

2-CATEGORICAL EXTENSION OF COHEN-MONTGOMERY DUALITY AND DERIVED EQUIVALENCES

浅芝 秀人

ABSTRACT. This report mainly explains a result of the preprint [2] arXiv:0905.3884 that given a group G the 2-category of small categories with G -action and G -equivariant functors is 2-equivalent to the 2-category of small G -graded categories and degree-preserving functors.

はじめに

この報告書では, G を群, $\mathbb{k}$ を可換環とし, 特に断らなければ, 圏, 関手, 多元環はすべて $\mathbb{k}$ -線型と仮定する. 論文 [6] において, Cohen と Montgomery は次の定理を示した.

定理. G が位数 n の有限群であるとき, G -作用を持つ多元環 A と, G -次数多元環 B に対して次の同型が成り立つ.

$$(A * G) \# G \cong M_n(A)$$

$$(B \# G) * G \cong M_n(B).$$

上において, $*$ は歪群環, $\#$ はスマッシュ積を表し, M_n は n 次全行列多元環を表す. ここで, 多元環 A をただ 1 つの対象を持つ圏とみなすと, $M_n(A)$ は n 個の同型な対象を持つ圏と見なすことができ, A と $M_n(A)$ は圏として同値になることに注意する. ここでの目的は, この定理を次の要請を満たすように拡張することである.

- (1) G を任意の群とすること.
- (2) 多元環を圏にすること.
- (3) 単に個々の圏ごとに同値を与えるだけでなく, 圏のなす 2-圏の間の 2-同値に拡張すること.

(1) は [3, 9] など, (2) は [5, 1] ですでに考察されているので, (3) がここでの中心課題になる. もう少し詳しく言うと, 任意の群 G に対して,

- G -作用を持つ小圏のなす 2-圏 $G\text{-Cat}$ と G -次数のついた小圏のなす 2-圏 $G\text{-GrCat}$ をうまく定義し,
- 軌道圏構成 (歪群環構成の一般化) を 2-関手 $?/G: G\text{-Cat} \rightarrow G\text{-GrCat}$ に拡張し, スマッシュ積構成を 2-関手 $? \# G: G\text{-GrCat} \rightarrow G\text{-Cat}$ に拡張して,
- この 2 つの 2-関手が互いに 2-擬逆であることを示す.

ここでは, 普通の意味の (例えば [4, 8] で定義されている) 2-自然変換を, **強い意味の 2-自然変換** といい, 弱い意味の 2-自然変換 (この概念を定義する等式を自然同値に取り替えたもの) を, 単に **2-自然変換** ということにする. したがって, **2-擬逆** も弱い

意味で用いている。(実際には、半分は強い意味で成り立ち、強い意味の随伴対になっている。)

第1節では2-圏 $G\text{-Cat}$ を定義し、第2節では2-圏 $G\text{-GrCat}$ を定義する。ここで $G\text{-GrCat}$ の射の定義条件を [1] より弱めたことが重要である。これによって、主定理で述べられた2-同値を証明することができたことに注意しておく。第3節では、 G -被覆関手を導入し、第4節で軌道圏を定義し、これによって G -被覆関手を特徴づける。第5節ではスマッシュ積を定義する。第6節では、軌道圏の構成とスマッシュ積の構成を2-関手に拡張し、主定理を述べる。第7節では、導来同値への応用を述べ、第8節で例を挙げる。

1. 2-圏 $G\text{-Cat}$

1.1. G -圏.

定義 1.1. 圏 C と群準同型 $A: G \rightarrow \text{Aut}(C)$ の組 (C, A) は、 G -作用をもつ圏あるいは G -圏とよばれる。各 $a \in G$ に対して $A_a := A(a)$ とおく。混乱の恐れがないとき G -作用はつねに同じ文字 A で表し、単に $C = (C, A)$ と書く。

記号 1.2. $\mathbb{k}$ -線型な小圏の全体とそれらの間の $\mathbb{k}$ -線型な関手全体、およびそれらの関手の間の自然変換のなす2-圏を $\mathbb{k}\text{-Cat}$ で表す。

注意 1.3. G をただ1つの対象 $*$ を持つ ($\mathbb{k}$ -線型とは限らない) 圏と見なせば、 G -圏とは、関手 $\bar{A}: G \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ に他ならない (上の記号のもとで、 $C := \bar{A}(*)$, $A := \bar{A}|_{\text{End}(*)}$)。各 $B \in \mathbb{k}\text{-Cat}$ に対して、 $\Delta B := (B, \text{自明な } G\text{-作用})$ は G -小圏になる。

1.2. G -同変関手.

定義 1.4. C, C' を G -圏、 $E: C \rightarrow C'$ を関手とする。このとき E の同変性調整子とは、自然同型 $\rho_a: A_a E \rightarrow E A_a$ の族 $\rho = (\rho_a)_{a \in G}$ で、どの $a, b \in G$ に対しても次の図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} A_{ba} E = A_b A_a E & \xrightarrow{A_b \rho_a} & A_b E A_a \\ & \searrow \rho_{ba} & \downarrow \rho_b A_a \\ & & E A_{ba} = E A_b A_a \end{array}$$

また、組 (E, ρ) を G -同変関手とよぶ。上の ρ_a がすべて恒等射にとれるとき、すなわち各 $a \in G$ に対して $A_a E = E A_a$ となるとき、 E は強い意味の G -同変関手であるという。

注意 1.5. $\mathbb{k}\text{-Cat}$ におけるどの関手 $F: B \rightarrow B'$ に対しても $\Delta F = (F, \mathbb{1}): \Delta B \rightarrow \Delta B'$ は強い意味の G -同変関手である。

1.3. G -同変関手の射.

定義 1.6. $(E, \rho), (E', \rho'): C \rightarrow C'$ を G -同変関手とする。 (E, ρ) から (E', ρ') への射とは自然変換 $\eta: E \rightarrow E'$ で、各 $a \in G$ に対して次の図式を可換にするものである。

$$\begin{array}{ccc} A_a E & \xrightarrow{\rho_a} & E A_a \\ A_a \eta \downarrow & & \downarrow \eta A_a \\ A_a E' & \xrightarrow{\rho'_a} & E' A_a \end{array}$$

G -同変関手の合成は次で定義される.

補題 1.7. $\mathcal{C} \xrightarrow{(E,\rho)} \mathcal{C}' \xrightarrow{(E',\rho')} \mathcal{C}''$ を G -圏の間の G -同変関手とすると,

$$(E', \rho')(E, \rho) := (E'E, ((E'\rho_a)(\rho'_a E))_{a \in G}): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$$
も G -同変関手となる. これを (E, ρ) と (E', ρ') の**合成**という.

1.4. 2-圏 $G\text{-Cat}$.

命題 1.8. 次で 2-圏が定義される.

- 対象は G -小圏の全体.
- 射はそれらの間の G -同変関手の全体.
- 2-射は G -同変関手の間の射の全体.
- 射の合成は上の補題で与えられたもの.
- 2-射の垂直合成, 水平合成は自然変換に対して普通に定義されるもの.

この 2-圏を $G\text{-Cat}$ で表す.

注意 1.9. Δ は 2-関手 $\Delta: \mathbf{k}\text{-Cat} \rightarrow G\text{-Cat}$ を導く.

2. 2-圏 $G\text{-GrCat}$

この節では, G -次数圏のなす 2-圏を定義する. この 2-圏での射, 次数保存関手の概念を以下のように拡張しておくことが, 後で 2-同値を導くためのキーポイントになる.

定義 2.1. (1) 圏 B と $\mathbf{k}$ -加群の直和分解の族 $D := (B(x, y) = \bigoplus_{a \in G} B^a(x, y))_{x, y \in B}$ との組 (B, D) は, 各 $x, y, z \in B$ と各 $a, b \in G$ に対して, $B^b(y, z) \cdot B^a(x, y) \subseteq B^{ba}(x, z)$ となるときの, G -次数圏とよばれる. $f \in B^a(x, y)$ ($a \in G, x, y \in B$) となるときの, $\deg f := a$ とおく.

(2) G -次数圏の間の関手 $H: B \rightarrow A$ と写像 $r: \text{obj}(B) \rightarrow G$ との組 (H, r) は, 各 $x, y \in B$ と各 $a \in G$ に対して

$$H(B^{r_y a}(x, y)) \subseteq A^{ar_x}(Hx, Hy)$$

となるときの, **次数保存関手**とよばれる. この r を H の**次数調整子**とよぶ. 次数調整子が G の単位元への定数写像 1 にとれるとき, H は**強い意味の次数保存関手**であるという.

(3) $(H, r), (I, s): B \rightarrow A$ を G -次数圏の間の次数保存関手とする. 自然変換 $\theta: H \rightarrow I$ は, 各 $x \in B$ に対して, $\theta x \in A^{s_x^{-1}r_x}(Hx, Ix)$ となるときの, 次数保存関手 (H, r) から (I, s) への**射**とよばれる.

次数保存関手の合成は次で定義される.

補題 2.2. $B \xrightarrow{(H,r)} B' \xrightarrow{(H',r')} B''$ を G -次数圏の間の次数保存関手とすると,

$$(H', r')(H, r) := (H'H, (r_x r'_{Hx})_{x \in B}): B \rightarrow B''$$

も次数保存関手となる. これを (H, r) と (H', r') の**合成**とよぶ.

命題 2.3. 次で 2-圏が定義される.

- 対象は G -次数小圏の全体.
- 射はそれらの間の次数保存関手の全体.

浅芝 秀人

- 2-射は次数保存関手の間の射の全体.
- 射の合成は上の補題で与えられたもの.
- 2-射の垂直合成, 水平合成は自然変換に対して普通に定義されるもの.

この 2-圏を $G\text{-GrCat}$ で表す.

3. 被覆関手

この節では, $\mathcal{C}$ を G -圏, $\mathcal{B}$ を圏とする. ここでは, [1, §1] から必要な定義と命題を引用する.

3.1. G -不変関手.

定義 3.1. $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ を関手とする. このとき F の**不変性調整子**とは, 自然同型 $\phi_a: F \rightarrow FA_a$ の族 $\phi := (\phi_a)_{a \in G}$ で, どの $a, b \in G$ に対しても次の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi_a} & FA_a \\ & \searrow \phi_{ba} & \downarrow \phi_b A_a \\ & & FA_{ba} = FA_b A_a \end{array}$$

また, 組 (F, ϕ) を G -**不変関手**とよぶ. これは, $\mathcal{B} = \Delta \mathcal{B}$ と見たときの G -同変関手に他ならない.

注意 3.2. $\phi_1 = \mathbb{1}_F$ であり, 各 $a \in G$ に対して, $\phi_a^{-1} = \phi_{a^{-1}} A_a$ が成り立つ.

3.2. G -不変関手の射.

定義 3.3. $(F, \phi), (F', \phi')$ を G -不変関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, $\eta: F \rightarrow F'$ を自然変換とする. このとき $\eta: (F, \phi) \rightarrow (F', \phi')$ は, 各 $a \in G$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi_a} & FA_a \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta A_a \\ F' & \xrightarrow{\phi'_a} & F'A_a \end{array}$$

が可換であるとき, G -不変関手の間の**射**とよばれる.

記号 3.4. G -不変関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ 全体とそれらの間の射全体は圏をなす. この圏を $\text{Inv}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ で表す.

補題 1.7 の特別の場合として次が得られる.

補題 3.5. $(F, \phi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ が G -不変関手で $H: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ が関手ならば, $H(F, \phi) := (HF, (H\phi_a)_{a \in G}): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ も G -不変関手になる.

3.3. G -被覆関手.

記号 3.6. $(F, \phi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ を G -不変関手とし, $x, y \in \mathcal{C}$ とする. $\mathbb{k}$ -加群の準同型 $F_{x,y}^{(1)}, F_{x,y}^{(2)}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} F_{x,y}^{(1)}: \bigoplus_{a \in G} \mathcal{C}(A_a x, y) &\rightarrow \mathcal{B}(Fx, Fy), (f_a)_{a \in G} \mapsto \sum_{a \in G} F(f_a) \cdot \phi_a x \\ F_{x,y}^{(2)}: \bigoplus_{b \in G} \mathcal{C}(x, A_b y) &\rightarrow \mathcal{B}(Fx, Fy), (f_b)_{b \in G} \mapsto \sum_{b \in G} \phi_{b^{-1}}(A_b y) \cdot F(f_b) \end{aligned}$$

命題 3.7. 上において $F_{x,y}^{(1)}$ が同型であることと $F_{x,y}^{(2)}$ が同型であることは同値である.

定義 3.8. $(F, \phi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ を G -不変関手とする.

- (1) (F, ϕ) は, 各 $x, y \in \mathcal{C}$ に対して $F_{x,y}^{(1)}$ が同型であるとき, G -**前被覆**であるという.
(命題 3.7より, この条件は $F_{x,y}^{(2)}$ が同型であることと同値である.)
- (2) (F, ϕ) が G -前被覆で, 関手 F が**稠密**である (すなわち各 $y \in \mathcal{B}$ はある $x \in \mathcal{C}$ によって $Fx \cong y$ とかける) とき, (F, ϕ) は G -**被覆**であるという.

4. 軌道圏

4.1. 標準 G -被覆関手.

定義 4.1. (1) G -圏 $\mathcal{C}$ に対して G -次数圏 $\mathcal{C}/G$ を次で定義し, これを $\mathcal{C}$ の G による**軌道圏**と呼ぶ (cf. [5, 7]).

- $\text{obj}(\mathcal{C}/G) := \text{obj}(\mathcal{C})$.
- 各 $x, y \in \mathcal{C}/G$ に対して,

$$(\mathcal{C}/G)(x, y) := \bigoplus_{a \in G} (\mathcal{C}/G)^a(x, y).$$

ただし, 各 $a \in G$ に対して, $(\mathcal{C}/G)^a(x, y) := \mathcal{C}(A_a x, y)$.

- 各 $f: x \rightarrow y, g: y \rightarrow z$ in $\mathcal{C}/G$ に対して,

$$gf := \left(\sum_{\substack{a, b \in G \\ ba = c}} g_b \cdot A_b(f_a) \right)_{c \in G}.$$

(2) **標準関手** $P: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ を次で定義する.

- $\mathcal{C}$ の各対象 x に対して, $Px := x$,
- $\mathcal{C}$ の各射 f に対して, $Pf := (\delta_{a,1} f)_{a \in G}$.

(3) 各 $c \in G, x \in \mathcal{C}$ に対して, $\psi_c x := (\delta_{a,c} \mathbb{1}_{A_c x})_{a \in G} \in (\mathcal{C}/G)(Px, PA_c x)$.

補題 4.2. 上において各 $c \in G$ に対して, $\psi_c: (\psi_c x)_{x \in \mathcal{C}}: P \rightarrow PA_c$ は自然同型であり, $\psi := (\psi_c)_{c \in G}$ は P の不変性調整子となり, $(P, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ は G -不変関手になる.

例 4.3. $\mathcal{C} = R$ が多元環 (=ただ1つの対象を持つ圏) のとき, 軌道圏 R/G は歪群環 $R * G$ (を圏と見なしたもの) と同型になる.

命題 4.4. 次が成り立つ.

- (1) (P, ψ) は G -被覆関手である.
- (2) (P, ψ) は, C からの G -不変関手のなかで**普遍的**である. すなわち, 各 G -不変関手 $(F, \phi): C \rightarrow B$ に対して, $(F, \phi) = H(P, \psi)$ をみたす関手 $H: C/G \rightarrow B$ がただ一つ存在する.

実は, この最後の主張は次のようにもっと精密化される.

系 4.5. 上において (P, ψ) は **2-普遍的**である. すなわち, 誘導される関手

$$(P, \psi)^*: \text{Fun}(C/G, B) \rightarrow \text{Inv}(C, B)$$

は, 圏の同型になる (単なる同値ではなく). ただし, $\text{Fun}(C/G, B)$ は, C/G から B への関手全体とその間の自然変換の全体のなす圏を表す.

この事実は後に §6.1 で使われる.

例 4.6. $C = \mathbb{k}$ が体で, G の作用が自明な場合 $C/G = \mathbb{k}G$ は普通の群環になる. $B = \text{Mod } \mathbb{k}$ を $\mathbb{k}$ -ベクトル空間の圏とすると, $\text{Fun}(\mathbb{k}G, \text{Mod } \mathbb{k}) = \text{Mod } \mathbb{k}G$ は左 $\mathbb{k}G$ -加群の圏, $\text{Inv}(\mathbb{k}, \text{Mod } \mathbb{k}) = \text{Rep}_{\mathbb{k}} G$ は G の $\mathbb{k}$ -表現の圏になる. この場合, 上の圏の同型は, よく知られた同型 $\text{Rep}_{\mathbb{k}} G \cong \text{Mod } \mathbb{k}G$ を与えている.

注意 4.7. 小圏の範囲内で考えると, 上の系 4.5 は自然な同型,

$$\mathbb{k}\text{-Cat}(C/G, B) \cong G\text{-Cat}(C, \Delta B)$$

を与える. したがって, $(?/G)$ と忘却関手 $G\text{-GrCat} \rightarrow \mathbb{k}\text{-Cat}$ との合成が, Δ の左随伴になっていることが分かる.

4.2. G -被覆関手の特徴付け.

定理 4.8. G -不変関手 $(F, \phi): C \rightarrow B$ に対して次は同値である.

- (1) (F, ϕ) は G -被覆関手である.
- (2) (F, ϕ) は G -前被覆関手であり, C からの G -前被覆関手のなかで普遍的である.
- (3) (F, ϕ) は C からの G -不変関手のなかで普遍的である.
- (4) G -不変関手として $(F, \phi) \cong H(P, \psi)$ となる圏同値 $H: C/G \rightarrow B$ が存在する.
- (5) $(F, \phi) = H(P, \psi)$ となる圏同値 $H: C/G \rightarrow B$ が存在する.

4.3. G -同変関手と G -不変関手の合成. 補題 1.7 の特別の場合として次の (1) が得られる.

補題 4.9. (1) C, C' を G -圏, B を圏とし, $C' \xrightarrow{(E, \rho)} C \xrightarrow{(F, \phi)} B$ において (E, ρ) を G -同変関手, (F, ϕ) を G -不変関手とする. このとき,

$$(F, \phi)(E, \rho) := (FE, ((F\rho_a)(\phi_a E))_{a \in G}): C' \rightarrow B$$

は, G -不変関手になる.

(2) 上において (E, ρ) が G -同変な圏同値で (F, ϕ) が G -被覆関手であれば, 合成 $(F, \phi)(E, \rho)$ は, G -被覆関手となる. したがって, C'/G と B は圏同値になる.

2-CATEGORICAL EXTENSION OF CM-DUALITY

5. スマッシュ積

定義 5.1. G -次数圏 B に対して **スマッシュ積** $B\#G$ という G -圏が次で定義される.

- $\text{obj}(B\#G) := \text{obj}(B) \times G$. 各 $x \in B$ と $a \in G$ に対して, $x^{(a)} := (x, a)$ とおく.
- 各 $x^{(a)}, y^{(b)} \in B\#G$ に対して, $(B\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) := B^{b^{-1}a}(x, y)$
- 各 $x^{(a)}, y^{(b)}, z^{(c)} \in B\#G$ に対して, 合成は次の可換図式で定義される.

$$\begin{array}{ccc} (B\#G)(y^{(b)}, z^{(c)}) \times (B\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) & \longrightarrow & (B\#G)(x^{(a)}, z^{(c)}) \\ \parallel & & \parallel \\ B^{c^{-1}b}(y, z) \times B^{b^{-1}a}(x, y) & \longrightarrow & B^{c^{-1}a}(x, z), \end{array}$$

ただし, 下段の射は B の合成で与える.

補題 5.2. $B\#G$ は自由 G -作用を持つ.

Proof. 各 $c \in G$ と $x^{(a)} \in B\#G$ に対して, $A_c x^{(a)} := x^{(ca)}$. 各 $f \in (B\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) = B^{b^{-1}a}(x, y) = (B\#G)(x^{(ca)}, y^{(cb)})$ に対して, $A_c f := f$. $\square$

定義 5.3. G -次数圏 B に対して関手 $Q_{B,G} := Q: B\#G \rightarrow B$ を次のように定義する.

- 各 $x^{(a)} \in B\#G$ に対して, $Q(x^{(a)}) = x$
- 各 $f \in (B\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) = B^{b^{-1}a}(x, y)$ に対して, $Q(f) := f$.

命題 5.4. 各 $a \in G$ に対して, $Q = QA_a$ が成り立ち, $Q = (Q, 1): B\#G \rightarrow B$ は G -被覆関手になる. したがって特に, Q は標準 G -被覆関手 $(P, \psi): B\#G \rightarrow (B\#G)/G$ を通過する. すなわち, $Q = H(P, \psi)$. をみたす圏同値 $H: (B\#G)/G \rightarrow B$ がただ1つ存在する.

例 5.5. (1) G が有限群で, $B = R = \bigoplus_{a \in G} R_a$ が G -次数多元環であるとき, $R\#G = (R_{b^{-1}a})_{(a,b) \in G \times G}$ は行列環になる. (G が無限群のときもこの形になる. ただし, 各元の成分はほとんどすべて0.)

(2) $\mathbb{k}$ を体, $B = R$ を多元環とし, $T(R) := R \ltimes \text{Hom}_{\mathbb{k}}(R, \mathbb{k})$ を自明拡大とする. R の元の次数を0, $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(R, \mathbb{k})$ の元の次数を -1 として $T(R)$ を $\mathbb{Z}$ -次数多元環とみると, $T(R)\#G$ は反復圏 $\hat{R}$ と同型になる.

6. 2-関手

6.1. 軌道 2-関手.

定義 6.1. $(E, \rho), (E', \rho'): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ を G -Cat の射, $\eta: (E, \rho) \rightarrow (E', \rho')$ を G -Cat の2-射とする. また, $(P, \psi): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$, $(P', \psi'): \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}'/G$ を標準関手とする. 命題 4.9 より $(P', \psi')\eta: (P', \psi')(E, \rho) \rightarrow (P', \psi')(E', \rho')$ は $\text{Inv}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'/G)$ のなかにある. このとき, 圏の同型 $(P, \psi)^*: \text{Fun}(\mathcal{C}/G, \mathcal{C}'/G) \rightarrow \text{Inv}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'/G)$ を用いて, 次を定義する.

$$\begin{aligned} (E, \rho)/G &:= (P, \psi)^{-1}((P', \psi')(E, \rho)), \\ \eta/G &:= (P, \psi)^{-1}((P', \psi')\eta). \end{aligned}$$

浅芝 秀人

以上の構成は次の図式で考えると分かりやすい.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \begin{array}{c} \xrightarrow{(E,\rho)} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{(E',\rho')} \end{array} & C' \\
 \downarrow (P,\psi) & \searrow (P',\psi')(E,\rho) & \downarrow (P',\psi') \\
 C/G & \begin{array}{c} \xrightarrow{(E,\rho)/G} \\ \Downarrow \eta/G \\ \xrightarrow{(E',\rho')/G} \end{array} & C'/G
 \end{array}$$

$(P',\psi')\eta$ (diagonal arrow from C to C'/G)
 $(P',\psi')(E',\rho')$ (diagonal arrow from C to C'/G)

η/G の具体的な形は、各 $x \in C$ に対して

$$(\eta/G)Px := P'(\eta x) \in (C'/G)^1(((E,\rho)/G)Px, ((E',\rho')/G)Px)$$

で与えられる. このとき, $(E,\rho)/G$ は強い意味の次数保存関手になり, η/G は $G\text{-GrCat}$ の 2-射になる.

補題 6.2. 上の定義により軌道圏構成は 2-関手

$$-/G: G\text{-Cat} \rightarrow G\text{-GrCat}$$

に拡張される.

6.2. スマッシュ 2-関手.

定義 6.3. $G\text{-GrCat}$ の射 $(H,r): B \rightarrow B'$ に対して, $G\text{-Cat}$ の射 $(H,r)\#G: B\#G \rightarrow B'\#G$ を次で定義する.

- 各 $x^{(a)} \in B\#G$ に対して,

$$((H,r)\#G)(x^{(a)}) := (Hx)^{(ar_x)}.$$

- 各 $f \in (B\#G)(x^{(a)}, y^{(b)}) = B^{b^{-1}a}(x, y)$ に対して

$$((H,r)\#G)(f) := H(f).$$

これは, $B'^{r_y^{-1}b^{-1}ar_x}(Hx, Hy) = (B'\#G)((Hx)^{(ar_x)}, (Hy)^{(br_y)})$ の元である.

このとき $(H,r)\#G$ は強い意味の G -同変関手となるので, $(H,r)\#G = ((H,r)\#G, 1): B\#G \rightarrow B'\#G$ は $G\text{-Cat}$ の射になっている.

次に $(H',r'): B \rightarrow B'$ を $G\text{-GrCat}$ の射とし $\theta: (H,r) \rightarrow (H',r')$ を 2-射とする. $\theta\#G: (H,r)\#G \rightarrow (H',r')\#G$ を各 $x^{(a)} \in B\#G$ に対して,

$$(\theta\#G)x^{(a)} := \theta x$$

で定義する. すると $\theta\#G$ は, $G\text{-Cat}$ の 2-射になる.

補題 6.4. 上の定義によりスマッシュ積構成は 2-関手

$$\#G: G\text{-GrCat} \rightarrow G\text{-Cat}$$

に拡張される.

6.3. 主定理.

定理 6.5. 2-関手 $?/G$, $? \# G$ は互いに他の 2-擬逆になり, とともに 2-圏同値である. したがって 2-圏 $G\text{-Cat}$ と $G\text{-GrCat}$ は 2-同値である. より精密にいうと, 4つの 2-自然同型

$$\begin{aligned}\varepsilon: \mathbb{1}_{G\text{-Cat}} &\rightarrow (? \# G)(?/G) \\ \varepsilon': (? \# G)(?/G) &\rightarrow \mathbb{1}_{G\text{-Cat}} \\ \omega: \mathbb{1}_{G\text{-GrCat}} &\rightarrow (?/G)(? \# G) \\ \omega': (?/G)(? \# G) &\rightarrow \mathbb{1}_{G\text{-GrCat}}\end{aligned}$$

は,

$$\varepsilon'_C \varepsilon_C = \mathbb{1}_C, \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_C \varepsilon'_C \cong \mathbb{1}_{(C/G) \# G}, \quad (6.2)$$

$$\omega'_B \omega_B = \mathbb{1}_B, \quad (6.3)$$

$$\omega_B \omega'_B \cong \mathbb{1}_{(B \# G)/G}, \quad (6.4)$$

をみだし, 各 $C \in G\text{-Cat}$ と $B \in G\text{-GrCat}$ に対して, ε'_C は強い意味の G -同変関手で, ω_B は強い意味の次数保存関手である. さらに, ε と ω' は強い意味の 2-自然変換である. したがって特に, $?/G$ は $? \# G$ の強い意味の左 2-随伴である. すなわち, 図式

$$\begin{array}{ccc} G\text{-GrCat} & \xrightarrow{\quad 1 \quad} & G\text{-GrCat} \\ & \searrow ? \# G \quad \uparrow \omega' \quad \nearrow ?/G & \\ & G\text{-Cat} & \xrightarrow{\quad 1 \quad} G\text{-Cat} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow ? \# G \\ \uparrow \varepsilon \\ \searrow ?/G \end{array} \quad (6.5)$$

の pasting は $\mathbb{1}_{? \# G}$ に等しく, 図式

$$\begin{array}{ccc} & G\text{-GrCat} & \xrightarrow{\quad 1 \quad} G\text{-GrCat} \\ & \nearrow ?/G \quad \uparrow \varepsilon \quad \searrow ? \# G & \\ G\text{-Cat} & \xrightarrow{\quad 1 \quad} & G\text{-Cat} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow ? \# G \\ \uparrow \omega' \\ \searrow ?/G \end{array} \quad (6.6)$$

の pasting は $\mathbb{1}_{?/G}$ に等しい.

7. 導来同値

この節では $\mathcal{C}$ を G -圏とする.

定義 7.1. (1) 任意の圏 $\mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{A}$ から $\text{Mod } k$ への反変関手を **右 $\mathcal{A}$ -加群の圏** と言う. それらの全体とそれらの間の自然変換の全体のなす圏を $\text{Mod } \mathcal{A}$ とおく.

(2) 各関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して, $F^*: \text{Mod } \mathcal{B} \rightarrow \text{Mod } \mathcal{A}$ を $F^*M := M \circ F$ で定義する. これを F の **引き上げ** という. F^* は左随伴 F_* をもつ. F_* を F の **押し下げ** という.

定義 7.2. (1) G -圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\text{Mod } \mathcal{C}$ は, G -作用を ${}^a X := X \circ A_a^{-1}$ ($\forall a \in G, X \in \text{Mod } \mathcal{C}$) で定義することにより, また G -圏となる.

(2) $X \in \text{Mod } \mathcal{C}$ は, $X \cong \mathcal{C}(-, x_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}(-, x_n)$ となる有限個の対象 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}$ が存在するとき, **有限生成射影的** とよばれる.

(3) 有限生成射影的 $\mathcal{C}$ -加群のなす, $\text{Mod } \mathcal{C}$ の充満部分圏を $\text{prj } \mathcal{C}$ で表し, $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C})$ で $\text{prj } \mathcal{C}$ における有界復体のなすホモトピー圏を表す. $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C})$ にも自然に成分ごとに G -作用が定義される.

定義 7.3. (1) $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C})$ の充満部分圏 E は次の性質を持つとき, $\mathcal{C}$ に対する**傾部分圏**とよばれる:

- (a) $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C})(U, V[i]) = 0$ がすべての $U, V \in E$ とすべての $i \neq 0$ に対して成り立つ;
- (b) $\mathcal{C}(-, x) \in \text{thick } E$ がすべての $x \in \mathcal{C}$ について成り立つ. ただし, $\text{thick } E$ は E で生成される *thick* 部分圏, すなわち, E を含み, 同型と直和因子をとる操作について閉じている, $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C})$ の最小の充満部分圏である.

(2) $\mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C})$ の傾部分圏 E は, ${}^\alpha U \in E$ がすべての $U \in E$ と $\alpha \in G$ に対して成り立つとき, G -**安定**という.

(3) 2つの圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ は, それらの導来圏 $\mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{C})$ と $\mathcal{D}(\text{Mod } \mathcal{C}')$ が三角圏として同値であるとき, **導来同値**であるという.

定理 7.4. $P: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/G$ を標準被覆関手とすると, P_* は G -前被覆関手

$$P_*: \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{K}^b(\text{prj } \mathcal{C}/G)$$

を導く.

定理 4.8 と 7.4 を用いて証明される次の定理は, 導来同値のための被覆理論における基本定理である.

定理 7.5. $\mathcal{C}$ に対する, G -安定な傾部分圏 E が存在すれば, $\mathcal{C}/G$ と E/G は導来同値である.

上の定理と補題 4.9(2) から次が得られる.

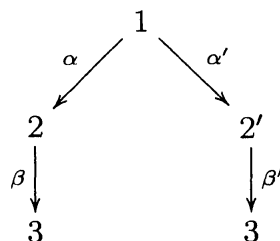
定理 7.6. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ を G -圏とする. $\mathcal{C}$ に対する G -安定な傾部分圏 E と, G -同変な圏同値 $E \rightarrow \mathcal{C}'$ が存在すれば, $\mathcal{C}/G$ と $\mathcal{C}'/G$ は導来同値である.

8. 例

この節では, G を位数 2 の巡回群 $\langle a \mid a^2 = 1 \rangle$ とし, $\mathbb{k}$ を体とする.

例 8.1. $(\mathcal{C}/G) \# G \simeq \mathcal{C}$ の例.

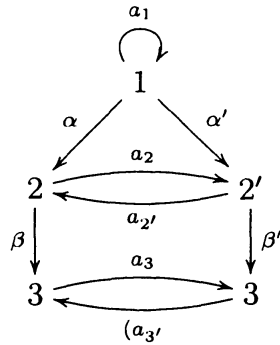
Q を次のクイバーとして, 道圏 $\mathbb{k}Q$ を考える:



a の Q への作用を Q の点の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2' & 3 & 3' \\ 1 & 2' & 2 & 3' & 3 \end{pmatrix} = (2 \ 2')(3 \ 3')$ によって定め, a の $\mathbb{k}G$ への作用をこれの線型化によって定義する. このとき軌道圏 $\mathbb{k}Q/G$ は次のクイバーと関

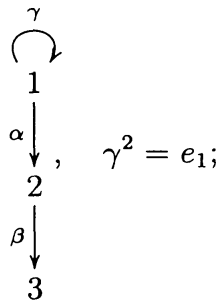
2-CATEGORICAL EXTENSION OF CM-DUALITY

係式で与えられる.

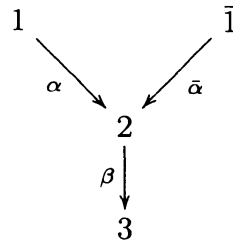


$$a_1^2 = e_1, \left\{ \begin{array}{l} a_2' a_2 = e_2 \\ a_2 a_2' = e_2' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} a_3' a_3 = e_3 \\ a_3 a_3' = e_3' \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} a_2 \alpha = \alpha' a_1 \\ a_2' \alpha' = \alpha a_1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} a_3 \beta = \beta' a_2 \\ a_3' \beta' = \beta a_2' \end{array} \right\}.$$

このときこの圏の**基本圏** B (= 同型類の完全代表系からなる充滿部分圏) は次の左のクイバーと関係式で与えられる. $\text{char } k \neq 2$ のときには, これは次の右のクイバー (関係式なし) で与えられるものと同型になる:



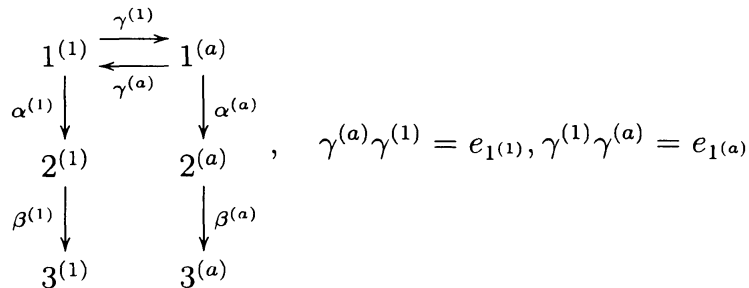
$$\gamma^2 = e_1;$$



$(C/G)\#G$ は C の二重化 $M_2(C)$ (各対象 x に対して, x に同型な対象を 1 つずつ追加したもの) になる. したがって特に, $(C/G)\#G$ と C は圏同値である.

例 8.2. $(B\#G)/G \simeq B$ の例.

上の例に現れた G -次数圏 B を考える ($\text{char } k$ には何も仮定しない). G -次数は, $\deg(\alpha) = \deg(\beta) = 1, \deg(\gamma) = a$ で与えられている. このとき $B\#G$ は次のクイバーと関係式で与えられる:



$$\gamma^{(a)} \gamma^{(1)} = e_{1^{(1)}}, \gamma^{(1)} \gamma^{(a)} = e_{1^{(a)}}$$

一般論によりこれは, 置換 $(1^{(1)} 1^{(a)})(2^{(1)} 2^{(a)})(3^{(1)} 3^{(a)})$ で与えられる自由 G -作用を持つ圏である. $(B\#G)/G$ はまた, B の二重化 $M_2(B)$ となり B と圏同値になる.

例 8.3. $SL(2, 4)$ に対する Broué 予想.

Λ と Π を次のクイバーと関係式で与えられる多元環とする：

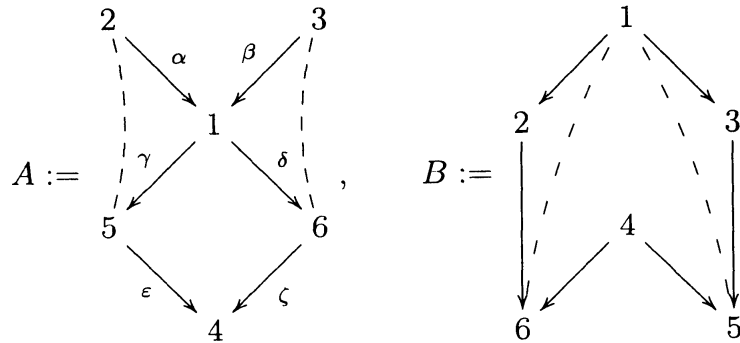
$$\Lambda : 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \xleftarrow{\beta_2} \end{array} 3, \quad \begin{cases} \beta_2\beta_1\alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_1\beta_2\beta_1 \\ \alpha_1\alpha_2 = 0 = \beta_1\beta_2 \end{cases}$$

$$\Pi : \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ \alpha_1 \swarrow & & \nearrow \gamma_1 & & \\ 2 & \xrightarrow{\alpha_2} & 1 & \xrightarrow{\gamma_2} & 3 \\ & \searrow \beta_1 & \nwarrow \gamma_2 & & \\ & & 3 & & \\ & \xrightarrow{\beta_2} & & & \end{array}, \quad \begin{cases} \alpha_2\alpha_1 = \gamma_1\gamma_2 \\ \beta_2\beta_1 = \alpha_1\alpha_2, \\ \gamma_2\gamma_1 = \beta_1\beta_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \beta_1\alpha_1 = 0 = \alpha_2\beta_2 \\ \gamma_1\beta_1 = 0 = \beta_2\gamma_2 \\ \alpha_1\gamma_1 = 0 = \gamma_2\alpha_2 \end{cases}$$

よく知られているように, $\text{char } k = 2$ のとき, Λ は, 群多元環 $kSL(2, 4)$ の主ブロックと森田同値であり, Π は, この主ブロックの Brauer 対応子である. Broué 予想は, Λ と Π が導来同値であると主張している. ここでは, $\text{char } k = 2$ の仮定なしにこれが成り立つことを示す. まず Λ, Π に G -次数を次で定義する: Λ では, $\deg(\alpha_1) = \deg(\beta_1) := a$ その他の矢の次数は 1. Π では, $\deg(\beta_1) = \deg(\beta_2) := a$ その他の矢の次数は 1. $\Lambda \# G$ および $\Pi \# G$ を計算すると, これらは,

$$\Lambda \# G \cong T(A), \quad \Pi \# G \cong T(B) \quad (8.1)$$

の形に表されることが分かる. ただし, A と B は次のクイバーと零関係式で与えられる多元環である:



また, 多元環 R に対して, $T(R)$ は R の $DR := \text{Hom}_k(R, k)$ による自明拡大 $R \ltimes DR$ を表す. (8.1) の同型が強い意味の G -同変同型になるように $T(A)$ および $T(B)$ に G -作用を与えると, この作用はどちらの場合にも $a(x) := x + 3 \pmod{6}$ で定義されることになる. このとき, 主定理により圏同値

$$\Lambda \simeq T(A)/G, \quad \Pi \simeq T(B)/G \quad (8.2)$$

があることに注意しておく. $\mathcal{K}^b(\text{prj } A)$ の充満部分圏 E を次の 6 個の対象で定義する: $T_i := \underline{e_i A}$ ($i = 2, 3, 5, 6$), $T_1 := (\underline{e_2 A \oplus e_3 A} \xrightarrow{(\alpha, \beta)} e_1 A)$, $T_4 := (\underline{e_5 A \oplus e_6 A} \xrightarrow{(\epsilon, \zeta)} e_4 A)$. ただし, 下線はその場所が次数ゼロであることを表す. すると, E は傾部分圏となり, 同型 $\psi: E \rightarrow B$ が, B のクバイーの各点 $i = 1, \dots, 6$ に対して $T_i \mapsto i$ で定義される. これから, Rickard [10] の方法により標準的に $\mathcal{K}^b(\text{prj } T(A))$ の傾部分圏 E' と同型 $\psi': E' \rightarrow T(B)$ が導かれる. 容易に分かるように ψ' が G -同変となるようにとることが

2-CATEGORICAL EXTENSION OF CM-DUALITY

できる。したがって定理 7.6 より $T(A)/G$ と $T(B)/G$ は導来同値になる。よって (8.2) より, Λ と Π は導来同値になる。

REFERENCES

- [1] Asashiba, H.: *Covering theory of categories without free action assumption and derived equivalences*, preprint, arXiv:0807.4706.
- [2] Asashiba, H.: *The 2-categories of G -categories and of G -graded categories are 2-equivalent*, preprint, arXiv:0905.3884.
- [3] Beattie, M.: *Duality theorems for rings with actions or coactions*, J. Algebra **115** (1988), 303–312.
- [4] Borceux, F.: *Handbook of categorical algebra 1 Basic category theory*, Encyclopedia of Math. and its appl., Cambridge Univ. Press, 1994.
- [5] Cibils, C. and Marcos, E.: *Skew category, Galois covering and smash product of a k -category*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (1), (2006), 39–50.
- [6] Cohen, M. and Montgomery, S.: *Group-graded rings, smash products, and group actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 237–258.
- [7] Keller, B.: *On triangulated orbit categories*, Doc. Math. **10** (2005), 551–581.
- [8] Kelly, G. M. and Street, R.: *Review of the Elements of 2-Categories*, Lecture Notes in Mathematics, **420**, Springer-Verlag (1974), 75–103.
- [9] Quinn, D.: *Group-graded rings and duality*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 155–167.
- [10] Rickard, J.: *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure and Appl. Alg. **61** (1989), 303–317.

422-8021 静岡市駿河区大谷 836, 静岡大学理学部数学教室