

Amounts of information and inequalities for the Bayes risk

筑波大・数理物質 大谷内奈穂 (Nao Ohyauchi)

(Graduate School of Pure and Applied Science, University of Tsukuba)

1 はじめに

統計的推定論において、適当な正則条件の下では不偏推定量の分散の限界を与える情報不等式として、Cramér-Rao (C-R), Bhattacharyya の不等式等が知られている。また、正則条件が必ずしも成り立たないような非正則の場合には、位置母数をもつ切断分布族に適用可能な Hammersley-Chapman-Robbins の不等式がよく知られている (Hammersley(1950), Chapman and Robbins(1951))。さらに、分布の密度の台が一方方向に動く母数をもつ一方方向型分布族において、任意の不偏推定量の分散の下限は、母数の任意に固定された値で 0 になることなども示されている (Akahira and Takeuchi(1995))。なお、非正則な場合の情報不等式の導出に際しては、適切な情報量を考えることが重要になる (Akahira(1975))。

一般に、母数空間の任意の 2 点における任意の不偏推定量の分散の凸結合に対する下界は、Vincze(1992) によって、C-R の不等式に基づいて間接的に求められた。最近、その下界は Lagrange 法を用いて直接的に導出され、その下界を達成する推定量も構成された (Akahira and Ohyauchi(2003), Ohyauchi(2004))。また、より一般に、任意の不偏推定量の混合事前確率測度に関する Bayes リスクに対する情報不等式が Vincze(1992) と類似の方法で導出された (大谷内・赤平 (2005))。本論では、その情報不等式による下界に含まれる情報量の漸近的な性質について考察する (Akahira and Ohyauchi(2005))。また、母数空間上に 1 点を固定した場合に、ある条件をみたす推定量の分散についての情報不等式も導出する。さらに、Bayes 型情報不等式について論じた上で、特に、Kiefer(1952) の情報不等式との関連について述べ、左切断分布族に場合にその下界の達成についても考える。

2 一般の Vincze 型情報不等式

確率ベクトル $X := (X_1, \dots, X_n)$ の (σ -有限測度 μ に関する) 同時密度を $f_X(x, \theta)$ ($\theta \in \Theta$) とする。ただし、 $x = (x_1, \dots, x_n)$ とする。また、 $\mathcal{X}$ を X の標本空間、母数空間 Θ 上の 2 つの事前確率測度を Π_1, Π_2 とし、その混合測度を $\Pi_{12} := p\Pi_1 + q\Pi_2$ ($0 < p < 1, q = 1 - p$) とする。また、 θ の実数値関数 $g(\theta)$ の推定量 $\hat{g}(X)$ の 2 乗損失によるリスクを $R(\theta, \hat{g}) := E_\theta [\{\hat{g}(X) - g(\theta)\}^2]$ とする。このとき、事前確率測度 Π_{12} に関する推定量 $\hat{g}(X)$ の Bayes リスクは

$$r(\Pi_{12}, \hat{g}) := \int_{\Theta} R(\theta, \hat{g}) d\Pi_{12}(\theta) \quad (2.1)$$

になる。また、

$$\int_{\Theta} g(\theta) d\Pi_i(\theta) = g_i \quad (i = 1, 2)$$

で $g_1 \neq g_2$ とする. ここで, $\hat{g}$ を $g(\theta)$ の不偏推定量とし,

$$f_p(\mathbf{x}) := \int_{\Theta} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta) d\Pi_{12}(\theta) = p \int_{\Theta} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta) d\Pi_1(\theta) + q \int_{\Theta} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta) d\Pi_2(\theta)$$

とする. そして, p の推定量として,

$$\hat{p}(\mathbf{X}) := \{\hat{g}(\mathbf{X}) - g_2\} / (g_1 - g_2)$$

を考える. このとき, $\hat{p}$ は密度 f_p の下で p の不偏推定量, すなわち, 任意の p ($0 < p < 1$) について $E_p(\hat{p}) = p$ となり, また, f_p の下での $\hat{p}$ の分散は

$$V_p(\hat{p}) = V_p(\hat{g}) / (g_1 - g_2)^2 \quad (2.2)$$

になる. 一方, $V_i := \int_{\Theta} V_{\theta}(\hat{g}) d\Pi_i(\theta)$ ($i = 1, 2$) とおくと, f_p の下での $\hat{g}$ の分散は

$$V_p(\hat{g}) = pV_1 + qV_2 + p \int_{\Theta} \{g(\theta) - g_1\}^2 d\Pi_1(\theta) + q \int_{\Theta} \{g(\theta) - g_2\}^2 d\Pi_2(\theta) + pq(g_1 - g_2)^2 \quad (2.3)$$

となる. このとき, Cramér-Rao の不等式から

$$V_p(\hat{p}) \geq 1/E_p [\{(\partial/\partial p) \log f_p(\mathbf{X})\}^2] =: 1/I_p \quad (2.4)$$

となる. ただし,

$$I_p = \int_{\mathcal{X}} \frac{\{\int_{\Theta} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta) d\Pi_1(\theta) - \int_{\Theta} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta) d\Pi_2(\theta)\}^2}{p \int_{\Theta} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta) d\Pi_1(\theta) + q \int_{\Theta} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta) d\Pi_2(\theta)} d\mu(\mathbf{x})$$

とする.

注意 特に, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, $\Pi_1(\{\theta_1\}) = 1$, $\Pi_2(\{\theta_2\}) = 1$ とすると

$$I_p = E_p \left[\left\{ \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_1) - f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_2)}{p f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_1) + q f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_2)} \right\}^2 \right]$$

となる. さらに, $\theta_2 = \theta_1 + \Delta$ とすれば, Δ が十分小さいとき

$$I_p \approx \Delta^2 E_{\theta_1} \left[\left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_1)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_1)} \right\}^2 \right] = \Delta^2 I_{\mathbf{X}}(\theta_1)$$

となる. ただし, $I_{\mathbf{X}}(\theta_1)$ は Fisher 情報量とする.

このとき, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) から次の定理と系が成立する (大谷内・赤平 (2005)).

定理 1 $g(\theta)$ の任意の不偏推定量 $\hat{g}$ の Bayes リスクに関する情報不等式

$$r(\Pi_{12}, \hat{g}) \geq (g_1 - g_2)^2 \left(\frac{1}{I_p} - pq \right) - (p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2) =: B_{12}(p)$$

が成立する. ただし, 各 $i = 1, 2$ について σ_i^2 は $g(\theta)$ の事前分散, つまり

$$\sigma_i^2 := \int_{\Theta} \{g(\theta) - g_i\}^2 d\Pi_i(\theta)$$

とする.

系 Bayes リスクに対する下界 $B_{12}(p)$ について, 次の不等式

$$\sup_{\Pi_1, \Pi_2: \int_{\Theta} g(\theta) d\Pi_i(\theta) = g_i \ (i=1,2)} B_{12}(p) \geq B_{12}^*(p) := (g_1 - g_2)^2 \left(\frac{1}{I_p} - pq \right) \geq B_{12}(p)$$

が成立する.

定理 1 から, 下界は情報量 I_p に依存することが分かるので, ここからは情報量 I_p の値を具体的に求めることを考える. いま, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ を次の条件 (C1), (C2) を満たす (ルベーク測度に関する) 密度 $f(x - \theta)$ ($x \in \mathbf{R}^1; \theta \in \Theta = \mathbf{R}^1$) に従う実確率変数列とする.

(C1) $f(x) > 0$ ($a < x < b$); $f(x) = 0$ (その他) で, f は区間 (a, b) 上で 2 回連続微分可能である.

(C2) $A := f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $B := f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ で $0 < A, B < \infty$ である.

また, 各 $i = 1, 2$ について事前確率測度 Π_i のルベーク測度に関する密度を π_i とし, $\pi_{12} := p\pi_1 + q\pi_2$ とする. また, 密度 π_{12} の下での情報量として, $i_p := E_{\pi_{12}}[\{(\partial/\partial p) \log \pi_{12}\}^2]$ とする. ここで, $x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$, $x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ として, $\underline{\theta} := x_{(n)} - b$, $\bar{\theta} := x_{(1)} - a$ とし, $G_i(t) := \int_{-\infty}^t e^{(A-B)n\theta} d\Pi_i(\theta)$ ($t \in \mathbf{R}^1$) とすると,

$$I_p \approx E_p \left[\left\{ \frac{(G_1(\bar{\theta}) - G_1(\underline{\theta})) - (G_2(\bar{\theta}) - G_2(\underline{\theta}))}{p(G_1(\bar{\theta}) - G_1(\underline{\theta})) + q(G_2(\bar{\theta}) - G_2(\underline{\theta}))} \right\}^2 \right] \quad (2.5)$$

となる. いま, $(n(\underline{\theta} - \theta), n(\bar{\theta} - \theta))$ の漸近 j.p.d.f. から, 変数変換によって $(S, T) = (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ の漸近 j.p.d.f. は, n が大きいとき

$$f_{S,T}^{\theta}(s, t) = \begin{cases} n^2 AB \exp\{-An(t - \theta) + Bn(s - \theta)\} & (s < \theta < t, 0 < t - s < -a + b) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる. よって, 大きい n について

$$\begin{aligned} f_p(s, t) &= \int_{\Theta} f_{S,T}^{\theta}(s, t) d\Pi_{12}(\theta) \\ &= \begin{cases} n^2 AB e^{-Ant+Bns} \{p(G_1(t) - G_1(s)) + q(G_2(t) - G_2(s))\} & (0 < t - s < -a + b) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるので, (2.5) から

$$I_p \approx \int \int_{0 < t-s < -a+b} \frac{\{(G_1(t) - G_1(s)) - (G_2(t) - G_2(s))\}^2}{p(G_1(t) - G_1(s)) + q(G_2(t) - G_2(s))} n^2 A B e^{-A n t + B n s} dt ds$$

となる. ここで, $u = n(t-s)$, $z = s$ とすると, n が十分大きいとき, $G_i(z + (u/n)) \approx G_i(z) + (u/n)e^{(A-B)nz}\pi_i(z)$ より

$$I_p \approx \int_0^{n(-a+b)} A B u e^{-A u} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\pi_1(z) - \pi_2(z)\}^2}{p\pi_1(z) + q\pi_2(z)} dz \approx \frac{B}{A} i_p$$

を得る.

定理 2 条件 (C1), (C2) の下で, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$I_p \approx \frac{B}{A} i_p \quad (2.6)$$

である.

例 1 $f(x - \theta)$ が一様分布 $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ の p.d.f. のとき, $A = B = 1$ より, (2.6) から $I_p \approx i_p$ ($n \rightarrow \infty$) となる. ここで, 特に $\varepsilon > 0$ として

$$\begin{aligned} \pi_1(\theta) &= \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(\theta), \\ \pi_2(\theta) &= \frac{1}{2\varepsilon^2} (\theta + \varepsilon) \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(\theta) \end{aligned}$$

とすれば,

$$i_p = \begin{cases} \frac{1}{3} & (q = 0), \\ -\frac{1}{q^2} + \frac{1}{2q^3} \log \frac{1+q}{p} & (q \neq 0) \end{cases}$$

と具体的に求めることができる. ただし, $\chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}$ は定義関数とする.

例 2 $f(x - \theta)$ が切断指数分布の p.d.f. のとき, つまり

$$f(x - \theta) = \begin{cases} c e^{-(x-\theta)} & (\theta < x < \theta + 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする. ただし, $c := e/(e-1)$ とする. このとき, $A = c$, $B = ce^{-1}$ より, (2.6) から $I_p \approx e^{-1} i_p$ となる.

3 Bayes 型情報不等式

第 2 節の設定の下で, Θ 上に θ_0 を任意に固定し, $\Pi_1(\{\theta_0\}) = 1$, $\Pi_2 = \Pi$ とし

$$h_\Pi(\mathbf{x}) := \int_{\Theta} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \theta) d\Pi(\theta), \quad \eta := \int_{\Theta} g(\theta) d\Pi(\theta)$$

とし,

$$J_{\Pi}(\theta_0) := E_{\theta_0} \left[\left\{ \frac{h_{\Pi}(\mathbf{X})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_0)} \right\}^2 \right] - 1 < \infty$$

とする. そして $0/0 = 1$ とする. また $g(\theta)$ の推定量 $\hat{g} = \hat{g}(\mathbf{X})$ が, 条件 (i) $E_{\theta_0}(\hat{g}) = g(\theta_0) =: g_0$, (ii) $E_{h_{\Pi}}(\hat{g}) = \eta$ を満たすとする. ここで $\hat{g}$ が $g(\theta)$ の不偏推定量ならば, (i), (ii) は成り立つことに注意.

定理 3 条件 (i), (ii) を満たす推定量 $\hat{g}$ の分散について

$$\min_{\hat{g}: (i), (ii)} V_{\theta_0}(\hat{g}) = V_{\theta_0}(\hat{g}_{\Pi}^*) \quad (3.1)$$

が成り立つ. ただし

$$\hat{g}_{\Pi}^* := g_0 + \frac{g_0 - \eta}{J_{\Pi}(\theta_0)} \left\{ 1 - \frac{h_{\Pi}(\mathbf{X})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_0)} \right\}$$

とする.

証明については, Lagrange 法を用いて直接的に求めればよい. また, (3.1) の左辺を具体的に計算することにより, 次の系が成り立つ.

系 条件 (i), (ii) を満たす推定量 $\hat{g}$ について

$$V_{\theta_0}(\hat{g}) \geq (g_0 - \eta)^2 / J_{\Pi}(\theta_0)$$

が成り立つ. さらに

$$\min_{\hat{g}: \text{unbiased for } g} V_{\theta_0}(\hat{g}) \geq (g_0 - \eta)^2 / J_{\Pi}(\theta_0). \quad (3.2)$$

特に $\theta_1 \neq \theta_0$ とし, $\Pi(\{\theta_1\}) = 1$ とすると $h_{\Pi}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_1)$ となり, $\eta = g(\theta_1) =: g_1$ となるから

$$J_{\Pi}(\theta_0) = E_{\theta_0} \left[\left\{ \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_1)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_0)} \right\}^2 \right] - 1$$

となり, (3.2) から $g(\theta)$ の不偏推定量 $\hat{g}$ について $V_{\theta_0}(\hat{g}) \geq (g_0 - g_1)^2 / J_{\Pi}(\theta_0)$ を得る. これは Chapman–Robbins 型の不等式である. なお, これに関連して, 非 Bayes 的アプローチによるこの不等式の拡張も考えられている (Koike and Komatsu(2006)).

次に, $g(\theta) = \theta$ とし, $\hat{g}(\mathbf{X})$ を θ の不偏推定量 $\hat{\theta}$ とする. さらに, $\Theta_0 := \{h | \theta_0 + h \in \Theta\}$ とし, Π を Θ_0 上の事前確率測度とする. このとき,

$$\begin{aligned} g_0 &= g(\theta_0) = \theta_0, \\ h_{\Pi}(\mathbf{x}) &= \int_{\Theta_0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_0 + h) d\Pi(h), \\ \eta &= E_{h_{\Pi}}(\hat{\theta}) = \theta_0 + \int_{\Theta_0} h d\Pi(h) \end{aligned}$$

となり, (3.2) より,

$$V_{\theta_0}(\hat{\theta}) \geq \sup_{\Pi} \left\{ \int_{\Theta_0} h d\Pi(h) \right\}^2 / J_{\Pi}(\theta_0)$$

となる. これは Kiefer(1952) による情報不等式であり, この下界の達成については, 一様分布と指数分布の場合には適当な Π を選ぶことによって, θ の UMVU 推定量が達成することが示されている.

そこで, 一般に, 左切断分布族の場合に Kiefer の情報不等式とその下界を求め, その達成について考える. まず, $X_1, \dots, X_n$ をたがいに独立に, いずれも p.d.f.

$$p(x, \theta_0) = \begin{cases} C(\theta_0)e^{S(x)} & (x > \theta_0), \\ 0 & (x \leq \theta_0) \end{cases} \quad (3.3)$$

をもつ左切断分布に従う確率変数とする. ただし, $\theta_0 \in \mathbf{R}^1$, $C(\theta_0) = 1/\int_{\theta_0}^{\infty} e^{S(x)} dx$ とする. このとき, θ_0 の UMVU 推定量は存在する (Voinov and Nikulin(1993)). ここで, $p(x, \theta_0 + h) > 0$ ならば $p(x, \theta_0) > 0$ と仮定すれば, $h > 0$ となる. いま

$$\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_0)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_0 + h)} = \left\{ \frac{C(\theta_0)}{C(\theta_0 + h)} \right\}^n, \quad h > 0$$

となるから, $i = 0, 1$ について

$$D_{i+}(\theta_0) := \int_0^{\infty} h^i \left\{ \frac{C(\theta_0)}{C(\theta_0 + h)} \right\}^n dh$$

とおいて, 事前密度を

$$\frac{d\Pi(h)}{dh} = \left\{ \frac{C(\theta_0)}{C(\theta_0 + h)} \right\}^n / D_{0+}(\theta_0), \quad h > 0$$

とする. このとき

$$\begin{aligned} \int_{\Theta_0} h d\Pi(h) &= \int_0^{\infty} \left[h \left\{ \frac{C(\theta_0)}{C(\theta_0 + h)} \right\}^n / D_{0+}(\theta_0) \right] dh, \\ h_{\Pi}(\mathbf{x}) &= \int_{\Theta_0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \theta_0 + h) d\Pi(h) = \frac{C^n(\theta_0)}{D_{0+}(\theta_0)} e^{\sum_{i=1}^n S(x_i)} (x_{(1)} - \theta_0) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} J_{\Pi}(\theta_0) + 1 &= E_{\theta_0} \left[\left\{ \frac{h_{\Pi}(\mathbf{X})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \theta_0)} \right\}^2 \right] \\ &= E_{\theta_0} \left[(X_{(1)} - \theta_0)^2 \right] / D_{0+}^2(\theta_0) \end{aligned}$$

となる. ただし, $x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$, $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ とする. よって, Kiefer の情報不等式は, θ_0 の任意の不偏推定量 $\hat{\theta}$ について

$$V_{\theta_0}(\hat{\theta}) \geq \frac{D_{1+}^2(\theta_0)}{E_{\theta_0}[(X_{(1)} - \theta_0)^2] - D_{0+}^2(\theta_0)} =: B_n(\theta_0) \quad (3.4)$$

になる. この情報不等式の下界の達成については, 一様分布, 指数分布の場合の他に次の例がある.

例 3 $X_1, \dots, X_n$ をたがいに独立に p.d.f.

$$p(x, \theta_0) = \begin{cases} \alpha \theta_0^\alpha / x^{\alpha+1} & (x > \theta_0), \\ 0 & (x \leq \theta_0) \end{cases}$$

をもつ Pareto 分布に従う確率変数とする. ただし, $\alpha > 0$ で既知とし, $n > 2/\alpha$, $\theta_0 > 0$ とする. このとき, (3.3) において

$$C(\theta_0) = \alpha \theta_0^\alpha, \quad S(x) = -(\alpha + 1) \log x$$

になり,

$$D_{0+}(\theta_0) = \frac{\theta_0}{n\alpha - 1}, \quad D_{1+}(\theta_0) = \frac{\theta_0^2}{(n\alpha - 1)(n\alpha - 2)} \quad (3.5)$$

になる. また

$$E_{\theta_0}[(X_{(1)} - \theta_0)^2] = \frac{2\theta_0^2}{(n\alpha - 1)(n\alpha - 2)} \quad (3.6)$$

となり, (3.4) の下界は, (3.5), (3.6) より

$$B_n(\theta_0) = \frac{\theta_0^2}{n\alpha(n\alpha - 2)} \quad (3.7)$$

になる.

一方, $X_{(1)}$ は完備十分統計量であるから,

$$\hat{\theta}^* = \frac{n\alpha - 1}{n\alpha} X_{(1)}$$

は θ_0 の UMVU 推定量となり, またその分散は

$$V_{\theta_0}(\hat{\theta}^*) = \frac{\theta_0^2}{n\alpha(n\alpha - 2)}$$

となり, $\hat{\theta}^*$ は下界 (3.7) を達成することが分かる.

なお, 上記の議論は右切断分布族の場合にも同様にして展開できる.

4 おわりに

本論において、分布が非正則な場合について、一般の Vincze 型の情報不等式の下界に含まれる情報量の漸近的性質を調べた。また、Bayes 型の情報不等式については、Kiefer の結果を一般の左切断分布族の場合に拡張した。しかし、密度関数の形が複雑になると、本論で導出した Bayes 型の情報不等式は適用できないこともある。今後、さらに適切な情報量を導入して情報不等式について考える余地がある。

参考文献

- Akahira, M. (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE*, **22**, 8–26.
- Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2003). An information inequality for the Bayes risk applicable to non-regular cases. *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci.*, **1334**, Kyoto University, 183–191.
- Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2005). A Bayesian view of the Hammersley-Chapman-Robbins type inequality. Submitted for publication.
- Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation*. Lecture Notes in Statistics 107, Springer, New York.
- Chapman, D. G. and Robbins, H. (1951). Minimum variance estimation without regularity assumptions. *Ann. Math. Statist.*, **22**, 581–586.
- Hammersley, J. M. (1950). On estimating restricted parameters. *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **12**, 192–240.
- Kiefer, J. (1952). On minimum variance estimators. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 627–629.
- Koike, K. and Komatsu, K. (2006). Comparison of some bounds in estimation theory. Submitted for publication.
- Ohyauchi, N. (2004). The Vincze inequality for the Bayes risk. *J. Japan Statist. Soc.*, **34**, 65–74.
- 大谷内奈穂, 赤平昌文 (2005). Lower bounds for the Bayes risk of unbiased estimators in non-regular cases. 京都大学 数理解析研究所講究録 **1439**, 247–253.
- Vincze, I. (1992). On nonparametric Cramér-Rao inequalities. In: *Order Statistics and Nonparametrics: Theory and Applications* (P. K. Sen and I. A. Salama, eds. Elsevier Science Publishers B. V.), 439–454.
- Voinov, V. G. and Nikulin, M. S. (1993). *Unbiased Estimators and Their Applications, Vol. 1: Univariate Case*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.