

Topological algebra の スペクトルについて

東教大・理 神 保 敏 弥

§ 1. 序

topological algebra E のスペクトル $S(E)$ が, どのようになっているかを調べることは一つの問題であった。ここでは [5], [7], [8], [9] を中心として, 単位元を持つ Banach algebra のスペクトルの元の特徴や locally convex algebra, 正則関数の algebra, ε -product のときなどのスペクトルについて述べる。

§ 2. Banach algebra の multiplicative linear functional

A を単位元をもつ可換複素 Banach algebra とし, A' を A の dual space, $S(A)$ を A のすべての multiplicative linear functionals の集合 [3], A^{-1} を A の可逆元の全体と

ある. $x \in A$ のスペクトルを $\Delta(x)$ とする, 即ち $\Delta(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \notin A^{-1}\}$ である.

$f \in S(A)$ の一つの良く知られた性質は, $\{x \in A \mid f(x) = 0\}$ が A の maximal ideal であり, M が A の maximal ideal ならば, 或る $g \in S(A)$ が存在して, $M = \{x \in A \mid g(x) = 0\}$ と表わせる, ということである. 最近, $f \in S(A)$ の別の性質を Kahane と Zelazko [7] は, x のスペクトルを用いて, 次のように表わした.

定理 1. A が単位元をもつ可換複素 Banach algebra ならば, $f \in S(A) \iff$ (1) $f \in A'$ (2) $f(x) \in \Delta(x), \forall x \in A$.

証明. $\Rightarrow$ は明らか. $\Leftarrow$ を示す: (2) より $f(e) = 1, x \in A$ に対し $\varphi(\lambda) = f(\exp(\lambda x))$ とおくと, $\varphi(\lambda)$ は整関数である. 又 (2) より $\varphi(\lambda) \neq 0$ であるから, ある整関数 $\gamma(\lambda)$ で $\varphi(\lambda) = \exp(\gamma(\lambda))$ と表わせる. $|\varphi(\lambda)| \leq \|f\| \exp(|\lambda| \|x\|)$ より, ある $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $\gamma(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$ とかけ, $\varphi(0) = 1$ より $\gamma(\lambda) = \alpha\lambda$ となる. したがって,

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n!} \lambda^n$$

$\therefore f(x^n) = f(x)^n, n=2$ のときから $f(xy) = f(x)f(y)$ を得る.

注意. 定理 1 は real Banach algebra に対しては, 正し

くない。又定理1は次の定理と同値である： X が A の sub-space ならば、 X が maximal ideal $\Leftrightarrow \text{codim } X = 1$, $X \subset A - A^{-1}$.

系1. X は compact Hausdorff space とし、 $A \subset C(X)$ の subalgebra とする、かつ $1 \in A$. μ は X 上の Radon measure で $\forall x \in X$ に対して、ある $p_x \in X$ が存在して、 $\int_X x d\mu = x(p_x)$ とかけるならば

$$\int_X xy d\mu = \int_X x d\mu \int_X y d\mu, \forall x, y \in A.$$

証明. $f(x) = \int_X x d\mu$ とおき、 $f \in A$ から supremum norm に関する completion $\bar{A}$ に拡張し、 $\bar{A}$ に対する定理1を用いればよい.

系2. A_1, A_2 はそれぞれ単位元をもつ可換 Banach algebra とする、 A_2 は semi-simple とする. T は A_1 から A_2 の中への有界線形写像で $\Delta(Tx) \subset \Delta(x), \forall x \in A_1$ を満たすものとする. $\Rightarrow Txy = TxTy, \forall x, y \in A_1$

証明. $f \in S(A_2)$ に対して $F(x) = f(Tx), \forall x \in A_1$ とおくと $F \in A_1'$ かつ $F(x) \in \Delta(x)$ より $F \in S(A_1)$. 故に $f(Txy) = f(Tx)f(Ty) = f(TxTy)$. f の任意性と A_2 の semi-simple より結論を得る.

注意. 系2は、 A_2 が semi-simple を欠くと正しくない.

§3. 正則関数の algebra のスペクトル

この節では, Riemann domain と Stein space の正則関数の algebra の場合について述べる.

対 (X, ρ) が Riemann domain とは, (1) X が Hausdorff space (2) $\rho: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ は 局所位相同型 のときを言う.

$\mathcal{O}_X$ を Riemann domain (X, ρ) 上の 正則関数の algebra, $S(\mathcal{O}_X)$ を $\mathcal{O}_X$ の スペクトル とする. $f \in \mathcal{O}_X$ に対して $\hat{f}(R) = R(f)$, $R \in S(\mathcal{O}_X)$ によって $\hat{f}$ を定義し, $R_x(f) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{O}_X$ によって R_x を定める. 次の定理は, スペクトル $S(\mathcal{O}_X)$ に 自然な Riemann domain の構造を導入できることを言っている.

定理2. (X, ρ) を separable Riemann domain とし, $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_n)$ とおく. $\Rightarrow (S(\mathcal{O}_X), \hat{\rho})$ には 以下の性質を持つ Riemann domain の構造を与えることができる:

- (1) 写像 $g: X \rightarrow R_x$ が holomorphic,
- (2) $E \subseteq g(X)$ と交わる $S(\mathcal{O}_X)$ の 成分の合併とするとき,
 $\hat{g}: \mathcal{O}_E \rightarrow \mathcal{O}_X$ が isomorphism,
- (3) (Y, ρ') が Riemann domain で $\hat{\rho}: \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ が isomorphism であるような 正則写像 $\psi: X \rightarrow Y$ が存在するならば, $g = \psi \circ \rho$ であるような 正則写像 $\psi: Y \rightarrow S(\mathcal{O}_X)$ が存在する. (cf, [5]).

証明. 略. (Complex analytic manifold については cf. [1])

次に $(X, \mathcal{O})$ を analytic space とするとき X が Stein space とは (1) X が countable topology をもつ (2) X が holomorphically convex (3) $x \in X$ に対して, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_x$ が存在して $\text{rank}_x(f_1, \dots, f_n) = \dim_t x X$ ($\dim_t x$ は tangential dimension) (4) $x \neq y \in X$ に対して $f(x) \neq f(y)$ となる $f \in \mathcal{O}_X$ が存在する, (ここで $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数の algebra である.) を満たすときをいう.

K が X の compact のとき, K の holomorphically convex hull $\hat{K}$ は, $\{x \in X \mid |f(x)| \leq \|f\|_K, \forall f \in \mathcal{O}_X\}$ で定義されるもので, $A(K)$ は, $\mathcal{O}_X$ の関数の K 上での一様極限である連続関数の algebra とする.

X 上の Oka-Weil domain W とは (1) W が relatively compact (2) 次の (i), (ii) を満たす φ が存在する (i) $\varphi: \overline{W}$ の近傍 $\rightarrow \mathbb{C}^n$ は holomorphic mapping (ii) $\varphi|_W$ は W から $\mathbb{C}^n$ の多重円板(半径1)内の closed subvariety の上への biholomorphic mapping, を満たすときをいう.

定理3. $(X, \mathcal{O})$ を Stein space, K を X の compact subset とする. $\Rightarrow S(A(K)) = \hat{K}$. (cf. [5])

証明. $x \in \hat{K}$ とし, $l_x(f) = f(x), \forall f \in \mathcal{O}_X$ で l_x を定めると l_x は $A(K)$ 上の homomorphism を定義する. $x \mapsto l_x$ は $\hat{K} \rightarrow S(A(K))$ の中への continuous 1-1 map である.

逆に $h \in S(A(K))$ とせよ. W は $f_1, \dots, f_t \in \mathcal{O}_X$ で定義された $W \supset \hat{K}$ なる $\mathcal{O}_K$ -Weil domain とせよ. $V = \{z \in \mathbb{C}^t \mid z_i = f_i(x), x \in W\}$ とおく. $\|f_i\|_K < 1$ より $z_0 = (h(f_1), \dots, h(f_t)) \in$ 半径1の多重円板 $\Delta(0, 1)$. 今 $z_0 \notin V$ とすると, ある $F \in \mathcal{O}_{\Delta(0, 1)}$ が存在して $F(z_0) \neq 0$, $F \equiv 0$ on V とできる. F を多項式近似して矛盾を得 $z_0 \in V$ がわかる. さらに $z_0 \notin \hat{K}$ とすると, $z_0 = (f_1(x_0), \dots, f_t(x_0))$, $x_0 \in W$ とかけているので, ある $G \in \mathcal{O}_X$ が存在して $|G(x_0)| > \|G\|_K$ とできる.

$W_\varepsilon = \{x \in W \mid |f_i(x)| \leq 1 - \varepsilon, i = 1, \dots, t\}$ は holomorphically convex である, ε は $W_\varepsilon \ni x_0$ ととる. この W_ε 上で G に一様収束する $f_1, \dots, f_t$ の多項式 P_n が存在する. 故に $|G(x_0)| = \lim |P_n(x_0)| = \lim |h(P_n)| = |h(G)| \leq \|G\|_K$. これは矛盾. $\therefore x_0 \in \hat{K}$, 故に $h = l_{x_0}$. 証明終り.

これを用いて次の定理を得る.

定理4. $(X, \mathcal{O})$ は $\mathcal{O}_X$ が X の点を分離し, $\mathcal{O}_X$ が local coordinates を与える純次元の complex space とせよ.

X は Stein $\iff X = S(\mathcal{O}_X)$. (cf. [5])

§ 4. $E \otimes F$ のスペクトル

E, F は locally convex (locally m -convex) algebra とする. tensor product algebra $E \otimes F$ 上の位相 $\mathcal{I}$ が,

$E \otimes F$ の構造をもって compatible とは、次の条件を満たすときである。

(1) $\mathcal{J}$ を備えた $E \otimes F$ が locally convex (locally m -convex) algebra (これは $E \otimes_{\mathcal{J}} F$ と表わしこの completion は $E \hat{\otimes}_{\mathcal{J}} F$ とかく)。

(2) $E \times F$ から $E \otimes_{\mathcal{J}} F$ の中への canonical bilinear map が個別的に連続。

(3) $f \in E', g \in F'$ に対して, $f \otimes g \in (E \otimes_{\mathcal{J}} F)'$ 。ここで

$f \otimes g$ は $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ に対して

$f \otimes g(z) = \sum_i f(x_i) g(y_i)$ で定義される。

(4) M, N が E', F' の equicontinuous subset ならば $M \otimes N$ は $(E \otimes_{\mathcal{J}} F)'$ の equicontinuous subset。

$E \otimes_{\mathcal{J}} F$ のスペクトル $S'(E \otimes_{\mathcal{J}} F)$ と E, F のスペクトル $S(E), S(F)$ との関係は次の定理で与えられる。

定理 5. [9]. E, F は commutative locally convex algebra とする。 $E \otimes_{\mathcal{J}} F$ は compatible topology $\mathcal{J}$ を与えられた $E \otimes F$ とする。

$$\Rightarrow S(E \otimes_{\mathcal{J}} F) = S(E) \times S(F)$$

証明. bijective: $h \in S(E \otimes_{\mathcal{J}} F)$ とすると, ある $a \otimes b \in E \otimes F$ が存在して, $h(a \otimes b) \neq 0$ より

$$f(x) = \frac{1}{h(a \otimes b)} h(ax \otimes b), \quad x \in E$$

(ii)

$$g(y) = \frac{1}{h(a \otimes b)} h(a \otimes by), \quad y \in F$$

と定義すると, f, g は continuous であり, $(f, g) \in S(E) \times S(F)$ である. 逆に $(f', g') \in S(E) \times S(F)$ ならば, 定義の (3) より $f' \otimes g' \in (E \otimes F)'$, $h = f' \otimes g'$ とおき, h から (i) により定められたものを f, g とすると, $h = f \otimes g$ (cf. [2]) である. このとき $f' = f, g' = g$ となる.

次に $(f, g) \longrightarrow h = f \otimes g$ の連続性: $(f, g)_{i \in I}$ は (f, g) に収束する $S(E) \times S(F)$ の net とすると $f_i \rightarrow f, g_i \rightarrow g$ である. $x \otimes y \in E \otimes F$ に対して,

$$h_i(x \otimes y) = f_i(x) g_i(y) \longrightarrow f(x) g(y) = h(x \otimes y).$$

逆に, $h \longrightarrow (f, g)$ (f, g は (i) による) の連続:

$(h_i)_{i \in I}$ は h に収束する $S(E \otimes F)$ の net とする. $a \otimes b \in E \otimes F$ をとって $h(a \otimes b) \neq 0$ とできるので

$f(x) = h(ax \otimes b) / h(a \otimes b), x \in E$ ならば, $f(x)$ の近傍 U に対して $f_i(x) = h_i(ax \otimes b) / h_i(a \otimes b) \in U$,

$\forall i \geq i_U$ である $i_U \in I$ が存在する. 故に $f_i \rightarrow f$ in $S(E)$.

他方も同様であり連続性が言えた.

系 $E, F \in$ commutative locally convex algebras,
 $S(E), S(F)$ は それぞれ E', F' の equicontinuous subset
 とする. $\Rightarrow S(E \hat{\otimes}_J F) = S(E) \times S(F)$

証明. 前の定理の前半より bijective は明らか. 定義の
 (4) によって $S(E \otimes_J F)$ は $(E \otimes_J F)'$ の equicontinuous
 subset である. 又 $S(E \otimes_J F)$ と $S(E \hat{\otimes}_J F)$ は位相空間
 として一致している.

§ 5. $S(E)$ の 局所同程度連続.

$E \in$ locally convex algebra で $S(E)$ を E の スペクトル
 とする. E が m -barreled とは, すべての吸収的円形凸
 閉 idempotent subset が 0 の近傍になるときを言う.

$S(E)$ が locally equicontinuous とは 各 $f \in S(E)$ に
 対して, equicontinuous subset である f の近傍 U_f が
 存在するときを言う. 次の定理は, [8] による.

定理 6. E が m -barreled locally convex algebra と
 し, (1) $S(E)$ は locally compact (Hausdorff) space,
 (2) $S(E)$ は locally equicontinuous.

このとき (1) $\Rightarrow$ (2). E が単位元 e を持てば (2) $\Rightarrow$ (1).

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): U_f は $f \in S(E)$ の compact な近傍とする.
 U の 極集合 $U^0 \equiv \{x \in E \mid | \langle g, x \rangle | \leq 1, \forall g \in U_f\}$ は

m -barrel となるので 0 の近傍である。

故に $U \subset U^{00}$ は $S(E)$ の equicontinuous subset である。

(2) $\Rightarrow$ (1): $E \ni e$ より $S(E)$ は E' の weakly closed subset である。 U_f が f の equicontinuous 近傍ならば, $\overline{U}$ は E' の equicontinuous subset である。故に $\overline{U} \cap S(E)$ は f の compact 近傍である。

系 E は m -barreled locally convex algebra $\times L$,
 $A \subset S(E)$ ならば, A が weakly relatively compact
 $\Leftrightarrow A$ が weakly bounded.

次に Gelfand map の連続性を考える。 E は locally convex algebra $\times L$, $C(S(E))$ は $S(E)$ 上のすべての複素数値連続関数の algebra で compact-様収束の位相をもつとする。このとき Gelfand map g は, $g: x \rightarrow \hat{x}$, $\forall x \in E$, である。ここで $\hat{x}$ は, $\hat{x}(f) = f(x)$, $\forall f \in S(E)$ によって定義される。このとき次の定理が成り立つ [8]。

定理 7. E は locally convex algebra となるならば,
 Gelfand map $g: E \rightarrow C(S(E))$ が連続,
 $\Leftrightarrow S(E)$ のあらゆる compact subset が equicontinuous.

証明. $A \subseteq S(E)$ が (weakly) compact とすると, g が連続 $\Leftrightarrow g_A: E \rightarrow C_u(A)$ が連続 ($C_u(A)$ は 一様収束の

の topology をもつとする). $\Leftrightarrow A$ が equicontinuous.

系. E が m -barreled locally convex algebra

$\Rightarrow$ Gelfand map は連続.

証明. $A \subset S(E)$ が compact $\Rightarrow A^0$ は m -barrel で 0 の近傍. 故に $A^{00} (\supset A)$ は E' の equicontinuous subset である.

§ 6. ε -product に関するスペクトル.

$E, F \in \text{locally convex space}$ とし, E'_c は E 内の compact な disc 上での一様収束の位相を与えられた E の dual space E' とし, $\mathcal{L}(E'_c, F)$ は, $E'_c \rightarrow F$ への連続な線形写像のベクトル空間とし, $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, F)$ は E' 内の linear functionals の equicontinuous sets 上での一様収束の位相を与えられた $\mathcal{L}(E'_c, F)$ とする.

ここでは ε -product の定義を

$$E \varepsilon F = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, F) = \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c, E), \quad (\text{cf [2], [11]})$$

とする (後の $=$ は isomorphism の意味).

$\mathcal{F}$ は second countable topological space 上の topological sheaf とし, $\mathcal{P}(U, \mathcal{F})$ は U 上の $\mathcal{F}$ の連続な横断の空間を表わす. このとき, $\mathcal{F} \in E$ は presheaf $\{ \mathcal{P}(U, \mathcal{F}) \in E, U \subset X \text{ open} \}$ によって定義された X 上

の sheaf とする. 次の命題より $\mathcal{F} \in E$ は 又 topological sheaf であることがわかる [2].

命題. $\mathcal{F}$ は上に述べたもの, E は locally convex space,

$$\Rightarrow \mathcal{P}(U, \mathcal{F} \in E) = \mathcal{P}(U, \mathcal{F}) \in E, \quad \forall \text{ open } U \subset X.$$

以下では, $(X, \mathcal{O})$ は H. Grauert の意味での complex space で reduced であるとする.

定理 8. [8]. $(X, \mathcal{O}) \in \text{Stein space}$ とし, E は complete locally m -convex algebra, $S(E)$ は locally equicontinuous であるとする,

$$\Rightarrow S(\mathcal{P}(X, \mathcal{O} \in E)) = X \times S(E).$$

証明. open set $U \subset X$ に対して,

$\mathcal{P}(U, \mathcal{O} \in E) = \mathcal{P}(U, \mathcal{O}) \hat{\otimes}_E E$ である (cf. [11]). 前命題より $\mathcal{P}(U, \mathcal{O} \in E) = \mathcal{P}(U, \mathcal{O}) \in E$ であるから,

$$\mathcal{P}(X, \mathcal{O} \in E) = \mathcal{P}(X, \mathcal{O}) \hat{\otimes}_E E \text{ を得, したがって結論を得る.}$$

次の定理は (semi-simple) Stein algebras の $\mathcal{E}$ -product が又 (semi-simple) Stein algebra であることと言っている. 定理のみをあげる [8].

定理 9. $(X, \mathcal{O})$ と $(Y, \mathcal{O}) \in \text{complex spaces}$ とする

$$\Rightarrow \mathcal{P}(X, \mathcal{O}) \hat{\otimes}_E \mathcal{P}(Y, \mathcal{O}) = \mathcal{P}(X \times Y, \mathcal{O} \in \mathcal{O}).$$

特に $(X, \mathcal{O})$ と $(Y, \mathcal{O})$ が Stein spaces とする

$$\Rightarrow S(\mathcal{P}(X \times Y, \mathcal{O} \in \mathcal{O})) = X \times Y.$$

注意, 各節において “=” は homeomorphism あるいは topological isomorphism のときにも用いてある.

文 献

- [1] Bishop E., Holomorphic completions, analytic continuation and the interpolation on seminorms, Ann. Math. 78(1963) 468-500
- [2] Bungart L., Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, Trans. Amer. Math. Soc. 111(1964), 317-344.
- [3] Forster O., Primärzerlegung in Steinschen Algebren, Math. Ann. 154(1964).
- [4] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Am. Math. Soc. 1955.
- [5] Gunning R.C. and Rossi H., Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, 1965.
- [6] 一松信, 多変数解析函数論, 培風館(1960).
- [7] Kahane J.P. and Zelazko W., A characteri-

- zation of maximal ideals in commutative Banach algebras, *Studia Math.* 29(1968) 339-343.
- [8] Mallios A., On the spectra of topological algebras, *Jour. Functional Analysis* 3(1969) 301-309.
- [9] ———, On the spectrum of topological tensor product of locally convex algebras, *Math. Ann.* 154(1964) 171-180.
- [10] Michael E.A., Locally multiplicatively-convex topological algebras, *Mem. Am. Math. Soc.* Nr 11(1952).
- [11] Schwartz, L., Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier* 7(1957) 1-141.
- [12] Tomiyama J., Tensor product of commutative Banach algebras, *Tôhoku Math. Jour.* 12(1960) 147-154.
- [13] Wermer J. Banach Algebras and Analytic Functions, *Advan. Math.* 1(1961) 51-102.