4 に 2 つの 2 ハンドルをつけた 4 次元多様体で
 ある (framing は自明とする).

定理 5 (Kawauchi の Thm C in [3] の $\mathbb{Q}$ -TOP version)

もし $H_2(W^4(L_i); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ の基底が互いに交わらな
 い S^2 の位相的埋め込みで表わされるなら, L_i の 1 変数アレ
 クサンダー多項式は $(1-t)^2$ ($i \geq 2$) という因子を含まない.

ところが, L_i の 1 変数アレクサンダー多項式は $(1-t)^{2i+1}$
 であることがわかる. よって定理 5 により, $W^4(L_i)$ の $\mathbb{Q}$
 基底が互いに交わらない S^2 の位相的埋め込みで表わされるこ
 とはない. 従って, $H_2(U^4; \mathbb{Q})$ の零でない要素は S^2 の位
 相的埋め込みでは表わされない.

Ohkawa の次の定理を使っても同じことが結論される.

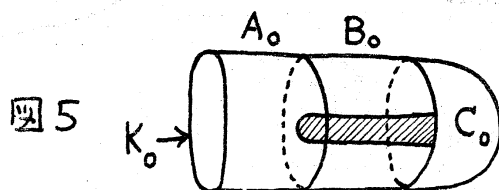
定理 6 (Ohkawa [4], Thm 2 の系) もし $H_2(W^4(L); \mathbb{Q})$
 $\cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ の基底が互いに交わらない S^2 の位相的埋め込みで
 表わせるなら, 絡み目 L の Milnor μ -不変量 $= 0$ である.

絡み目 L_i の Milnor μ 不変量は 0 ではないから [2], $H_2(W^4(L_i); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ の基底は, 互いに交わらない S^2 の位相的埋め込みで表わせない.

§ 4. U^4 中の bad disk

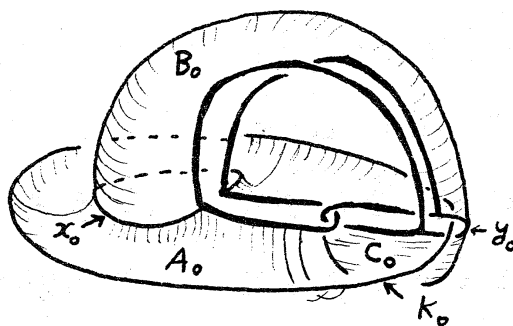
前節で, $H_2(U^4; \mathbb{Z})$ の零でない要素は S^2 の位相的埋め込みで表わせないことを示したが, この節では, U^4 のどのような‘幾何的事実’が S^2 の埋め込みをさまたげているかを見ることにする. 簡単のため, $H_2(U^4; \mathbb{Z})$ の生成元についてそれを見ることにする. それには, § 2 で構成した W_0 の境界 $\partial W_0 \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$ の‘中心線’ $S^1 \times \{0\}$ が, 何故 W_0 の中で位相的に埋め込まれた円板を bound しないか, その幾何的事実を見ればよいだろう.

まず, 図 1 の V_0 の中で, K_0 と x_0 とがアニュラス A_0 を張る. そして V_0 につける round handle の中で, x_0 と y_0 とがもうひとつのアニュラス B_0 を張る. 図 5 のように, アニュラス $A_0 \cup B_0$ に ‘Cap’ C_0 をかぶせ, かつ斜線で示したように穴をあければ, 再びアニュラスになる. このアニュラス



を, その境界が V_1 に入るようにして V_1 の中に埋め込むことが出来る。(図6)

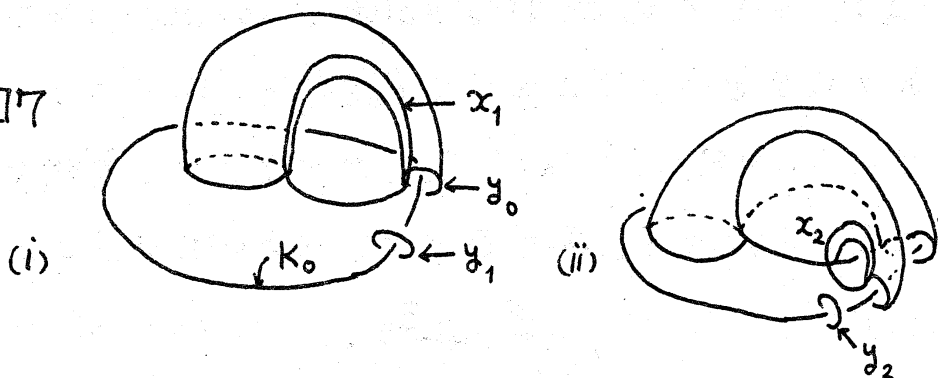
図6



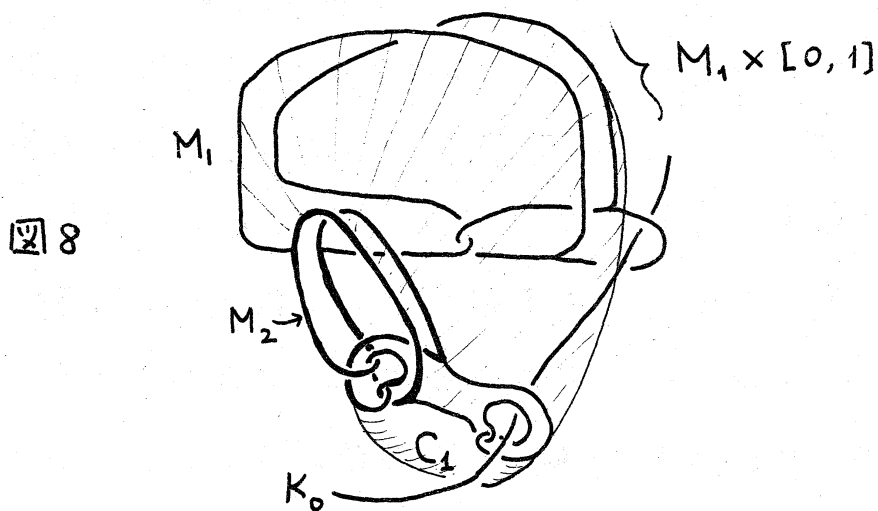
これが図2
の V_1 の中に
埋め込まれ
る。

図6で太く描いた線が K_0 以外の境界線である。これを仮に M_1 と名付ける。 V_2 の構成は, V_1 に round handle をつけるのだが, round handle をそれに沿ってつける2つの円周 x_1, y_1 は次の図7のような位置にあると考えられる。そして, x_1 の ∂V_1 における管状近傍は, M_1 をあっかり含むとし

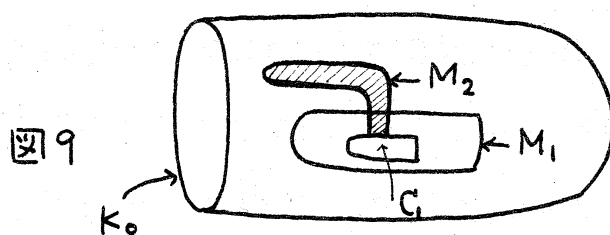
図7



てより、 V_1 の中に(図6の要領で)アニュラスを埋め込んだのと同様に、 V_2 の中にアニュラスを埋め込む。その1部の様子を描くと図8のようになる。つまり、図5のアニュラ

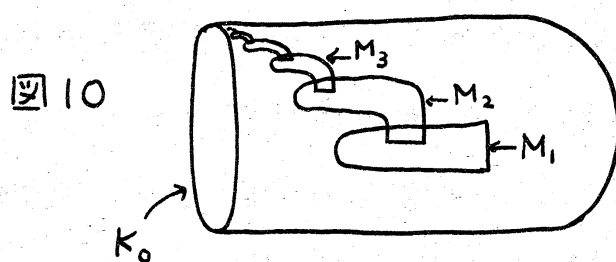


スの K_0 以外の境界線 (M_1 に他ならない)に $M_1 \times [0, 1]$ をはりつけ、それに $\text{Cap } C_1$ をかぶせたものから図9の斜線で示したような穴をあけたもの(それは再びアニュラス)を V_2 に埋め込むのである。そのアニュラスの、 K_0 以外の境界線は M_2 になる。図8では、 M_2 は少し太い線で描かれている。



次の段階では、図7の(ii)の α_2, γ_2 に沿って V_2 に round handle をつけ V_3 を構成し、その中にアニュラスをうめこむ。そのアニュラスは、図9の M_2 に $M_2 \times [0, 1]$ をはりつけ、それに Cap C_2 をかぶせたものから、しかるべく穴をあけたものである。 C_0, C_1 がそれぞれ円周 γ_0, γ_1 に沿って K_0 に絡まったように、Cap C_2 は γ_2 に沿って K_0 に絡みつく。

そこで、もし、 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ という円周の系列が、 K_0 の1点に収束するように、しだいに小さくなって行く系列なら、円板上の $M_1, M_2, \dots$ の系列を K_0 の1点に収束するようにうまく（例えば図10）のようにとれば、その極限として円板の位相的な（ W_0 への）埋め込みが存在することになる。しかし実際には、§2の構成で述べたように、 K_0 のあらかじめ指

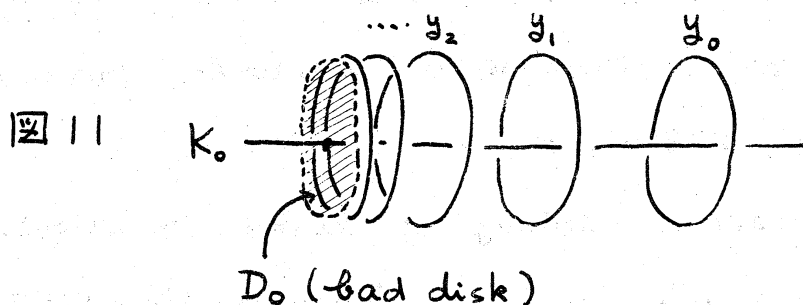


定しておいた用管状近傍 N に触れないように round handle のとりつけを行なわねばならない。つまり、円周 γ_i の直径は、ある定数より小さくなれない。これが、 W_0 に円板が埋

め込めないことの幾何学事情である。

いま、円周の系列 $\{y_i\}$ が、 K_0 の開管状近傍 N のひとつのファイバーの境界に収束している場合を考えよう。(図 11)

この開管状近傍のファイバー D_0 が 'bad disk' と呼びたいものである。すでに見たように、もし 'bad disk' の大きさが無かりせば、 W_0 に円板が位相的に埋め込める。また、 K_0



を境界とするアニュラスの系列を構成したが、それ等は、 D_0 の周辺部に近づくに従って激しく振動して行く。 D_0 は、 W_0 に開いた 2 ハンドルをはりつけた U^4 の中にも、局所平坦に埋め込まれているが、 D_0 は U^4 に S^2 が埋め込めない幾何学的障害と考えられよう。

注意 1. 無限チェインのホモロジー群 $\check{H}_2(U^4; \mathbb{Z})$ と $H_2(U^4; \mathbb{Z})$ とは双対的であるが、開円板 D_0 は $H_2(U^4; \mathbb{Z})$ の生成元の双対になっている。

注意 2. 上では、円周の系列 $\{y_i\}$ が一定の円周に収束す

る場合に 'bad disk' D_0 の存在を見たが, $\{y_i\}$ をどのようにとろうと, 得られる U^4 は PL 同形であることが示せるので, $\{y_i\}$ を 'うまく' とらなくとも, bad disk は存在する.

文 献

- [1] Y. Matsumoto - G.A. Venema ; Failure of the Dehn Lemma on Contractible 4-Manifolds, *Inventiones math.* 51, 1979, 205-218
- [2] J. Milnor ; Isotopy of links, in *Algebraic Geometry and Topology*, Princeton UP, 1957
- [3] A. Kawauchi ; On quadratic forms of 3-manifolds, *Inventiones math.* 43, 1977, 177-198
- [4] T. Ohkawa ; Homological separating, topological embeddings, and the Milnor $\bar{\mu}$ -invariant of links, (to appear)