

学 位 審 査 報 告 書

(ふりがな) 氏 名	みずの たかし 水野 高志
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) ON A GENERALIZATION OF MASSEY PRODUCTS (マッセイプロダクトの一般化について)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 河野 明 教授 岸本 大祐 講師 浅岡 正幸 准教授

(論文内容の要旨)

Massey 積とは与えられた微分代数のある関係をみたすコホモロジー類 3 つから新しいコホモロジー類を構成するものであり、コホモロジーやコホモロジー作用素などからは得られない微分代数の高次の情報を得るための 2 次的演算と呼ばれるもののひとつである。Massey 積は Kraines により 3 次以上の高次演算に一般化され、さらに、May によりコホモロジー類をコホモロジー類を成分とする行列に置き換えることで行列値の高次演算へ一般化されている。

本論文では Massey 積のさらなる一般化について考察されている(ホモロジー的度数付けを微分代数に行っているがコホモロジー的度数付けとの本質的な違いはない)。まず hammock というある種の有向グラフを考え、その各辺にコホモロジー類をのせることによりそのコホモロジー類がみたすべき関係式をあらわす。次に hammock の有向パスの集合を用いて上の関係式を与える微分代数の元を指定する。最後にこの元をまた有向パスの集合を用いて足し合わせる。こうしてできた微分代数の元はコサイクルとなることが証明され、それが代表するコホモロジー類を与えられた hammock とその辺にのせられている元の hammock Massey 積と呼んでいる。古典的な Massey 積や Kraines, May により一般化された Massey 積は非常に単純なかたちをした hammock に対応する hammock Massey 積により得られる。さらに、hammock Massey 積は次数の違う高次演算たちのみたす関係から新しい高次演算を生み出すことができ、Kraines, May による線型的な一般化では得られなかった非線型な高次演算が無数に得られる。

hammock は有向グラフという幾何学的対象なため直感的な操作、例えば、重ね合わせや切断ということが可能である。hammock Massey 積は非常に複雑なものであるが、これらのグラフの操作を用いて hammock Massey 積の基本公式である線型性、結合性、Jacobi 恒等式が簡潔かつ効果的に表現されている。これらの基本公式は古典的な Massey 積や Kraines, May により一般化された Massey 積の基本公式に対応している。

高次演算においては indeterminacy が発生するため、その大きさを測ることが重要となる。hammock Massey 積の indeterminacy の決定は一般に困難であるが、上に挙げたようなグラフの操作によりその大きさの上限と下限が与えられている。

(論文審査の結果の要旨)

申請者は hammock というある種の有向グラフを用いることによる Massey 積の一般化について考察している. 実際には hammock の各辺にコホモロジー類をのせることにより, これらのコホモロジー類のみたす関係式をこの hammock が表していると考え, 有向パスの集合を用いた足し合わせにより新しいコホモロジー類を構成している. このコホモロジー類を与えられた hammock とその辺にのせられたコホモロジー類の hammock Massey 積と呼んでいる. hammock Massey 積は Kraines や May による線型的な Massey 積の一般化では得られなかった非線型な Massey 積を含んでおり, 非常に大きなクラスの高次演算を実現している. hammock Massey 積の構成は Massey 積の一般化だけではなく他の高次演算, 例えば戸田ブラケットなどへも適応することが可能であり, 様々な応用があると考えられる.

一般に高次演算においてその基本公式を表現することは困難である. しかし, 申請者はグラフの重ね合わせや切断といった幾何学的な操作と hammock Massey 積との関係性に着目することにより hammock Massey 積の基本公式である線型性, 結合性, Jacobi 恒等式を簡潔に表現し, 証明している. 実際, 見かけ上は古典的な Massey 積と同様の公式を与えられている. また, 高次演算を考える際常に問題となる indeterminacy の評価もこのようなグラフの操作により与えている.

これらの結果は単に微分代数における高次演算に対するものではなく, もっと一般の圏における高次作用素に対しても成り立つと考えられ, hammock Massey 積の構成は高次作用素の構成における普遍的なものであると言える.

以上の結果は位相幾何学のみならず様々な数学の分野において極めて重要なものである. したがって本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める. また, 論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果, 合格と認めた.