

34. 相分離過程における Langer-Bar' on-Miller 近似 でのスケイリング則

京大・教養 富田博之

古い話になるが、スピノダル分解に対する Langer-Bar' on-Miller (LBM) 方程式¹⁾

$$\partial S_t(q) / \partial t = q^2 [T - (q^2 + r(t)) S_t(q)] \quad (1)$$

に対し、筆者は、後期段階では秩序パラメタ s が飽和 ($= \pm 1$) しており、和則

$$\int S_t(q) 4\pi q^2 dq = \text{const.} = 1 \quad (2)$$

が成立つとして、(1) のパラメタ $r(t)$ を self-consistent に求めることにより、LBM とほぼ同じ結果を得た²⁾。いずれの場合も平衡状態で $S_{eq}(q) = T/q^2$ しか得られないという欠点があるが、これは簡単に手直しできるし、スケイリング形を考えている限りでは、この部分は洗い落されるので、気にする必要はない。問題はピーク波数 $q_m(t) \sim t^{-3}$ である。数値計算の範囲では $a \sim 1/5$ が得られているが、解析してみると a は一定ではなく、最終的には $a = 1/4$ であることがわかる^{3, 4)}。得られる結論にこのような欠点があるにせよ、LBM 近似は簡潔でしかも的を射ており、捨てがたい魅力がある。

そこで、スケイリング段階ではランダムでシャープな界面が形成されているとして、LBM 近似の意味を検討しなおしてみる。(1) の $r(t)$ は相関関数の hierarchy 連鎖に対し

$$\langle s_1^3 s_2 \rangle \sim \langle s_1 s_2 \rangle \quad (3)$$

$$\langle s_1 s_2 \rangle - \langle s_1^3 s_2 \rangle = -r(t) \langle s_1 s_2 \rangle \quad (4)$$

と近似して得られている。(4) の差は、 r_1, r_2 とともに界面上にある時に (3) (の等号) が成立たないことによると考えれば、界面の密度を $A(t)$ として

$$r(t) \sim -A(t)^2 \quad (5)$$

であることがわかる。実際、 $|r_2 - r_1| \sim \infty$ では

$$\langle s_1(1-s_1^2)s_2 \rangle \sim [\langle s(1-s^2) \rangle / \langle s \rangle] \langle s_1 s_2 \rangle$$

と近似できるが、[] の部分は界面の平均曲率 H の界面全体についての平均 $\bar{H}$ を用いて

$$[\dots] = -2A\bar{H}/\kappa^2 \langle s \rangle$$

と表される。 κ は界面の厚みの逆数で、ここでは半巨視的な界面を考えていることから、 $\kappa \gg A$ と仮定してある。ここで、長さを特徴づける量が A^{-1} だけであるような系では H についても

$$H/\langle s \rangle \sim A$$

と考えなければならないが、例えばガウス確率場から形成されるランダムな界面では、具体的に比を計算でき、このことが示される。

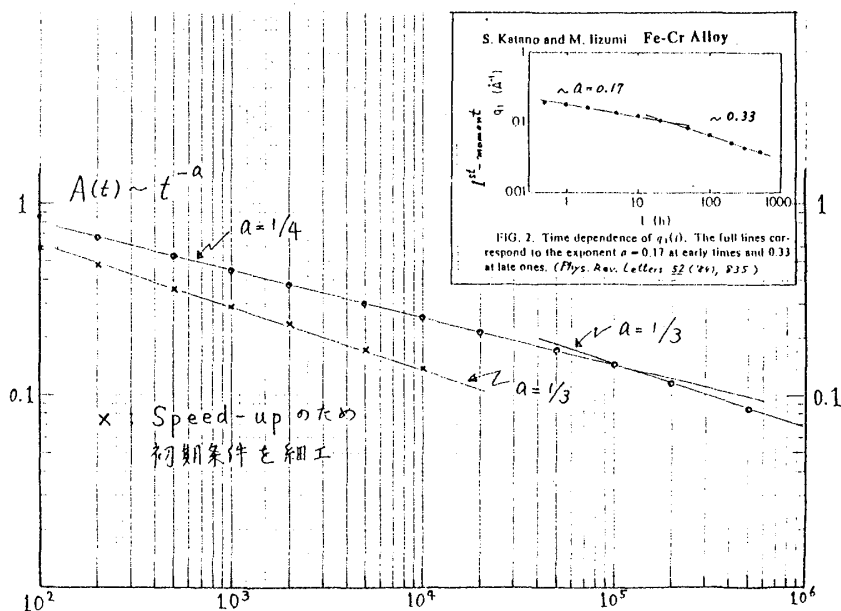
さらに重要なのは（むしろ今回の結論にとっては、このことだけでよい）、 $r(t)$ あるいは、 $A(t)$ を決めるのに和則 (2)，すなわち、

$$\int S_t(q) 4\pi q^2 dq = \langle s^2 \rangle_t = 1 \quad (6)$$

は不適當であって、界面の面積（密度） A の時間依存性を考慮している段階では、蒸発－凝縮の起っている界面の厚み部分の寄与を考慮して

$$1 - \langle s^2 \rangle_t \sim A(t)/\kappa \quad (7)$$

とすべきである。これは Lifshitz-Slyozov 理論⁵⁾で、 $t^{1/3}$ 則を導くのに功妙な役割を果たして



いる時間に依存する過飽和度の導入に相当する。以上により、適当に比例定数を規格化（たとえば、 κ は $= 1$ とし、 $t = 0$ で線型理論に一致するように要請すれば決まる。）して再び簡単な self-consistent-Equation

$$\partial S_t(q) / \partial t = q^2 [T - (q^2 - A(t)^2) S_t(q)] \quad (8)$$

$$A(t) = 1 - \int S_t(q) 4\pi q^2 dq \quad (9)$$

が得られる。スケイリング形の存在を仮定すれば、特性波数は $A(t)$ であり

$$\dot{A}(t) \sim -A(t)^4, \quad \therefore A(t) \sim t^{-1/3} \quad (10)$$

が得られ、界面動力学による結論⁶⁾と一致する。図は数値計算によりこれを確かめたものである。（○印） $t \sim 10^5$ で $1/4$ から $1/3$ へクロスオーバーが起こっていると見れないこともないが、断定するには少し計算が粗すぎる。そこで、結果的に速度を速めるような初期条件（ A/κ を小さくとり）について計算しなおしたのが図の×印で、 $1/3$ 則が成り立っているとみてよいであろう。

文 献

- 1) J. S. Langer, M. Bar-on and H. D. Miller, Phys. Rev. A11 (1975), 1417.
- 2) H. Tomita, Prog. Theor. Phys. 59 (1978), 1116.
- 3) 富田, 基研研究会「非線型緩和過程の統計物理」(1982)
- 4) G. F. Mazenko and M. Zannetti, Phys. Rev. Letters, 53 (1984), 2106.
- 5) I. M. Lifshitz and V. V. Slyozov, J. Phys. Chem. Solids 19 (1961), 35.
- 6) K. Kawasaki and T. Ohta, Physica, A118 (1983), 175.