

広田氏の Bilinear Equations について II

京大 数理研 佐藤 幹夫

琉球大 理 佐藤 泰子

ここでは, Korteweg-de Vries 方程式と KdV 方程式, 変形 KdV 方程式と MKdV 方程式, Sawada-Kotera KdV 方程式と SK 方程式, Kadomtsev - Petviashvili (又は, 2次元 KdV) 方程式と KP 方程式, 変形 KP 方程式と MKP 方程式, Nonlinear Schrödinger 方程式と NLS 方程式と略称する。

[1] 分割数

(1) $p(n) \stackrel{\text{def}}{=} n$ を自然数の和に分ける分け方の数,

(2) $p_{\text{odd}}^{\text{even}}(n) \stackrel{\text{def}}{=} n$ を $\begin{matrix} \text{偶数} \\ \text{奇数} \end{matrix}$ の和に分ける分け方の数,

(3) $q(n) \stackrel{\text{def}}{=} n$ を相異なる自然数の和に分ける分け方の数,

(4) $q_{\text{odd}}^{\text{even}}(n) \stackrel{\text{def}}{=} n$ を相異なる $\begin{matrix} \text{偶数} \\ \text{奇数} \end{matrix}$ の和に分ける分け方の数

とおく。これらの母関数は次で与えられる。

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \\ + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + \cdots,$$

$$(6) \sum_{n=0}^{\infty} p^{\text{even}}(n) x^n = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots} = 1 + x^2 + 2x^4 + 3x^6 + 5x^8 + \\ + 7x^{10} + 11x^{12} + 15x^{14} + 22x^{16} + 30x^{18} + 42x^{20} + 56x^{22} + 77x^{24} + 101x^{26} + \cdots,$$

$$(7) \sum_{n=0}^{\infty} p^{\text{odd}}(n) x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots} = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 +$$

$$+ 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + 12x^{11} + 15x^{12} + 18x^{13} + 22x^{14} + 27x^{15} + \cdots,$$

$$(8) \sum_{n=0}^{\infty} q(n) x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots,$$

$$(9) \sum_{n=0}^{\infty} q^{\text{even}}(n) x^n = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots = 1 + x^2 + x^4 + 2x^6 + 2x^8 + \\ + 3x^{10} + 4x^{12} + 5x^{14} + 6x^{16} + 8x^{18} + 10x^{20} + 12x^{22} + 15x^{24} + 18x^{26} + 22x^{28} + \cdots,$$

$$(10) \sum_{n=0}^{\infty} q^{\text{odd}}(n) x^n = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots = 1 + x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \\ + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + 3x^{12} + 3x^{13} + 3x^{14} + 4x^{15} + 5x^{16} + 5x^{17} + 5x^{18} + 6x^{19} + \cdots.$$

このとき,

$$(11) \begin{cases} p^{\text{even}}(n) = \begin{cases} p(\frac{n}{2}) & (n: \text{even}) \\ 0 & (n: \text{odd}) \end{cases}, & q^{\text{even}}(n) = \begin{cases} q(\frac{n}{2}) & (n: \text{even}) \\ 0 & (n: \text{odd}) \end{cases}, \\ p^{\text{odd}}(n) = q(n) \end{cases}$$

の関係がある。又、これらの量の漸近的評価は、 $C \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2}}$

とするとき,

$$(12) \begin{cases} \log p(n) \sim C\sqrt{n}, & \log q(n) \sim \log p^{\text{even}}(n) \sim C\sqrt{\frac{n}{2}}, \\ \log q^{\text{even}}(n) \sim C\sqrt{\frac{n}{4}} & (n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

で与えられる。

[2] KP 方程式の Lax 表示

1 階線型擬微分作用素:

$$(13) \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \partial + u_2 \partial^2 + u_3 \partial^3 + \dots, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

を考へる。擬微分作用素 L^n の integral part で定義される微分作用

素を B_n とする: $(u' = \frac{\partial}{\partial x_1} u)$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} B_n &\stackrel{\text{def}}{=} [L^n]_+ \quad \text{e.g.} \quad B_0 = 1, B_1 = \partial, B_2 = \partial^2 + 2u_2, B_3 = \partial^3 + 3u_2\partial + \\ &+ (3u_3 + 3u_2'), B_4 = \partial^4 + 4u_2\partial^2 + (4u_3 + 6u_2')\partial + (4u_4 + 6u_3' + 6u_2^2 + 4u_2''), B_5 = \partial^5 \\ &+ 5u_2\partial^3 + (5u_3 + 10u_2')\partial^2 + (5u_4 + 10u_3' + 10u_2^2 + 10u_2'')\partial + (5u_5 + 10u_4' + 20u_2u_3 + 20u_2u_2' + 10u_3'' + 5u_2'''), \\ B_6 &= \partial^6 + 6u_2\partial^4 + (6u_3 + 15u_2')\partial^3 + (6u_4 + 15u_3' + 15u_2^2 + 20u_2'')\partial^2 + (6u_5 + 15u_4' + 30u_2u_3 \\ &+ 45u_2u_2' + 20u_3'' + 15u_2''')\partial + (6u_6 + 15u_5' + 30u_2u_4 + 75u_2u_3' + 35u_2u_2'' + 15u_3'' + 20u_4'' \\ &+ 25u_2^2 + 20u_2^3 + 15u_3''' + 6u_2''''), \dots \end{aligned} \right.$$

無限個の時間変数 $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ を導入し、各 x_j の重みを j と

定める。このとき、次の無限連立線型方程式系:

$$(15) \quad L\psi = k\psi, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \psi = B_j \psi \quad (j=1, 2, 3, \dots)$$

の積分可能条件:

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} L = [B_j, L] \quad (\stackrel{\text{def}}{=} B_j L - L B_j) \quad (j=1, 2, 3, \dots)$$

は、 L の係数 u_2 に対する高階 KP 方程式系に他ならない。(15)

に於いて、 L の代りに微分作用素 $L^2 = \partial^2 + u$ の固有値問題を考

えると、これが本来の KdV 方程式に対する Lax 表示である。

同様に、 L の代りに、微分作用素 $L^3 = \partial^3 + u\partial + v$ 及び

$L^3 = \partial^3 + u\partial$ を取れば、その可積分条件 (16) として、高階

Boussinesq 方程式系 及び 高階 Sawada-Kotera 方程式系が得ら

れることが知られている。

[3] KP 方程式の N ソリトン解と双線型 KP 方程式

L の係数は $u_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log \tau$, $u_3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \right) \log \tau$, $\dots$

(15) の解は $\psi(x; k) = \frac{\tau_{[k]}(x)}{\tau(x)}$ と表わされる。ここに,

$$(17) \quad \tau(x) = 1 + \sum_i^N a_i e^{\xi_i} + \sum_{i < j}^{(2)} c_{ij} a_i a_j e^{\xi_i + \xi_j} + \dots + c_{1 \dots N} a_1 \dots a_N e^{\xi_1 + \dots + \xi_N}$$

は KP 方程式の N ソリトン解であり,

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{[k]}(x) &= e^{kx_1 + k^2 x_2 + \dots} \left(1 + \sum_i a_i(k) e^{\xi_i} + \sum_{i < j} c_{ij} a_i(k) a_j(k) e^{\xi_i + \xi_j} + \dots \right. \\ &\quad \left. + c_{1 \dots N} a_1(k) \dots a_N(k) e^{\xi_1 + \dots + \xi_N} \right) \\ &= \tau\left(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, x_3 - \frac{1}{3k^3}, \dots\right) e^{kx_1 + k^2 x_2 + \dots} \\ (19) \quad \left\{ \begin{aligned} a_i &\in \mathbb{C}, \quad a_i(k) \stackrel{\text{def}}{=} a_i \frac{k_i - k}{q_i - k}, \quad c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(p_i - p_j)(q_i - q_j)}{(p_i - q_j)(q_i - p_j)}, \quad c_{1 \dots r} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i < j}^{(2)} c_{ij}, \\ \xi(x; p, q) &\stackrel{\text{def}}{=} (p - q)x_1 + (p^2 - q^2)x_2 + (p^3 - q^3)x_3 + \dots, \\ \xi_i &\stackrel{\text{def}}{=} \xi(x; p_i, q_i), \quad \eta_i \stackrel{\text{def}}{=} \xi(t; p_i, q_i) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

である。このとき,

$$(20) \quad \tau(x+t)\tau(x-t) = \sum_{r=0}^N \frac{G_r(t; p, q, \dots, p, q_r)}{\prod_{i < j} (p_i - q_j)(q_i - p_j)} a_1 \dots a_r e^{\xi_1 + \dots + \xi_r},$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} G_r(t; p, q, \dots, p, q_r) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, r\}} \left(\Delta(p_1, \dots, p_r) \Delta(q_1, \dots, q_r) e^{\eta_1 + \dots + \eta_r} \right)^{\sigma(I)}, \\ G_0(t) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 \end{aligned} \right.$$

となる。 $\{p_i, q_i\}$ に注目しているときは $G_1(p, q)$ のように t を略して書くこともある。

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(p_1, \dots, p_r) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i < j}^{(2)} (p_i - p_j), \quad (\cdot)^{\sigma(I)} \text{ は } i \in I \text{ に対して } p_i \\ &\text{と } q_i \text{ の入れかえを意味する。} \end{aligned} \right.$$

広田微分の意味[1]で, x_j による微分を D_j と記し, D_j の重みも j と定める. $\tau(x+t)\tau(x-t) = e^{tD_x} \tau \cdot \tau = \sum_{k_1, k_2, \dots} \frac{t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots}{k_1! k_2! \dots} D_1^{k_1} D_2^{k_2} \dots \tau \cdot \tau$ である.

$P(D_x) = P(D_1, D_2, \dots)$ が, $D_1, D_2, \dots$ の重み n の斉重多項式するとき bilinear KP 方程式: $P(D_x) \tau \cdot \tau = 0$ が成り立つための必要十分条件は, $N=0, 1, 2, \dots$ に対して, $P(\partial_t) g_N(t; p_1, q_1, \dots, p_N, q_N) \big|_{t \rightarrow 0} = 0$ が成り立つことである.

又, 次の成り立つ.

任意の N ソリトン解 $\tau(x)$ に対して, 双線型方程式 $P(D) \tau \cdot \tau = 0$ が成り立てば, 一般解 $\tau(x)$ に対しても, 同じ方程式が成り立つ.

同様に,

$$(23) \quad \tau_{[k]}(x+t) \tau(x-t) = e^{kx_1 + k^2 x_2 + \dots} e^{kx_1 + k^2 x_2 + \dots} \sum_{r=0}^N \frac{G_r^*(t; k; p_1, q_1, \dots, p_r, q_r)}{\prod_{i < j} (k_i - q_j)(q_i - p_j)} \frac{a_1}{q_1 - k} \dots \frac{a_r}{q_r - k} e^{\xi_1 + \dots + \xi_r},$$

$$(24) \quad \begin{cases} G_r^*(t; k; p_1, q_1, \dots, p_r, q_r) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I \subset \{1, 2, \dots, r\}} \left(\Delta(p_1, \dots, p_r) \Delta(q_1, \dots, q_r) (p_1 - k) \dots (p_r - k) e^{\xi_1 + \dots + \xi_r \sigma(I)} \right), \\ G_0^*(t; k) \stackrel{\text{def}}{=} 1 \end{cases}$$

である.

$$(25) \quad G_{N+1}^*(t; 0; p_1, q_1, \dots, p_N, q_N, k, 0) = k p_1 \dots p_N q_1 \dots q_N e^{kx_1 + k^2 x_2 + \dots} G_N^*(t; k; p_1, q_1, \dots, p_N, q_N)$$

だから,

$Q(D)$ を $D_1, D_2, \dots$ の重み n の斉重多項式とすると, bilinear MKP 方程式: $Q(D) \tau_{[k]} \cdot \tau = 0$ が成り立つための必要十分条件は, $N=$

$0, 1, 2, \dots$ に対して, $Q(\partial_t) \bar{q}_{M+1}^*(t; 0; p_1, q_1, \dots, p_N, q_N, k, 0) |_{t \rightarrow 0} = 0$ が成り立つことである。更に, k を含む作用素 $Q(D; k)$ に対して, 2組の bilinear equations $Q(D; k) \tau_{[k]} \cdot \tau = 0$ と $Q(D; k) \tau_{[0]} \cdot \tau = 0$ とは同値である。

ここで, KP 方程式とその他の方程式との関係について注意する:

1. (KP 方程式と KdV 方程式) 今, $q_j \mapsto -p_j$ とすれば,

$$(19) \text{ から } c_{ij} \mapsto \frac{(p_i - p_j)^2}{(p_i + p_j)^2}, \quad \xi_j \mapsto p_j \cdot 2x_1 + p_j^3 \cdot 2x_3 + p_j^5 \cdot 2x_5 + \dots$$

となり, このときの $\tau(x)$ は, KdV 方程式の N ソリトン解になっている。従って, bilinear KP 方程式で, $D_{2j} \mapsto 0$ ($j=1, 2, 3, \dots$) としたものは, bilinear KdV 方程式に他ならない。但し, [2] と少し記号が違っているので, [2] の方程式は, $x_j \mapsto 2x_{2j+1}$, $D_j \mapsto \frac{1}{2} D_{2j+1}$ と読み変える。例えば, $KP \text{ eq: } (2D_1 D_2^2 D_3^2 + 2D_1^2 D_3^2 + 3D_1^2 D_2 D_4 + 3D_4^2 + 4D_3 D_5 - 2D_2 D_6 - 12D_1 D_7) \tau \cdot \tau = 0$ に於いて, $D_2 = D_4 = D_6 = 0$ とすれば, $KdV \text{ eq: } (D_1^2 D_3^2 + 2D_3 D_5 - 6D_1 D_7) \tau \cdot \tau = 0$ を得る。これは [2] の $KdV \text{ eq: } (2D_0^2 D_1^2 + D_1 D_2 - 3D_0 D_3) \tau \cdot \tau = 0$ を上のように読み変えたものに他ならない。

2. (KP 方程式と MKP 方程式) 変換:

$$(26) \quad P(D; k) = Q(D+k, D_2+k^2, \dots) e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{k} D_1 + \frac{1}{2k^2} D_2 + \frac{1}{3k^3} D_3 + \dots)}$$

は, bilinear MKP 方程式: $Q(D) \tau_{[k]} \cdot \tau = 0$ を bilinear KP 方程式:

$P(D;k) \tau \cdot \tau = 0$ に与す。例えば、最も簡単な $Q(D) = D_1^2 - D_2$ に対して、
 $P(D;k) = 2D_1 \cdot k - D_2 - \frac{1}{4} D_1^3 \cdot \frac{1}{k} + \left\{ \frac{1}{12} (D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3) - \frac{1}{8} D_1^2 D_2 \right\} \cdot \frac{1}{k^2}$
 $+ \left\{ \frac{1}{12} (D_1^3 D_2 + 2D_2 D_3 - 3D_1 D_4) - \frac{1}{64} (D_1^5 + 4D_1 D_2^2) \right\} \cdot \frac{1}{k^3} + \left\{ \frac{1}{480} (D_1^6 + 15D_1^2 D_2^2 + 20D_1^3 D_3 + \right.$
 $\left. + 60D_2 D_4 - 96D_1 D_5) - \frac{1}{128} (3D_1^4 D_2 + 4D_2^3) \right\} \cdot \frac{1}{k^4} + \dots$ であり、1個の
 MKP 方程式から、無限個の KP 方程式が得られる。

3. (KP 方程式と NLS 方程式) KP 方程式のソリトン解

$\tau(x)$ が $P(D) \tau \cdot \tau = 0$ を満たせば、NLS 方程式のソリトン解 $\tau(x)$ も $P(D) \tau \cdot \tau = 0$ を満たす。

[4] 双線型 KP 方程式の個数

(27) $\dim \{ P(D) \mid P(D) \text{ は } D_1, D_2, \dots \text{ の重み } n \text{ の斉重多項式} \} = p(n) \sim e^{C\sqrt{n}}$
 $(n \rightarrow \infty)$ である。又、

(28) $G_1(p, q) - 2$ は $\Delta(p, q)^2$ で割り切れる、

(29) $\left\{ \begin{array}{l} G_2(p, q, k, l) - (\Delta(p, k) \Delta(q, l) + \Delta(p, l) \Delta(q, k)) (G_1(p, q) + G_1(k, l) - 2) \\ + \Delta(p, q) \Delta(k, l) (G_1(p, k) - G_1(p, l) - G_1(q, k) + G_1(q, l)) \end{array} \right.$ は
 $\Delta(p, q, k, l) \Delta(p, q) \Delta(k, l)$ で割り切れる。

(30) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(予想)} \quad G_N(p, q_1, \dots, q_N, q_N) - \{G_{N-1}, \dots, G_1, G_0\} \text{ の適当な一次結合} \\ \text{は} \quad \Delta(p, q_1, \dots, q_N) \prod_{j=1}^N \Delta(p, q_j) \end{array} \right.$ で割り切れる。

この予想を認めれば、

(31) $\left\{ \begin{array}{l} \dim \{ P(D) \tau \cdot \tau \mid P(D) \text{ は } D_1, D_2, \dots \text{ の重み } n \text{ の斉重多項式} \} \\ = p(n) - p(n-1) \sim \frac{C}{2\sqrt{n}} p(n) \end{array} \right.$ $(n \rightarrow \infty)$

がわかる。故に、 $\# \text{方程式} = p(n-1) \sim e^{C\sqrt{n-1}} \quad (n \rightarrow \infty)$ である。

特に, $P(D)$ が奇数次の作用素のとき, $P(D)\tau \cdot \tau = 0$ だから,
 以下には $\frac{P(D)\tau \cdot \tau}{\tau^2}$ ($P(D)$ は重み n の偶数次単項式) を
 1 組の basis $\{K_\nu^{(n)}\}$ の一次結合で表わした表と, 自明でない
 方程式を挙げよう(表 1, 2).

weight n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\dim \{P(D)\}$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101
$\dim \{P^+(D)\}$	1	0	1	1	3	3	6	7	12	14	22	27	40	
$\dim \{P(D)\tau \cdot \tau\}$	1	0	1	1	2	2	4	4	7	8	12	14	21	24
# Equations	0	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77
#Eqs(non-trivial)	0	0	0	0	1	1	2	3	5	6	10	13	19	

[5] 沢田-小寺 KdV 方程式

Sawada-Kotera KdV 方程式 $\star$ についても, 時間変数 $(x_1, x_5, x_7, x_{11}, x_{13}, x_{17}, x_{19}, \dots)$ を考えれば, 並行の議論ができる。この時間変数の取り方は Prof. Kuperschmidt の教示に負っている。

SK 方程式の N ソリトン解は (19) に於いて,

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} c_{ij} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{(k_i - p_j)^2 (k_i^2 - k_i p_j + p_j^2)}{(k_i + p_j)^2 (k_i^2 + k_i p_j + p_j^2)}, \\ \xi(x; p) \stackrel{\text{def.}}{=} p x_1 + p^5 x_5 + p^7 x_7 + p^{11} x_{11} + \dots, \\ \text{i.e. } \xi(p) + \xi(-p) = 0, \quad \xi(p) + \xi(\omega p) + \xi(\omega^2 p) = 0, \quad \omega \stackrel{\text{def.}}{=} e^{\frac{2\pi i}{3}}, \\ \xi_j \stackrel{\text{def.}}{=} \xi(x; p_j), \quad \eta_j \stackrel{\text{def.}}{=} \xi(t; p_j) \end{array} \right.$$

と取れば, (17)と同じ形に書ける。このとき,

$$(33) \quad T(x+t)T(x-t) = \sum_{r=0}^N \frac{G_r(t; p_1, \dots, p_r)}{\prod_{i < j} (p_i + p_j)^2 (p_i^2 + p_i p_j + p_j^2)} a_1 \dots a_r e^{\xi_1 + \dots + \xi_r}$$

$$(34) \quad \begin{cases} G_r(t; p_1, \dots, p_r) = \frac{1}{\omega_r} \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r = \pm 1} \frac{(2)}{\prod_{i < j} (\epsilon_i p_i - \epsilon_j p_j)^2 (p_i^2 - \epsilon_i \epsilon_j p_i p_j + p_j^2)} e^{\epsilon_1 \eta_1 + \dots + \epsilon_r \eta_r} \\ G_0(t) = 1 \end{cases}$$

である。

$$(35) \quad G_1(p_1) - 2 \quad \text{は } p_1^2 \quad \text{で割り切れる,}$$

$$(36) \quad \begin{cases} G_2(p_1, p_2) - 2(p_1^2 - p_2^2) \{ (p_1^2 + p_2^2) (G_1(p_1) - G_1(p_2)) - p_1^2 (\omega^2 G_1(\omega p_1) + \omega G_1(\omega^2 p_1)) \\ + p_2^2 (\omega^2 G_1(\omega p_2) + \omega G_1(\omega^2 p_2)) \} - 8(p_1^4 + p_1^2 p_2^2 + p_2^4) \quad \text{は} \\ p_1^2 p_2^2 \Delta(p_1^2, p_2^2) \Delta(p_1^6, p_2^6) \quad \text{で割り切れる.} \end{cases}$$

$$(37) \quad \begin{cases} (\text{予想}) \quad G_N(p_1, \dots, p_N) = \{ G_{N-1}, \dots, G_1, G_0 \} \text{ の適当な一次結合} \\ \text{は } \frac{N}{\prod_i p_i^2} \frac{(2)}{\prod_{i < j} \Delta(p_i^2, p_j^2) \Delta(p_i^6, p_j^6)} \quad \text{で割り切れる.} \end{cases}$$

この予想を認めれば,

$$(38) \quad \begin{cases} \dim \{ P(D) \tau \cdot \tau \mid P(D) \text{ は } D_1, D_5, \dots \text{ の重み } n \text{ の斉重多項式} \} \\ = n \text{ を } 10m+2, 10m+8 \quad \text{の形の自然数の和に分ける分け方の数} \\ \sim e^{C\sqrt{\frac{n}{5}}} \quad (n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

である。他方,

$$(39) \quad \begin{cases} \dim \{ P(D) \mid P(D) \text{ は } D_1, D_5, \dots \text{ の重み } n \text{ の斉重多項式} \} \\ = n \text{ を } 6m+1, 6m+5 \quad \text{の形の自然数の和に分ける分け方の数} \\ \sim e^{C\sqrt{\frac{n}{3}}} \quad (n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

である。 $\dim \{ P(D) \}$, $\dim \{ P(D) \tau \cdot \tau \}$ の母関数は次で与え

られる。

$$(40) \quad \frac{1}{\prod_{m=0}^{\infty} (1-t^{6m+1})(1-t^{6m+5})} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + 2t^5 + 2t^6 + 3t^7 + \\ + 3t^8 + 3t^9 + 4t^{10} + 5t^{11} + 6t^{12} + 7t^{13} + 8t^{14} + 9t^{15} + 10t^{16} + 12t^{17} + 14t^{18} + \dots,$$

$$(41) \quad \frac{1}{\prod_{m=0}^{\infty} (1-t^{10m+2})(1-t^{10m+8})} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + 2t^8 + 2t^{10} + 3t^{12} + 3t^{14} + \\ + 4t^{16} + 5t^{18} + 6t^{20} + 7t^{22} + 9t^{24} + 10t^{26} + 12t^{28} + 14t^{30} + 17t^{32} + 19t^{34} + 23t^{36} + \dots$$

weight n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$\dim \{P(D)\}$	1	1	1	2	3	4	6	8	10	14	18	23	30	38
$\dim \{P(D)\tau \cdot \tau\}$	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	7	9	10
# Equations	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	12	16	21	28

以下に, $\frac{P(D)\tau \cdot \tau}{\tau^2}$ ($P(D)$ は重み n の斉重多項式) を 1 組の basis $\{K^{(n)}\}$ の一次結合で表わした表と SK 方程式を挙げる (表 4, 5)。

(表1)

KP

	$K_1^{(0)}$
1	1

	$K_1^{(2)}$
D_1^2	1

	$K_1^{(3)}$
$D_1 D_2$	1

	$K_1^{(4)}$	$K_2^{(4)}$
$D_1 D_3$	1	0
D_2^2	1	1
D_1^4	1	-3

	$K_1^{(5)}$	$K_2^{(5)}$
$D_1 D_4$	1	0
$D_2 D_3$	1	1
$D_1^3 D_2$	1	-2

	$K_1^{(6)}$	$K_2^{(6)}$	$K_3^{(6)}$	$K_4^{(6)}$
$D_1 D_5$	1	0	0	0
$D_2 D_4$	1	1	0	0
D_3^2	1	1	1	0
$D_1^3 D_3$	1	-2	1	3
$D_1^2 D_2^2$	1	-1	-2	-2
D_1^6	1	-5	10	-30

	$K_1^{(7)}$	$K_2^{(7)}$	$K_3^{(7)}$	$K_4^{(7)}$
$D_1 D_6$	1	0	0	0
$D_2 D_5$	1	1	0	0
$D_3 D_4$	1	1	1	0
$D_1^3 D_4$	1	-2	1	1
$D_1^2 D_2 D_3$	1	-1	-1	0
$D_1 D_2^3$	1	0	-3	-1
$D_1^5 D_2$	1	-4	5	-5

	$K_1^{(8)}$	$K_2^{(8)}$	$K_3^{(8)}$	$K_4^{(8)}$	$K_5^{(8)}$	$K_6^{(8)}$	$K_7^{(8)}$		$K_1^{(9)}$	$K_2^{(9)}$	$K_3^{(9)}$	$K_4^{(9)}$	$K_5^{(9)}$	$K_6^{(9)}$	$K_7^{(9)}$	$K_8^{(9)}$
$D_1 D_7$	1	0	0	0	0	0	0	$D_1 D_8$	1	0	0	0	0	0	0	0
$D_2 D_6$	1	1	0	0	0	0	0	$D_2 D_7$	1	1	0	0	0	0	0	0
$D_3 D_5$	1	1	1	0	0	0	0	$D_3 D_6$	1	1	1	0	0	0	0	0
D_4^2	1	1	1	1	0	0	0	$D_4 D_5$	1	1	1	1	0	0	0	0
$D_1^3 D_5$	1	-2	1	0	1	0	0	$D_1^3 D_6$	1	-2	1	0	3	0	0	0
$D_1^2 D_2 D_4$	1	-1	-1	1	0	-2	0	$D_1^2 D_2 D_5$	1	-1	-1	1	1	1	0	0
$D_1^2 D_3^2$	1	-1	0	-2	0	2	1	$D_1^2 D_3 D_4$	1	-1	0	-1	0	0	1	0
$D_1 D_2^2 D_3$	1	0	-2	-1	0	1	-1	$D_1 D_2^2 D_4$	1	0	-2	0	0	0	-2	1
D_2^4	1	1	-3	-3	-4	0	6	$D_1 D_2 D_3^2$	1	0	-1	-2	0	-1	0	-1
$D_1^5 D_3$	1	-4	6	-5	0	5	-5	$D_2^3 D_3$	1	1	-2	-3	-6	0	3	0
$D_1^4 D_2^2$	1	-3	1	5	-4	4	2	$D_1^5 D_4$	1	-4	6	-2	0	0	10	-15
D_1^8	1	-7	21	-35	-84	-280	70	$D_1^4 D_2 D_3$	1	-3	2	1	-6	-4	-9	8
								$D_1^3 D_2^3$	1	-2	-2	6	-12	0	12	-9
								$D_1^7 D_2$	1	-6	14	-14	-84	56	0	35

	$K_1^{(10)}$	$K_2^{(10)}$	$K_3^{(10)}$	$K_4^{(10)}$	$K_5^{(10)}$	$K_6^{(10)}$	$K_7^{(10)}$	$K_8^{(10)}$	$K_9^{(10)}$	$K_{10}^{(10)}$	$K_{11}^{(10)}$	$K_{12}^{(10)}$
$D_1 D_9$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_2 D_8$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_3 D_7$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_4 D_6$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D_5^2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$D_1^3 D_7$	1	-2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$D_1^2 D_2 D_6$	1	-1	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$D_1^2 D_3 D_5$	1	-1	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0
$D_1^2 D_4^2$	1	-1	0	0	-2	0	0	0	1	0	0	0
$D_1 D_2^2 D_5$	1	0	-2	0	1	0	0	0	0	1	0	0
$D_1 D_2 D_3 D_4$	1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
$D_1 D_3^3$	1	0	0	-3	0	2	-1	-6	-3	-3	-6	1
$D_2^3 D_4$	1	1	-2	-2	0	0	-2	0	-3	0	-6	-4
$D_2^2 D_3^2$	1	1	-1	-3	-2	-2	0	2	3	0	4	2
$D_1^5 D_5$	1	-4	6	-4	1	0	10	-20	0	-15	0	20
$D_1^4 D_2 D_4$	1	-3	2	2	-4	0	-2	0	-3	0	-2	-4
$D_1^4 D_3^2$	1	-3	3	-3	6	-2	-8	18	3	12	12	-10
$D_1^3 D_2^2 D_3$	1	-2	-1	3	1	0	-4	-4	0	0	-5	0
$D_1^2 D_2^4$	1	-1	-4	4	6	-8	10	0	3	-12	12	12
$D_1^7 D_3$	1	-6	15	-21	21	0	0	-84	0	0	-105	0
$D_1^6 D_2^2$	1	-5	8	0	-14	-40	10	80	15	36	40	-20
D_1^{10}	1	-9	36	-84	126	-1000	770	3360	-525	420	2100	-2660

	$K_1^{(1)}$	$K_2^{(1)}$	$K_3^{(1)}$	$K_4^{(1)}$	$K_5^{(1)}$	$K_6^{(1)}$	$K_7^{(1)}$	$K_8^{(1)}$	$K_9^{(1)}$	$K_{10}^{(1)}$	$K_{11}^{(1)}$	$K_{12}^{(1)}$	$K_{13}^{(1)}$	$K_{14}^{(1)}$
$D_1 D_{10}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_2 D_9$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_3 D_8$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_4 D_7$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_5 D_6$	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_1^3 D_8$	1	-2	1	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
$D_1^2 D_7$	1	-1	-1	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
$D_1^2 D_6$	1	-1	0	-1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$D_1^2 D_5$	1	-1	0	0	-1	0	-1	1	3	0	0	0	0	0
$D_1 D_3^2 D_6$	1	0	-2	0	1	0	0	-2	-3	1	0	0	0	0
$D_1 D_3 D_5$	1	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0
$D_1 D_4^2$	1	0	-1	0	-2	-1	0	-2	0	2	0	1	0	0
$D_1 D_3^2 D_4$	1	0	0	-2	-1	0	0	0	-3	-1	2	-1	-1	0
$D_2^3 D_5$	1	1	-2	-2	1	6	3	3	3	0	0	0	7	-2
$D_2^2 D_3 D_4$	1	1	-1	-2	-2	2	1	0	2	0	1	-1	0	1
$D_2 D_3^3$	1	1	0	-3	-3	0	0	3	6	0	-3	3	-4	-1
$D_1^5 D_6$	1	-4	6	-4	1	0	-20	10	-15	-15	0	0	-30	0
$D_1^4 D_2 D_5$	1	-3	2	2	-3	2	3	-9	-13	8	8	0	-7	2
$D_1^4 D_3 D_4$	1	-3	3	-2	2	-6	9	0	6	-4	-7	-1	12	1
$D_1^3 D_2^2 D_4$	1	-2	-1	4	-2	5	-2	6	8	-6	-2	-1	6	-2

	$K_1^{(0)}$	$K_2^{(0)}$	$K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_5^{(0)}$	$K_6^{(0)}$	$K_7^{(0)}$	$K_8^{(0)}$	$K_9^{(0)}$	$K_{10}^{(0)}$	$K_{11}^{(0)}$	$K_{12}^{(0)}$	$K_{13}^{(0)}$	$K_{14}^{(0)}$
$D_1^3 D_2 D_3^2$	1	-2	0	0	3	0	12	-6	3	9	0	3	7	-2
$D_1^2 D_2^3 D_3$	1	-1	-3	2	4	6	-5	4	0	-6	3	-3	-12	3
$D_1 D_2^5$	1	0	-5	0	10	15	0	10	0	10	0	15	-30	0
$D_1^7 D_4$	1	-6	15	-20	14	105	-126	126	168	-70	-70	35	70	-70
$D_1^6 D_2 D_3$	1	-5	9	-6	0	54	15	-60	-36	54	39	-15	0	15
$D_1^5 D_2^3$	1	-4	3	8	-14	51	28	58	48	-30	-60	15	42	-12
$D_1^9 D_2$	1	-8	27	-48	42	567	-72	-294	672	378	168	-105	938	392

(表2)

KP 方程式

(weight 4) $(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3) \tau \cdot \tau = 0$, (weight 5) $(D_1^3 D_2 + 2D_2 D_3 - 3D_1 D_4) \tau \cdot \tau = 0$,
 (weight 6) $(D_1^6 - 9D_1^2 D_2^2 + 4D_1^3 D_3 - 32D_3^2 + 36D_2 D_4) \tau \cdot \tau = 0$,
 $(3D_1^2 D_2^2 + 2D_1^3 D_3 + 4D_3^2 + 3D_2 D_4 - 12D_1 D_5) \tau \cdot \tau = 0$, (weight 7) $(D_1^5 D_2 - 5D_1 D_2^3 - 20D_3 D_4 + 24D_2 D_5) \tau \cdot \tau = 0$,
 $(D_1 D_2^3 + D_1^3 D_4 + 2D_3 D_4 - 4D_1 D_6) \tau \cdot \tau = 0$,
 $(D_1^2 D_2 D_3 + D_3 D_4 - 2D_1 D_6) \tau \cdot \tau = 0$, (weight 8) $(D_1^8 + 14D_1^5 D_3 - 105D_1^2 D_2 D_4 + 210D_4^2 + 84D_1^3 D_5 - 504D_3 D_5 + 420D_2 D_6 - 120D_1 D_7) \tau \cdot \tau = 0$,
 $(D_1^4 D_2^2 - 2D_1^2 D_3^2 - 9D_4^2 + 4D_1^3 D_5 + 4D_3 D_5 + 14D_2 D_6 - 12D_1 D_7) \tau \cdot \tau = 0$,
 $(D_2^4 - 6D_1^2 D_3^2 - 6D_1^2 D_2 D_4 - 3D_4^2 + 4D_1^3 D_5 - 4D_3 D_5 + 2D_2 D_6 + 12D_1 D_7) \tau \cdot \tau = 0$,
 $(D_1^5 D_3 - 5D_1 D_2^2 D_3 - 16D_3 D_5 + 20D_2 D_6) \tau \cdot \tau = 0$, $(2D_1 D_2^2 D_3 + 2D_1^2 D_3^2 + 3D_1^2 D_2 D_4 + 3D_4^2 + 4D_3 D_5 - 2D_2 D_6 - 12D_1 D_7) \tau \cdot \tau = 0$, (weight 9)
 $(D_1^7 D_2 + 35D_1 D_2 D_3^2 - 21D_1^2 D_2 D_5 + 105D_4 D_5 + 35D_1^3 D_6 - 140D_3 D_6 + 90D_2 D_7 - 105D_1 D_8) \tau \cdot \tau = 0$,

$$(D_1^3 D_2^3 + 9 D_1 D_2^2 D_4 + 6 D_1^2 D_3 D_4 + 4 D_1^3 D_6 + 16 D_3 D_6 - 36 D_1 D_8) \tau \cdot \tau = 0,$$

$$(3 D_1^4 D_2 D_3 - 24 D_1 D_2^2 D_4 - 21 D_1^2 D_3 D_4 + 12 D_1^2 D_2 D_5 - 36 D_4 D_5 + 2 D_1^3 D_6 - 8 D_3 D_6 + 48 D_2 D_7 + 24 D_1 D_8) \tau \cdot \tau = 0,$$

$$\tau \cdot \tau = 0, \quad (D_2^3 D_3 - 3 D_1^2 D_3 D_4 + 2 D_1^3 D_6) \tau \cdot \tau = 0, \quad (3 D_1 D_2 D_3^2 + 3 D_1 D_2^2 D_4 + 6 D_1^2 D_3 D_4 + 3 D_1^2 D_2 D_5 + 9 D_4 D_5 - D_1^3 D_6 + 4 D_3 D_6 - 6 D_2 D_7 - 21 D_1 D_8) \tau \cdot \tau = 0,$$

$$= 0, \quad (D_1^5 D_4 + 15 D_1 D_2^2 D_4 + 20 D_1^2 D_3 D_4 + 22 D_4 D_5 + 2 D_3 D_6 - 60 D_1 D_8) \tau \cdot \tau = 0,$$

$$(weight\ 10) \quad (D_1^4 D_2 D_4 - D_2^3 D_4 - 4 D_1 D_2 D_3 D_4 - 8 D_4 D_6 + 12 D_2 D_8) \tau \cdot \tau = 0,$$

$$(D_1^7 D_3 - 21 D_1^3 D_2^2 D_3 - 84 D_1^2 D_2 D_6 + 168 D_4 D_6 - 288 D_3 D_7 + 224 D_1 D_9) \tau \cdot \tau = 0,$$

$$\dots \dots (weight\ 11) \quad (D_1 D_2^5 - D_1^5 D_6 - 15 D_1 D_2 D_4^2 + 5 D_1 D_2^2 D_6 - 20 D_1^2 D_3 D_6 + 10 D_1^3 D_8 - 24 D_5 D_6 + 20 D_3 D_8 + 24 D_1 D_{10}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (D_1^3 D_2 D_3^2 + D_1^4 D_2 D_5 - 3 D_1 D_2 D_4^2 + 8 D_1 D_2 D_3 D_5 - 3 D_1 D_2^2 D_6 + 3 D_1^2 D_4 D_5 + 6 D_1^2 D_2 D_7 - D_1^3 D_8 + 4 D_3 D_8 + 8 D_2 D_9 - 24 D_1 D_{10}) \tau \cdot \tau = 0,$$

(表 3)

MKP 方程式

$$(weight\ 2) \quad (D_1^2 - D_2) \tau_{[0]} \cdot \tau = 0, \quad (weight\ 3) \quad (D_1^3 + 3 D_1 D_2 - 4 D_3) \tau_{[0]} \cdot \tau = 0,$$

$$(weight\ 4) \quad (D_1^4 + 8 D_1 D_3 - 3 D_2^2 - 6 D_4) \tau_{[0]} \cdot \tau = 0,$$

$$(D_1^2 D_2 + D_2^2 - 2 D_4) \tau_{[0]} \cdot \tau = 0, \quad (weight\ 5) \quad (D_1^3 D_2 - 3 D_1 D_2^2 - 4 D_2 D_3 + 6 D_1 D_4) \tau_{[0]} \cdot \tau = 0,$$

$$(D_1^5 - 3 D_1^3 D_2 + 6 D_1 D_2^2 - 4 D_1^2 D_3) \tau_{[0]} \cdot \tau = 0,$$

$$(D_1^5 + 5 D_1 D_2^2 + 10 D_1 D_4 - 16 D_5) \tau_{[0]} \cdot \tau = 0, \dots$$

(表4)

SK

	$K_1^{(0)}$		$K_1^{(2)}$		$K_1^{(4)}$		$K_1^{(6)}$		
1	1	D_1^2	1	D_1^4	1	D_1^6	1		
						$D_1 D_5$	1		
	$K_1^{(12)}$	$K_2^{(12)}$	$K_3^{(12)}$		$K_1^{(10)}$	$K_2^{(10)}$		$K_1^{(8)}$	$K_2^{(8)}$
D_1^{12}	1	33	33	D_1^{10}	1	21	D_1^8	1	7
$D_1^7 D_5$	1	3	-7	$D_1^5 D_5$	1	1	$D_1^3 D_5$	1	-3
$D_1^2 D_5^2$	1	-2	3	D_5^2	1	6	$D_1 D_7$	1	0
$D_1^5 D_7$	1	-2	5	$D_1^3 D_7$	1	0			
$D_5 D_7$	1	3	0						
$D_1 D_{11}$	1	0	0						
	$K_1^{(14)}$	$K_2^{(14)}$	$K_3^{(14)}$		$K_1^{(16)}$	$K_2^{(16)}$	$K_3^{(16)}$	$K_4^{(16)}$	
D_1^{14}	1	52	286	D_1^{16}	1	78	-2470	572	
$D_1^9 D_5$	1	12	6	$D_1^{11} D_5$	1	28	0	22	
$D_1^4 D_5^2$	1	-3	1	$D_1^6 D_5^2$	1	3	-5	-3	
$D_1^7 D_7$	1	3	-1	$D_1 D_5^3$	1	3	15	-3	
$D_1^2 D_5 D_7$	1	-2	-1	$D_1^9 D_7$	1	15	15	-9	
D_7^2	1	3	6	$D_1^4 D_5 D_7$	1	0	0	1	
$D_1^3 D_{11}$	1	-3	0	$D_1^2 D_7^2$	1	1	1	-2	
$D_1 D_{13}$	1	0	0	$D_1^5 D_{11}$	1	1	5	0	
				$D_5 D_{11}$	1	6	0	0	
				$D_1^3 D_{13}$	1	0	0	0	

	$K_1^{(18)}$	$K_2^{(18)}$	$K_3^{(18)}$	$K_4^{(18)}$	$K_5^{(18)}$		$K_1^{(20)}$	$K_2^{(20)}$	$K_3^{(20)}$	$K_4^{(20)}$	$K_5^{(20)}$	$K_6^{(20)}$
D_1^{18}	1	102	1071	3978	31824	D_1^{20}	1	133	2261	15827	8398	50388
$D_1^{13}D_5$	1	42	91	78	-156	$D_1^{15}D_5$	1	63	441	-153	208	-1482
$D_1^8D_5^2$	1	7	-14	3	-11	$D_1^{10}D_5^2$	1	18	21	67	-7	-27
$D_1^3D_5^3$	1	-3	6	3	9	$D_1^5D_5^3$	1	-2	1	-13	3	3
$D_1^{11}D_7$	1	25	0	-19	-33	D_5^4	1	3	6	-18	-12	108
$D_1^6D_5D_7$	1	0	0	1	12	$D_1^{13}D_7$	1	42	175	-91	-65	429
$D_1D_5^2D_7$	1	0	0	-4	-18	$D_1^8D_5D_7$	1	7	0	-6	5	-26
$D_1^4D_7^2$	1	-3	7	2	9	$D_1^3D_5^2D_7$	1	-3	0	4	0	-6
$D_1^7D_{11}$	1	3	-7	-4	-21	$D_1^6D_7^2$	1	0	0	14	-2	9
$D_1^2D_5D_{11}$	1	-2	3	1	9	$D_1D_5D_7^2$	1	0	0	-6	-2	9
D_7D_{11}	1	3	0	3	0	$D_1^9D_{11}$	1	12	6	-24	-6	63
$D_1^5D_{13}$	1	-2	5	0	0	$D_1^4D_5D_{11}$	1	-3	1	1	-1	3
D_5D_{13}	1	3	0	0	0	$D_1^2D_7D_{11}$	1	-2	-1	-3	1	0
D_1D_{17}	1	0	0	0	0	$D_1^7D_{13}$	1	3	-1	-7	0	0
						$D_1^2D_5D_{13}$	1	-2	-1	3	0	0
						D_7D_{13}	1	3	6	0	0	0
						$D_1^3D_{17}$	1	-3	0	0	0	0
						D_1D_{19}	1	0	0	0	0	0

	$K_1^{(22)}$	$K_2^{(22)}$	$K_3^{(22)}$	$K_4^{(22)}$	$K_5^{(22)}$	$K_6^{(22)}$	$K_7^{(22)}$
D_1^{22}	1	3724	10868	55556	114665	302328	831402
$D_1^{17} D_5$	1	924	-2652	1156	3145	1768	4442
$D_1^{12} D_5^2$	1	99	53	56	175	-267	57
$D_1^7 D_5^3$	1	-1	-17	6	5	-27	-3
$D_1^2 D_5^4$	1	-1	13	6	10	-12	12
$D_1^{15} D_7$	1	441	-1053	-220	-65	-429	663
$D_1^{10} D_5 D_7$	1	21	22	15	30	-24	-27
$D_1^5 D_5^2 D_7$	1	1	-3	0	0	6	8
$D_5^3 D_7$	1	6	-3	-15	-30	36	18
$D_1^8 D_7^2$	1	0	11	11	12	-23	-16
$D_1^3 D_5 D_7^2$	1	0	1	1	2	-3	-6
$D_1 D_7^3$	1	0	-3	-3	-9	-9	-9
$D_1^{11} D_{11}$	1	50	-11	-49	-76	147	66
$D_1^6 D_5 D_{11}$	1	0	-1	1	-1	-3	-9
$D_1 D_5^2 D_{11}$	1	0	9	1	-1	-3	-9
$D_1^4 D_7 D_{11}$	1	1	3	0	1	0	3
D_{11}^2	1	6	0	6	12	-18	0
$D_1^9 D_{13}$	1	6	0	-6	-21	0	0
$D_1^4 D_5 D_{13}$	1	1	0	-1	-1	0	0
$D_1^2 D_7 D_{13}$	1	-1	0	1	0	0	0
$D_1^5 D_{17}$	1	1	5	0	0	0	0
$D_5 D_{17}$	1	6	0	0	0	0	0
$D_5^3 D_{19}$	1	0	0	0	0	0	0

(表5)

SK 方程式

$$\begin{aligned}
& (\text{weight } 6) \quad (D_1^6 - D_1 D_5) \tau \cdot \tau = 0, \quad (\text{weight } 8) \quad (3 D_1^8 + 7 D_1^3 D_5 - 10 D_1 D_7) \\
& \tau \cdot \tau = 0, \quad (\text{weight } 10) \quad (D_1^{10} + 3 D_1^5 D_5 - 4 D_5^2) \tau \cdot \tau = 0, \quad (6 D_1^5 D_5 - D_5^2 \\
& - 5 D_1^3 D_7) \tau \cdot \tau = 0, \quad (\text{weight } 12) \quad (D_1^{12} - 7 D_1^7 D_5 + 56 D_1^2 D_5^2 - 50 D_1^5 D_7) \\
& \tau \cdot \tau = 0, \quad (15 D_1^7 D_5 + 21 D_1^5 D_7 - D_5 D_7 - 35 D_1 D_{11}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (15 D_1^2 D_5^2 \\
& - 9 D_1^5 D_7 + 4 D_5 D_7 - 10 D_1 D_{11}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (\text{weight } 14) \quad (D_1^9 D_5 - D_7^2 + \\
& + 3 D_1^3 D_{11} - 3 D_1 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (D_1^4 D_5^2 + D_1^7 D_7 - 2 D_1 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \\
& (3 D_1^7 D_7 - 3 D_1^2 D_5 D_7 + 5 D_1^3 D_{11} - 5 D_1 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (3 D_1^{14} - 143 D_7^2 - 91 D_1^3 D_{11} \\
& + 231 D_1 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (6 D_1^2 D_5 D_7 + D_7^2 - 3 D_1^3 D_{11} - 4 D_1 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \\
& (\text{weight } 16) \quad (D_1^{16} - 26 D_1^{11} D_5 + 494 D_1^5 D_{11} + 26 D_5 D_{11} - 495 D_1^3 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \\
& (3 D_1^{11} D_5 - 66 D_1^4 D_5 D_7 - 14 D_5 D_{11} + 77 D_1^3 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (3 D_1^6 D_5^2 - D_1^9 D_7 \\
& + 6 D_1^5 D_{11} - 8 D_1^3 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (3 D_1 D_5^3 - D_1^9 D_7 - 6 D_1^5 D_{11} + 2 D_5 D_{11} + 2 D_1^3 D_{13}) \\
& \tau \cdot \tau = 0, \quad (D_1^9 D_7 + 9 D_1^4 D_5 D_7 - 3 D_1^5 D_{11} - 2 D_5 D_{11} - 5 D_1^3 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \\
& (30 D_1^4 D_5 D_7 + 15 D_1^2 D_7^2 - 3 D_1^5 D_{11} - 2 D_5 D_{11} - 40 D_1^3 D_{13}) \tau \cdot \tau = 0, \\
& (\text{weight } 18) \quad (15 D_1^3 D_5^3 - 15 D_1^2 D_5 D_{11} - 10 D_7 D_{11} - 9 D_1^5 D_{13} + 9 D_5 D_{13} \\
& + 10 D_1 D_{17}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (15 D_1 D_5^2 D_7 + 30 D_1^4 D_7^2 - 42 D_1^5 D_{13} \\
& + 2 D_5 D_{13} - 5 D_1 D_{17}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (15 D_1^4 D_7^2 - 15 D_1^2 D_5 D_{11} - 5 D_7 D_{11} \\
& - 12 D_1^5 D_{13} + 2 D_5 D_{13} + 15 D_1 D_{17}) \tau \cdot \tau = 0, \quad \dots \dots \dots \\
& (\text{weight } 20) \quad (9 D_1^5 D_5^3 - 9 D_1^4 D_5 D_{11} - 36 D_1^2 D_7 D_{11} + 6 D_1^2 D_5 D_{13} - 5 D_7 D_{13} \\
& + 18 D_1^3 D_{17} + 17 D_1 D_{19}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (3 D_1^3 D_5^2 D_7 + 6 D_1^4 D_5 D_{11} \\
& + 6 D_1^2 D_7 D_{11} - 13 D_1^3 D_{17} - 2 D_1 D_{19}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (9 D_1^6 D_7^2 - 9 D_1 D_5 D_7^2
\end{aligned}$$

$$-60 D_1^2 D_5 D_{13} - 10 D_7 D_{13} + 30 D_1^3 D_{17} + 40 D_1 D_{19}) \tau \cdot \tau = 0, \dots$$

$$(\text{weight } 22) \quad (6 D_1^2 D_5^4 + 12 D_1^3 D_5 D_7^2 - 6 D_{11}^2 + 12 D_1^4 D_5 D_{13} - 18 D_1^5 D_{17}$$

$$+ 8 D_5 D_{17} - 14 D_1^3 D_{19}) \tau \cdot \tau = 0, \quad (5 D_5^3 D_7 + 10 D_1 D_7^3$$

$$+ 5 D_{11}^2 - 180 D_1^4 D_5 D_{13} - 105 D_1^2 D_7 D_{13} + 9 D_1^5 D_{17} + D_5 D_{17} + 255 D_1^3 D_{19})$$

$$\tau \cdot \tau = 0, \quad (3 D_1^6 D_5 D_{11} - 3 D_1 D_5^2 D_{11} + 6 D_1^5 D_{17} - D_5 D_{17} - 5 D_1^3 D_{19})$$

$$\tau \cdot \tau = 0, \quad \dots \dots$$

参考文献

[1] R. Hirota, Lect. Notes in Math. 515 Springer (1976).

[2] 佐藤幹夫, 毛織泰子, 広田氏の Bilinear Equations について.

数理解析研究所講究録 388 (1980).

誤記訂正

[2] で weight 12 のときの KdV の (表1) に於いて, $\frac{D_1^4 \tau \cdot \tau}{\tau^2}$ の $K_{8,4}$

の係数 6 を -6 に訂正する。(表5)の KdV 方程式で D_1^4 を

含むものは, -6として計算してあるので, そのままでよい.)

追記

KP 方程式について、予想 (30) が $N \leq 2$ のときに成り立つことは、(28), (29) で示されているが、 $N=3$ のときにも正しいことが次の (29)^{bis} でわかる。

$$\begin{aligned}
 & G_3(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3) \\
 & + \sum_{6\text{項}} \left(\Delta(p_1, p_2) \Delta(p_2, p_3) \Delta(q_1, q_2) \Delta(q_2, q_3) + \Delta(p_1, q_2) \Delta(p_2, q_3) \Delta(q_1, p_3) \Delta(q_2, p_3) - \frac{2}{3} \Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2) \Delta(p_3, q_3)^2 \right) G_2(p_1, p_2, q_1, q_2) \\
 & - \sum_{24\text{項}} \left(\Delta(p_1, q_2) \Delta(q_1, q_3) \Delta(p_2, q_2) \Delta(p_3, q_3) - \frac{2}{3} \Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2) \Delta(q_2, q_3) \Delta(p_3, q_3) \right) G_2(p_1, p_2, q_1, q_2) \\
 & + \left(\Delta(p_1, p_2) \Delta(q_1, q_2, q_3) + \Delta(p_1, p_2, q_3) \Delta(q_1, q_2, p_3) + \Delta(p_1, q_2, p_3) \Delta(q_1, p_2, q_3) + \Delta(p_1, q_2, q_3) \Delta(q_1, p_2, p_3) \right) \\
 & \quad \times (G_1(p_1, q_1) + G_1(p_2, q_2) + G_1(p_3, q_3) - 2) \\
 & - \sum_{6\text{項}} \left(\Delta(p_1, q_1, p_2, p_3) + \Delta(p_1, q_1, p_3, p_2) \right) (G_1(p_1, q_1) + G_1(p_2, q_2) - G_1(p_2, q_1) - G_1(p_1, q_2)) \\
 & \text{は } \Delta(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) \Delta(p_1, q_1) \Delta(p_2, q_2) \Delta(p_3, q_3) \text{ で割り切れる。但し、上式で} \\
 & \text{例えば } \sum_{6\text{項}} (\dots) G_2(p_1, p_2, q_1, q_2) \text{ は, } (p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3) \text{ の部分順列 } (p_1, q_1, p_2, q_2), \\
 & (p_1, q_2, p_2, q_1), (p_1, q_2, p_3, q_3), (p_1, q_2, q_3, p_3), (p_2, q_2, p_3, q_3) \text{ について,} \\
 & \text{それらに応じた係数(多項式)を掛けた和を表わす, 他の } \sum \text{ も} \\
 & \text{同様の意味である。}
 \end{aligned}$$