

# Mordell-Weil Lattices for Higher Genus Fibration

立教大理 塩田 清文治  
(T. Shioda)

約3年前の域崎でのシンポジウムにおいて, "Mordell-Weil Lattices とその応用" と題して, 楕円曲面の場合の MWL の定義と基本的性質, 及び若干の応用 について述べた. 今回の主題は, fibre を楕円曲線の代りに, 任意の種数  $g \geq 1$  の代数曲線としたときにも, その Jacobian の Mordell-Weil 群に 格子 の構造が自然に入ること, そしてそれの応用について述べる.

これらの結果は, 標題と同じ title の小文<sup>[56]</sup>で 学士院紀要から発表する予定だが, 詳細は準備中である. 本稿においても, idea を中心にして, 証明の詳細は割愛して置く. (基本的な idea は 楕円曲線 ( $g=1$ ) の時と同じであるから, その場合の知識は有用である); それについて 2 の Survey も 3 種ある: i) 初稿のスケッチ [51], ii) 一段落 [53], iii) 日本語 [54]. より詳しくは [52], またこれらの文献表<sup>(参考)</sup>.

記号

$k$ : 代数体, 標数は任意

$K = k(C)$ : 代数曲线  $C$  の函数体, e.g.  $K = k(t)$ .

$\Gamma/K$ : 標数  $g \geq 1$  の代数曲线 (n.s. proj.)

$\Gamma(K)$ :  $\Gamma$  の  $K$ -有理点の集合,  $\neq \emptyset$ ,  $\ni O$  とする.

$J/K$ :  $\Gamma/K$  の Jacobian 多様体;  $\Gamma \hookrightarrow J$ ,  $O = 原点$ .

$J(K)$ :  $J$  の  $K$ -有理点の群.

1.

まず 函数体  $K$  上の場合の Mordell-Weil の定理は,

Néron, Lang により証明されたが, 次の様う述べる:

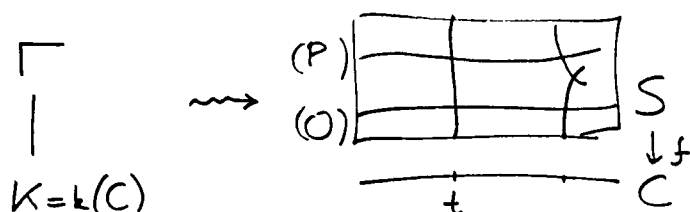
$K$  上の abel 多様体  $A$  の  $K/k$ -trace  $\varepsilon(B, \tau)$  とすると,  $A(K)/\varepsilon B(k)$  は有限生成 abel 群である。([L]).

ここで  $K/k$ -trace の定義は次の通り:  $B$  は  $k$  上の abel 多様体,  $\tau: B \rightarrow A$  は  $K$  上定義された homomorphism, である. 次の universal mapping property を持つ. Eps  $\forall (B', \tau'), \tau': B' \xrightarrow{K} A$  に対し,  $\exists! u: B' \xrightarrow{k} B$  s.t.  $\tau' = \tau \circ u$ .

Fr. Th. 1 のより

$A = J$  の場合, 有限生成  $\pi$ -群  $J(K)/\varepsilon B(k)$  は, (より) 直接的, 幾何学的な対応と関係付けられる. まず,  $\Gamma/K$  に対応して, 代数曲面  $S$  と fibration  $f$  を自然に定義する.

$$f: S \rightarrow C$$



$\Gamma = \mathbb{P}^1$ .  $S$  は nonsing. projective,  $f$  は generic fibre  $\pi: \Gamma/K \rightarrow C$  とする relatively minimal の fibration (i.e.  $\forall f^{-1}(t) \nrightarrow$  特異点を含む) である. この際,  $\Gamma(K) \ni P$  は,  $f$  の section  $(P)$  と 1:1 に対応する.  $t \in C$ .  $S$  上の divisor  $D$  が  $\pi^{-1}(t)$  と互いに素.  $\Gamma$  上の 0 次の divisor

$$\delta = D \cdot \Gamma - d[O], \quad d = (D \cdot \Gamma) \in \mathbb{Z}$$

を考慮することにより, 準同型

$$\text{Div}(S) \ni D \mapsto \text{class}(\delta) \in J(K)$$

が定まる. 容易に分るように, これは全射で, 準同型

$$\text{Pic}(S) \rightarrow J(K)$$

と述べられる.  $\pm 2$ .  $S$  の Néron-Severi 群は

$$NS(S) = \text{Div}(S)/\text{alg. equiv.} = \text{Pic}(S)/\text{Pic}^0(S)$$

と定義され, 一般に有限生成の abel 群になることが知られてゐるが, 考へてゐる場合次の定理が成立つ.

Th. 1  $\Gamma$  上の準同型は, 自然な同型

$$NS(S)/T \simeq J(\Gamma)/\text{CB}(K)$$

と述べられる.  $T$  は,  $(0)$ ,  $F$  (=fibre) 及び可約 fibre の既約成分で生成される  $NS(S)$  の部分群である.  $\pm 3$  に.

代数曲面  $S$  の Picard 群環体は,  $C$  の Jacobi 群環体と  $J$  の  $K/k$ -trace  $B$  の直和に同型である:

$$\text{PicVar}(S) \simeq \text{Jac}(C) \oplus B. \quad \text{」}$$

この結果は, 古くは  $[L]$  にある知識と保ち可なりは証明は難しくなる (従って, 1960 年頃の知られぬことも不思議はない) のであるが, 参考にも, 上のような公式を述べた文献を私は知らない. 特別な場合として,

Th. 2  $\Gamma/K, J/K, \dots$  は上の通りとし, さらに

(\*)  $J$  の  $K/k$ -trace  $= \{0\}$ , と仮定すると.

$$\text{NS}(S)/T \simeq J(K), \quad \text{と} \quad J(K) \text{ は有限生成,}$$

$$\text{PicVar}(S) \simeq \text{Jac}(C). \quad \text{」}$$

Th. 3  $\text{PicVar}(S) = \{0\}$  なるは: (古くは:  $S$  が有理曲面,  $K3$  曲面, より一般に  $b_1(S) = 0$  なるは), (\*) が成立し, 従って,  $\text{NS}(S)/T \simeq J(K)$ . 」

注意.  $g=1$  (elliptic fibration) のとき, 条件 (\*) と, 条件 (\*)'  $f: S \rightarrow C$  は singular fibre  $\exists$  かつ, また (\*)''  $j$ -invariant of  $\Gamma$  は const. なる ( $j \neq k$ ). の関係は.  $(*)'' \Rightarrow (*)' \Rightarrow (*)$ ;  $C = \mathbb{P}^1$  のときは  $(*) \Leftrightarrow (*)'$ .

2.

以上より, Mordell-Weil 群 と Néron-Severi 群 の  
群としての関係 について. 曲面上の有理点の群として,  
 Mordell-Weil 群 は 格子 (lattice) の構造をもち,  
 Mordell-Weil lattice (MWL) と定義される.

簡単な場合. 以下に議論する. 次の2条件を仮定する:

- $$\begin{cases} (*) & K/k\text{-trace of } J = \{0\}. \\ (**) & NS(S) \text{ is torsion-free.} \end{cases}$$

(仮定は:  $S$  は有理曲面,  $K3$ , etc. にも適用可能.)  
 (\*) より  $J(K)$  は有限生成である.

さらに,  $g=1$  の場合 (cf. [S1], [S2], ...) と同様, Th. 2 の  
 同型  $NS(S)/T \cong J(K)$  は split するからである:

Lemma  $J(K)$  から  $NS(S) \otimes \mathbb{Q}$  への map  $\varphi$  として,

$$\begin{cases} \varphi(P) \equiv D_P \pmod{T \otimes \mathbb{Q}} & , \forall P \in J(K) \\ \varphi(P) \perp T & (\text{w.r.t. intersection pairing}) \end{cases}$$

が存在する.  $D_P$  は  $P \in J(K)$  に対応する  $P \in NS(S)$  の divisor.

これは,  $D_P \pmod{T} \leftrightarrow P$  と  $T$  上の divisor である.

(1) (2) (3) (4). これは,  $\varphi$  は  $J(K)$  の  $\mathbb{Q}$ -型と一致する.

$$\text{Ker}(\varphi) = J(K)_{\text{tor}}, \quad \text{Im}(\varphi) \subset T^{\perp} \otimes \mathbb{Q}. \quad \square$$

また, (\*\*) より  $NS(S)$  は integral lattice である.

$\varphi$  の signature は  $(1, p-1)$  (Hodge index th.).



次に  $J(K)$  の部分群  $J(K)^0$  を

$$T^\perp \hookrightarrow NS(S) \longrightarrow NS(S)/T \simeq J(K)$$

の像と1:1に対応する.

Th.5  $J(K)^0$  は torsionfree である.  $(J(K)^0, \langle, \rangle)$  は integral lattice となる; これは narrow Mordell-Weil lattice と呼ぶ.

$$(J(K)^0, \langle, \rangle) \simeq (T^\perp, -(\cdot)).$$

$P \in J(K)^0$  とすると,  $\text{contr}_v(P, Q) = 0$  for  $Q \in J(K)$ .  
 これは  $\langle P, Q \rangle \in \mathbb{Z}$  である. 一般に MWL は,

narrow MWL の dual lattice に含まれる. 特異点の  
 重要な場合として, 次の二つが成立.

Th.6 多項式  $(*)$ ,  $(**)$  により,  $NS(S)$  は unimodular  
 lattice となる. 即ち  $\det NS(S) = \pm 1$ . このとき,

MWL  $(J(K)/(\text{tors}), \langle, \rangle)$  は, narrow MWL  $J(K)^0$   
 の dual lattice に同型である.

これは

Th.7  $S$  が有理曲面ならば, Th.6 の全ての条件が  
 満たされ, 従って,  $J/K$  の MWL は, どの narrow MWL  
 の dual lattice に同型.

3.

± 2. 特異点の理論に登場する所謂 "Milnor lattice" は、  
適当な場合には、Mordell-Weil lattice の視座からより精密  
に捉えうる。たとえは、

$$E_6\text{-sing.} \quad y^2 = x^3 + t^4$$

$$E_7\text{-sing.} \quad y^2 = x^3 + xt^3$$

$$E_8\text{-sing.} \quad y^2 = x^3 + t^5$$

の "semi-universal deformation" を与える方程式は、

$$(E_6) : y^2 = x^3 + t^4 + x \left( \sum_{i=0}^2 p_i t^i \right) + \left( \sum_{j=0}^2 q_j t^j \right)$$

$$(E_7) : y^2 = x^3 + xt^3 + x(p_0 + p_1 t) + \sum_{j=0}^4 q_j t^j$$

$$(E_8) : y^2 = x^3 + t^5 + x \left( \sum_{i=0}^3 p_i t^i \right) + \left( \sum_{j=0}^3 q_j t^j \right)$$

$$\lambda = (p_i, q_j) \in \mathbb{A}^r \quad (r=6, 7, 8)$$

±.  $k = \overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$  (alg. closure) とすると、 $k(t)$  上の代数曲線  
群  $E = E_\lambda$  を定める。generic な  $\lambda$  に對して、MWL  
 $E(k(t))$  は、root lattice  $E_r^\bullet$  の dual lattice  $E_r^*$  と  
同型になる。  $\text{Gal}(k/\mathbb{Q}(t))$  の  $E(k(t))$  上の表現 (あるいは  
narrow MWL  $E(k(t))^\circ \simeq E_r$  上の表現) は、Milnor  
lattice 上の monodromy 表現と本質的に同一である。

$E$  型以外、 $A, D$  型、 $n$  rational double points の semi-  
universal deformation を与える方程式は、一般には楕圓  
曲线や hyperelliptic curve を与える。その場合にも上と同

標本として成立してゐると想像するのは自然なことである。  
 以降、 $\lambda$  を定めることは、MWL の理論と高い次元の  
 (場合の対) に対する一つの動機と成つてゐる (cf. [58], 序文)。

さて、 $A_n$  型の根系  $\lambda$   $y^2 = x^{n+1} + t^2$  と表すとき、その  
 univ. deform. の式は

$$y^2 = x^{n+1} + p_2 x^{n-1} + p_3 x^{n-2} + \cdots + p_{n+1} + t^2,$$

$$\lambda = (p_2, p_3, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{A}^n.$$

同様の如く、 $n = 2g$  の偶数  $n$  にと  $\lambda \in \mathbb{A}^n$  とする。上式は、

楕円  $g$  の hyperell. curve  $\Gamma = \Gamma_\lambda / K = k(t)$  とみられてゐる。

$0 \in \Gamma(K)$  と “無限遠点” とし、 $\Gamma \in$  その Jacobian  $J$   
 に、 $0 = J$  の  $\bar{k}$  点と成つてゐる。  $\Gamma$  は 次の有限点

$$P_i = (u_i, t), \quad P_i' = (u_i, -t) \quad (1 \leq i \leq 2g+1)$$

をもつ。こゝに  $u_1, \dots, u_{2g+1}$  は、下式

$$x^{2g+1} + p_2 x^{2g-1} + \cdots + p_{2g+1} = 0$$

の根。こゝに  $\Gamma(K) \subset J(K)$  の中  $v$  なる点をもつ

$$\sum_{i=1}^{2g+1} P_i = 0, \quad P_i' = -P_i.$$

Th. 8  $u_1, \dots, u_{2g+1}$  は  $\mathbb{Q}$  に属する点と仮定すると、

$J(K)$  は rank  $r = 2g$  の free abel  $\mathbb{Z}$ -群と成る。すなわち

同様に、narrow MWL  $J(K)^0 \cong A_{2g}$  (root lattice),

$J(K) \cong A_{2g}^*$  と。格子と同一視出来る:

$$\begin{array}{ccc} J(K) & \simeq & A_{2g}^* \\ \cup & & \cup \text{ index } 2g+1 \\ J(K)^0 & \simeq & A_{2g} \end{array}$$

更々.  $P_1, \dots, P_{2g+1}, P'_1, \dots, P'_{2g+1}$  の  $2(2g+1)$  個は,  $A_{2g}^*$  の minimal vectors (norm =  $\frac{2g}{2g+1}$ ) に対応する。

特に.  $P_1, \dots, P_{2g}$  は  $J(K)$  の生成元となる。』

証明は. 対  $\Gamma/K$  に対応する代数曲面  $S$  上の有理曲面に  $r$  個の点に注意し, Th. 7 を適用する。  $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$  は,  $t = \infty$  での  $h^0(1)$  の可逆 fibre を与える。(特異点の除去を進行するとわかる)

$$\wedge_K T_\infty = 2g+4, \quad \det T_\infty = 2g+1$$

この  $2$  と  $n$  分る。  $n$  は  $n$  であり  $r=2g$ ,  $\det J(K) = \frac{1}{2g+1}$ 。

→. height pairing の explicit formula を (4) に用いる。

$\langle P_i, P_j \rangle$  を計算し,  $n$  は  $A_{2g}^*$  の min. vectors  $\langle, \rangle$  と同じである。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。

N.B.

$n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。

root lattice  $A_n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。

この  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。

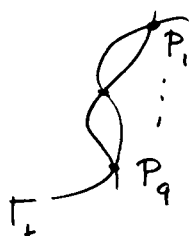
$\lambda$  の  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。  $n$  は  $n$  である。

$y^2 = x^{2g+2} + 1 + t^2$  であり,  $J(K) \simeq A_g^* \oplus A_g^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , 等々。

4.

もう一つの参考文献として, Manin-Shafarevich の結果の一般化を挙げる.

$\mathbb{P}^2$  内の 3 次曲線の linear system  $\{\Gamma_t \mid t \in \mathbb{P}^1\}$  を考えよと,



Bézout Th. に依り, base points は一般に 9 個ある. 今,  $\{P_i\}_{i=1}^8$  のうち 8 個異なり, かつ, この member  $\Gamma_t$  も 2 直線と重なる場合を除く. M-S はこのことを主張する.

$\Gamma$  の lin. system の generic member  $E = \Gamma_t$  とおき,  $P_i \in E(K)$  の一つ, かつ  $P_9 = 0$  とおくと, 残りの  $P_1, \dots, P_8$  は  $E(K)$  の中で独立で, かつ  $E(K)$  の index 3 の部分群を生成する. [M1] に於いて  $P_1, \dots, P_8$  の独立性は Shafarevich に依る;

"index 3" は, [M2] で証明された. これは MWL の理論の応用として, <sup>3 群の生成</sup> [S2] で, この証明を証明している.

MWL の概念を, 高い精度で表現しているとき, この証明は直ちに, 次の定理に適用できることになる. (ただし, この定理の statement 自体, 2 次元型として, 既述の通り知られたものがあるか否かは知らない. 参考文献の 1 は敢て証明していると述べている.)

Th. 9  $m \geq 3$  とし,  $\{\Gamma_t \mid t \in \mathbb{P}^1\}$  は  $\mathbb{P}^2$  内の  $m$  次曲  
 束のたる linear pencil であり, 次の 2 条件を満たすとする.

(A1) 各  $\Gamma_t$  は 2 次曲, generic の  $\Gamma_t$  は nonsingular.

(A2)  $m^2$  個の base points  $\{P_i\}$  は互に独立である.

このとき, generic member  $\Gamma = \Gamma_t$  は  $K = k(t)$  上の  
 代数曲線  $g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) \geq 1$  の曲線であり, その Jacobian  
 を  $J$  とする.  $P_i$  の 1 つを  $\bar{P}_1$  ととり, 残りの  $P_i$  を

$$P_1, \dots, P_r \in \Gamma(K) \subset J(K), \quad r = m^2 - 1$$

とかく. (ただし, "Mordell-Weil 群"  $J(K)$  は

rank  $r$  の free abelian 群であり, 上の  $r$  個の  $P_i$  は独立,

かつ  $J(K)$  の index  $m$  の部分群を生成する.  $J(K)$  の元は

この  $P_i$  と  $mQ = \sum P_i$  とみえ  $Q \in J(K)$  により生成  
 される.)

この結果は, MWL 式に基いて次の Th. を示す.

Th. 10 MWL  $J(K)$  は, rank  $r = m^2 - 1$  の, pos-  
 def. integral, unimodular lattice であり,  $m$  奇数の  
 とき  $m-1$  個の  $P_i$  は  $\mathbb{P}^2$  上 even である.  $P_1, \dots, P_r$  は

$$\langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 2 & i=j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j \geq 1)$$

であり,  $\det(\langle P_i, P_j \rangle) = m^2 (\neq 0)$ ,  $i$  個の独立な元  
 であり, index  $m$  の sublattice を生成する.

証明は [SG] を参照.

文献

- [L] Lang, S.: Fundamentals of Diophantine Geometry, Springer (1983)
- [M1] Manin, Ju.: Cubic Forms, North-Holland (1974)
- [M2] — : The Tate height of points ..... ,  
Izv. Akad. Nauk SSSR, 28 (1964); AMSTransl. (2) 59, 82-110 (1966).
- [S1] Shioda, T.: Mordell-Weil lattices and Galois representation, I, II, III, Proc. Japa Acad. 65A, 268-271, 296-299, 300-303 (1989)
- [S2] — : On the Mordell-Weil lattices, Comment. Math. Univ. St. Pauli 39, 211-240 (1990)
- [S3] — : Theory of Mordell-Weil lattices  
Proc. ICM'90 Kyoto, Springer, I, 473-489 (91)
- [S4] — : MWL の 理論 と 応用 (7), 数学 43, 97-114 (91)
- [S5] — : An infinite family of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$  ..... , Invent. Math. 106, 109-119 (1991).
- [S6] — : Mordell-Weil lattices for higher genus fibration, Proc. Japa Acad. 68A, 247-250 (1992). ~~(to appear)~~
- [S7] — : Generalization of a theorem of Manin-Shafarevich, (to appear)

[S8] Shiode, Construction of elliptic curves  
with high rank via the invariants of the  
Weyl groups, J. Math. Soc. Japan 43, 673-719  
(1991).

12/30/92.