

Supersymmetry と index理論

東大・理 江 口 徹

§ 1. Supersymmetric な量子力学

相対論的場の理論においてさまざまな形の index理論が現われるが、中でも最も自然で美しいものは超対称 (supersymmetry) に関連したもののように思われる。ここでは最も簡単な場合, supersymmetric な量子力学を例にとって議論してみよう。

次の様な力学系を考える; まず supercharge と称する量 Q_1, Q_2 を

$$Q_1 = \frac{1}{2} (\sigma_1 p + \sigma_2 W(x)), \quad Q_2 = \frac{1}{2} (\sigma_2 p - \sigma_1 W(x)) \quad (1)$$

で定義する。 p は運動量 $-i\hbar \frac{d}{dx}$, σ_1, σ_2 は Pauli 行列, $W(x)$ は x の任意の関数としておく。 Q_1, Q_2 は 2 成分波動関数

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

に働く。次に supercharge の反交換子をとってハミルトニアンを定める

$$\delta_{ij} H = \{Q_i, Q_j\} \quad (3)$$

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + W(x)^2) + \frac{1}{2} \hbar \sigma_3 \frac{dW}{dx} \quad (4)$$

(3) より $\frac{1}{2} H = Q_1^2 = Q_2^2$ の形をしているのでそのスペクトル E は零ないし正の値をとる, $E \geq 0$ 。

超対称性をもつ系ではこのようにエネルギー固有値がいつも半正定値であるが、特にその基底状態, $E = 0$ の states に面白い現象がひそんでいる。

$E = 0$ の状態を探すため、まず (4) の第 2 項を無視すると $E = 0$ の波動関数は $W(x)$ の零点のまわりに集中する事がわかる。そこで $W(x)$ をその零点 x_0 のまわりで展開して

$$W(x) = \lambda(x - x_0) + \dots \quad (5)$$

とする。(5) の高次の項を無視して (4) に代入すると

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \lambda^2 (x - x_0)^2) + \frac{1}{2} \hbar \lambda \sigma_3. \quad (6)$$

第 1 項は調和振動子、第 2 項は固有値 $\pm \frac{1}{2} \hbar \lambda$ をとる。したがってスペクトルは

$$E_n = \hbar |\lambda| \left(\frac{1}{2} + n \right) \pm \frac{1}{2} \hbar \lambda. \quad (7)$$

そこで零エネルギーの波動関数は

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda > 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ f(x-x_0) \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda < 0 & \begin{pmatrix} f(x-x_0) \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (9)$$

$f(x)$ は調和振動子の基底状態の波動関数。今、 σ_3 をフェルミオン数を数えるオペレーターとみなし、 $\sigma_3 = +1$ の状態はフェルミオン数 1、 $\sigma_3 = -1$ の状態はフェルミオン数が零 (即ちボソニック) と思うと $\lambda > 0$ の零エネルギー状態 (8) は boson $\lambda < 0$ の零エネルギー状態 (9) は fermion とみなせる。1 図参照。

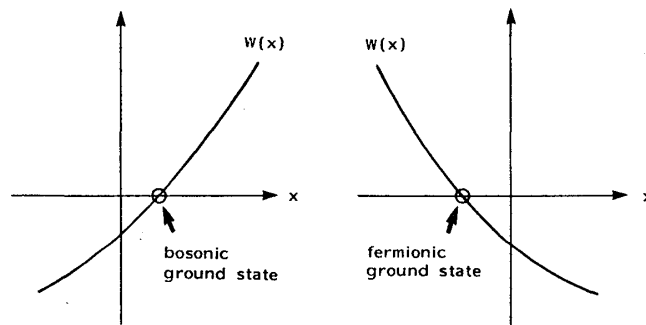


図 1 (a)

図 1 (b)

今までの議論は近似計算だったが、零エネルギー状態の存在に関しては厳密な結果を導く事ができる。
このためには波動方程式

$$Q_1 \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

をとりて

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \varphi(x) \end{pmatrix} = \exp\left(\int_0^x dx' \frac{1}{\hbar} W(x') \sigma_3\right) \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \varphi(0) \end{pmatrix} \quad (11)$$

$\frac{1}{2} H = Q_1^2$ なのでこの解は当然 $E = 0$ を与える。 $W(x)$ がどのような条件をみたす時 (11) が normalizable な波動関数になるかを見てみる。 $W(x)$ が

1. $|x|\hbar$ で x^{2n} のようにふるまう場合 $W(x)$ は偶数個の零点をもつが $\int^x W(x') dx' \approx x^{2n+1}$ となり σ_3 の固有値 ± 1 いずれをとっても (11) は規格化できず、acceptable な波動関数とはならない。従ってこの場合零エネルギー状態は存在しない。
2. $|x|\hbar$ で $W(x)$ が λx^{2n-1} のようにふるまう場合 $W(x)$ は奇数個の零点をもつ。 $\int^x W(x') dx' \approx \lambda x^{2n}$ 。したがって $\lambda > 0$ なら $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$ の形の bosonic な波動関数、 $\lambda < 0$ なら $\begin{pmatrix} \psi(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ の形の fermionic な波動関数で規格化可能なものが存在する。

このように零エネルギー状態の存在, 非存在は $W(x)$ の detailによらずその漸近形にしかよらない。今, supersymmetry index, 通称 Witten index を

$$\text{tr}(-1)^F \quad (12)$$

で定義する。ここで F は状態に含まれるフェルミオン数 (4) のモデルでは σ_3 , tr はハミルトニアン H の全固有状態についての和である。(12) は実は

$$\text{tr}(-1)^F = n_B(E=0) - n_F(E=0) \quad (13)$$

となる。ここで $n_B, n_F(E=0)$ は bosonic な零エネルギー状態の数と fermionic な零エネルギー状態の数を表わす。(13) を出すには次のように考える。今ハミルトニアン H の零でない固有値 $E \neq 0$ の固有状態 $|b\rangle$ があったとする。これに supercharge Q (Q_1, Q_2 どちらでもよい。めんどうなので1種類しかなかったとする) をほどこすと新しい状態 $|f\rangle$ が作られる

$$|f\rangle = Q|b\rangle \quad (14)$$

($|f\rangle = 0$ とはなれない。なぜなら $\langle f|f\rangle = \langle b|H|b\rangle = E \neq 0$)

ところで

$$\{Q_i, \sigma_3\} = 0 \quad (15)$$

なので supercharge はフェルミオンをボソンへボソンをフェルミオンへと交換する。 $|b\rangle$ がボソンなら $|f\rangle$ はフェルミオン。したがって零でないエネルギー準位はボソンとフェルミオンとが必ず対になって現われ $\text{tr}(-1)^F$ から脱落する。この結果零エネルギー準位のみが寄与するため (13) が得られる。supersymmetric 量子力学では Witten index が potential の漸近形にしかよらぬ一種の断熱不変量である事がわかったが, 座標 x が実軸上に値をとる通常の場合を拡張して多様体 M の上に値をとる場合, non-linear σ -モデルを考えると Witten index は M の topological な不変量に直接関係する。

§ 2. Supersymmetric 非線型 σ -モデル

Riemann 多様体 M を考えてその座標を φ_i ($i = 1 \sim n$), 計量を g_{ij} , 曲率テンソルを R_{ijkl} とする。次のようなラグランジアンを考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j} g_{ij}(\varphi(t)) \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} + \bar{\psi}^i \frac{D}{Dt} \psi^j + \frac{1}{4} R_{ijkl} \bar{\psi}^i \psi^k \bar{\psi}^j \psi^l \right\} \\ & - g_{ij} \frac{\partial h(\varphi)}{\partial \varphi^i} \frac{\partial h(\varphi)}{\partial \varphi^j} - \frac{D^2 h}{D\varphi^i D\varphi^j} \bar{\psi}^i \psi^j \end{aligned} \quad (16)$$

ψ^i はスピノル場 D/Dt 等は共変微分をあらわす。これは supersymmetric 非線型 σ -モデルの標準的なラグランジアンで, 大ざっぱに言って (16) の第1項 ($\{ \}$ にかこまれた項) が supersymmetric 量子力学

(4) の運動量項 p^2 , あとの 2 項が $W(x)^2$ と $\frac{dW}{dx}$ の項に対応する。 h は ϕ の関数で super-potential と呼ばれるものであるが W の時の零点は h では極値に対応する。 $\frac{dW}{dx}$ の項にかかる σ_3 を以前はフェルミオン数と解釈したが (16) では実際 $\bar{\psi}\psi$ が現われている。

さて系 (16) の零エネルギー状態をさがしてみよう。以前と同じように零エネルギー状態の波動関数は h の極値に集中する。今, $h = ch_0$ (c は constant) とし c を除々に大きくしてゆくように考えると波動関数は c 大で極値の極く近くにしか値をもたなくなるのでそれぞれの極値のまわりで別々に system を考察できる。 h としては通例 height function と呼ばれるものを考える。これは多様体 M をある平面の上においた時そこから計った高さで定義される。第 2 図では 8 つの極値が存在する。

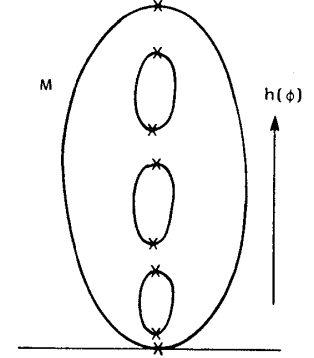


図 2

supersymmetric 量子力学では W の零点での W のこの配の符号が問題になった。ここでは h の極値における 2 次微係数の符号が問題になる。行

列 $D^2h/D\phi_i D\phi_j$ の i 番目の極値における負の固有値の数を m_i としよう。 supersymmetric 量子力学では $\frac{dW}{dx}$ の符号が負だとフェルミオン数が 1 の状態ができた。これと同様にして h の 2 階微分の負の固有値の数が m の極値ではフェルミオン数が m の状態ができる (今は $n = \dim M$ 種類のフェルミオンがある。 1 種類のフェルミオンはもちろん 1 個以上つめない)。すると Witten index は, 全ての極値の寄与をあわせて

$$\text{tr}(-1)^F = \sum_i (-1)^{m_i} \quad (17)$$

ところでこれは Morse 理論の基本定理から

$$\sum_i (-1)^{m_i} = \chi(M) \quad (18)$$

$\chi(M)$ は M の Euler 数となる。したがって Witten index はこの場合多様体 M の Euler 数と一致する。

(上の議論では, 負の固有値の数が m 個の極値に m 個のフェルミオンがつまるので, 極値の付近に support をもつ m 次の調和微分形式があるように見える。負の固有値の数が m の極値の数を M_m とするとこれは m 次の Morse index と呼ばれるものであるが, M_m は正確には m 次の Betti 数 B_m (m 次の調和微分形式の数) とは異なりこれよりは常に大きい $M_m \gg B_m$ (Morse の不等式)。より正確には z を不定元として

$$\sum_{m=0}^n M_m z^m - \sum_{m=0}^n B_m z^m = (1+z) \sum_{m=0}^n Q_m z^m \quad (19)$$

が成り立つ。 Q_m は非負整数。(19) で $z = -1$ とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n (-1)^m B_m &= \sum_{m=0}^n (-1)^m M_m = (m = \text{even の極値の数}) - (m = \text{odd の極値の数}) \\ &= \sum_i (-1)^{m_i} \end{aligned} \quad (20)$$

一方 $\sum_{m=0} (-1)^m B_m = \chi$ はよく知られている。なぜ $M_m \gg B_m$ となるかという、極値と極値を結ぶトンネル振巾が一般に存在するため（インスタントン効果） $E=0$ 状態のエネルギーが変化（増大）して正確な零エネルギー状態の数は常に減少するためである。Witten によるとトンネル効果は常に m を一つだけ変化させインスタントンの配位はこうした二つの極値を結ぶ steepest descent の trajectory に相当する。負の固有値を m 個もつ極値での接平面（ M_m 個ある）を合わせてベクトル空間 X_m をつくとインスタントン効果は X_m と $X_{m\pm 1}$ の間の写像を生成し、これより M の homology が再構成される。）

このように supersymmetric な系の低エネルギースペクトルは豊富な幾何学的情報を含んでいる。この関係を用いて supersymmetry を幾何学の問題に応用する事が考えられる。現在進行中の問題は、Virasoro 代数を super 化した super Virasoro 代数の表現論を用いて複素多様体論（K3 曲面や Calabi-Yau の多様体と呼ばれる種類の manifold で、1st Chern class $c_1 = 0$ という条件で特徴づけられるタイプのもの）の分析が進行中である（筆者もこうした研究をしている）。

以上、index 理論の introductory な議論を試みたがこうした方面を勉強しようと思われる方はぜひ有名な論文、

E. Witten, "Supersymmetry and Morse Theory", J. Diff. geom. 17, 611 (1982).

を参照される事をおすすめする。

場の量子論と index 定理

富山大・理 平 山 実

index 定理が場の量子論に於いてどのように応用されているかを概観する。量子化されたディラック場 $\psi(x, t)$ が外場と相互作用しているとする。 $\psi(x, t)$ は外場を含むディラック・ハミルトニアン $i\mathcal{D}$ の固有値問題

$$i\mathcal{D}\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x) \quad (1)$$

の解から

$$\psi(x, t) = \sum_{\lambda \geq 0} b_\lambda e^{-i\lambda t} \psi_\lambda(x) + \sum_{\lambda < 0} d_\lambda^\dagger e^{-i\lambda t} \psi_\lambda(x) \quad (2)$$

のように構成される。 b_λ や $d_\lambda^\dagger$ は適当な反交換関係を満たす演算子である。又、場の量子論的な真空を定義するに際しては有効作用

$$\Gamma = - \log \det i\mathcal{D} \quad (3)$$

が用いられる。 $\det i\mathcal{D}$ は(1)で許されるすべての λ の無限積である。(2)や(3)に見られるように、量子化さ