

非線型 Boltzmann 方程式の線型化

東大・理 小 貫 明

流体での保存量に対する flux の相関関数は $t^{-\frac{d}{2}}$ のようにふるまう。 $(t \gg t_{m.f.})$ 。これは流体力学方程式が慣性項のため非線型になっていることから生ずる。さて、希薄気体は Boltzmann の方程式でよく記述される。Chappman, Cowling は上の量の時間発展は線型化した Boltzmann 方程式に従うとして輸送係数を求めている。これでは考える相関関数はすみやかに減衰する。Boltzmann 方程式の非線型項を単に捨てるのではなく、記憶をもつ項として線型項にくりこむと上記の Long tail が生ずる。このことは Hauge が初めて気づいた。また Mori, Fujisaka は非線型 Langevin 方程式を線型化する際、非線型項から生ずる記憶項について詳論した。

Boltzmann 方程式をかく。 $f = (1 + \psi) n \phi_0(p)$ とおいて、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + nI \right) \psi(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}_1; t) = n \int d\mathbf{p}_2 d\mathbf{r}_2 \phi_0 T_{12} \psi(1) \psi(2), \quad (1)$$

簡単のため $1 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$, $2 = (\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$ とかいた。さらに

$$\psi_q(z) = \int_0^\infty dt \int d\mathbf{r} e^{-zt - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \psi(1, t), \quad (2)$$

として (1) の右辺を摂動として iterative にとくと、

$$\begin{aligned} \psi_q(z) = & \frac{1}{z + A_q(1)} \psi_q(t=0) + \frac{n}{z + A_q(1)} \sum_{q_1} \int d\mathbf{p}_2 \phi_0(2) T_{q, q_1}(1, 2) \\ & \times \frac{1}{z + A_{q-q_1}(1) + A_{q_1}(2)} \times \psi_{q-q_1}(1, t=0) \psi_{q_1}(2, t=0), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{ここで } A_q(1) = i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_1 + n I_q(1), \quad (4)$$

$$T_{q, q_1}(1, 2) = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} T_{12} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{r}_1 + i\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_2} \quad (5)$$

ここに $q \ll \ell_{m.f.}^{-1}$ で A_q は5つの小さな固有値をもつ。

$$A_q = \begin{cases} \omega_q^{(i)} & (i = 1, 2, \dots, 5) \\ \sim t_{m.f.}^{-1} & (i > 5) \end{cases}$$

(3) 式の第二項は, $q, q_1 \ll \ell_{m.f.}^{-1}$ で, この hydro mode だけひろうと,

$$\begin{aligned} \text{第二項} &\simeq \sum_{1 \leq i, j \leq 5} (1 - \mathcal{P}_h) |\alpha_i(p_1) \alpha_j(p_1)\rangle \\ &\int \frac{dq_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{z + \omega_{q-q_1}^{(i)} + \omega_{q_1}^{(j)}} \overline{\alpha_i}(q-q_1) \overline{\alpha_j}(q_1), \end{aligned} \quad (6)$$

ここに

$$\alpha_i(p) = 1, p, \frac{p^2}{2m}, \quad (7)$$

$$\overline{\alpha_i}(q) = \int \alpha_i \psi_q(t=0) \varphi_0 d\mathbf{p}, \quad (8)$$

そして $\mathcal{P}_h$ は linear mode A の Projection operator である。(6)式はいわゆる mode-mode coupling を表わしている。この項から long tail はでてくる。

参 考 文 献

- 1) E.H.Hauge, Phys. Rev. Letters 28 (1972) 1501.
- 2) H.Mori and H.Fujisaka 49 (1973) 764.