

2013 年度 修士学位論文

Configurations of Rational Curves on Rational Elliptic Surfaces

2014 年 1 月提出

学籍番号 0530-24-0951

氏 名 車谷 優樹 (Yuuki Kurumadani)

指導教員 向井 茂 (Shigeru Mukai)

概要

この論文においては全て標数 0 の代数的閉体 k 上の代数多様体を考えることとする.

一般に $\mathbb{P}^2$ 上の (ほとんど全ての)*¹cubic pencil P を blow-up により base point free にすると, rational elliptic surface を得ることが出来る.

$$\begin{array}{ccc} S & & \\ \downarrow \epsilon & \searrow \text{射 } f & \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{P} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

f は rational elliptic surface を与える.

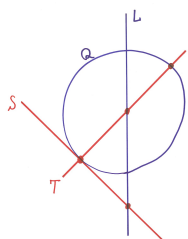
従って, cubic pencil と rational elliptic surface の間には以下の対応がある.

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \{ \mathbb{P}^2 \text{ 上のほとんど全ての cubic pencil} \} & \longrightarrow & \{ \text{rational elliptic surfaces} \} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ P & \longmapsto & f : S \rightarrow \mathbb{P}^1 \end{array}$$

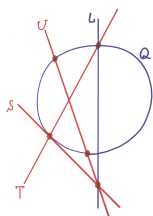
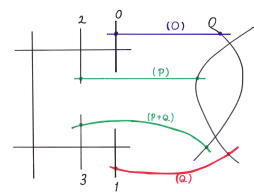
この対応 Φ の存在や, “ほとんど全て” といった細かい条件については 1.1 節で明らかにする.

この対応を具体的に見るには, cubic pencil の base point において 9 回*² blow-up する必要がある, cubic pencil からどういう elliptic surface が得られるかを直ちに予測するのは大変難しい問題のように思える. 例えば以下の 2 つの cubic pencil $\langle C, C' \rangle$ を考えてみよう.

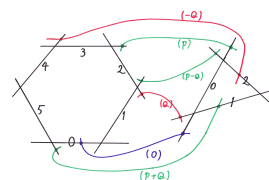
- (a) $\langle C = Q + L, C' = 2S + T \rangle \xrightarrow{\Phi} E_6 \oplus A_1$ 型 (No.49*³)
 (b) $\langle C = Q + L, C' = S + T + U \rangle \xrightarrow{\Phi} A_5 \oplus A_2$ 型 (No.51)



$\Phi : 9 \text{ 回 blow-up} \longrightarrow$



$\Phi : 9 \text{ 回 blow-up} \longrightarrow$



*¹ 正確には P の生成元 C, C' が, $\forall p \in C \cap C', \min \{ \text{mult}_p C, \text{mult}_p C' \} = 1$ を満たすとき. 系 1.1 参照.

*² infinitely near point を含めた 9 点 blow-up の意味.

*³ [5] の分類に依った. 以後この分類番号を採用する.

このように cubic pencil は一見似ているものであるが、対応する rational elliptic surface の root lattice T は全く異なるものになる。

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで } T \text{ とは,} \\ f: S \rightarrow C \text{ を elliptic surface, } R_{v,i} \ (i = 0, 1, \dots, m_v^{*4} - 1) \text{ を点 } v \ (\in C) \text{ におけるファイバーの既約成分と} \\ \text{して,} \\ T := \bigoplus_{v \in C} T_v^{-*5}, \quad T_v = \langle R_{v,i} | i = 1, \dots, m_v - 1 \rangle \\ \\ \text{で定める. (ここで } R_{v,0} \text{ は zero section } (O) \text{ と交わる成分とする.)} \\ \text{一般にこの } (T, (\cdot)^{*6}) \text{ は, rank} = m_v - 1 \text{ の A, D, E 型の root lattice と同型であり, Kodaira type に応じ} \\ \text{て次のようになる.} \\ \\ \begin{array}{ccccccc} \text{Kodaira type} & I_m & I_m^* & II^* & III^* & IV^* & IV & III \\ \hline T_v^- & A_{m-1} & D_{m+4} & E_8 & E_7 & E_6 & A_2 & A_1 \end{array} \\ \\ \text{特に, } S: \text{rational} \text{ であれば, } T \text{ は } E_8 \text{ の sublattice と同型である.} \end{array} \right)$$

この論文の目標はこの対応 Φ をより明らかにすることにある。

例えば, Φ について以下のことを調べたい。

目標 (1) 上の対応は全射

より強く,

目標 (2) 逆像の決定

つまり任意に与えられた rational elliptic surface に対応する cubic pencil を全て決定^{*7}する

目標 (1) の事実は既に Miranda 氏や Persson 氏により示されている。(例えば, [3] や [6].) [3] は invariant theory を用いて示されており, [6] は Weierstrass equation によって分類されている。(ちなみに Mordell Weil rank $r^{*8} = 0$ の場合は [4] で cubic pencil の例が 1 つずつではあるが与えられている.)

しかしいずれの文献も目標 (2) までの言及は無く, この論文では Miranda 氏とは別のアプローチにより目標 (1), (2) の両方を示している。目標 (1) については 1.1 節で系 1.1 として, 目標 (2) については $r = 0, 1$ の場合の結果を 3.1, 3.4 節に示した。^{*9} 更にここでは r : 一般の場合でも通用する方法を用いているので, 実質は r : 一般の場合を解決している。

主に用いる道具は **height** である。この論文の理論的根拠のほとんどは, 塩田氏による height pairing と交点理論との関係を表す公式 (定理 1.2) に基づいていると言っても過言ではない。この公式だけを用いればよい分, 理論的には比較的容易に分類を行うことが出来る。しかしそれゆえの犠牲もある。つまり height を用いるということは, Mordell-Weil group $E(K)$ の lattice としての構造を見るので, rational elliptic surface の分

^{*4} m_v は点 v におけるファイバーの既約成分の個数

^{*6} lattice L に対して, L^- とは内積の符号を逆にしたもの

^{*6} 交点数を表す。

^{*7} cubic pencil として異なるものを全て挙げる

^{*8} この論文では特に言及の無い限り, r で rank $E(K)$ (= Mordell-Weil group の階数) を表すことにする。

^{*9} 実際には 3.1 節で逆像を全て求める方法を与えた上で一例のみを 3.4 節で紹介している。

類というよりは, root lattice T の分類^{*10}であり, 従って例えば **Kodaira fiber** でいう I_1 型と II 型 (ともに $T = \emptyset$), I_2 型と III 型 (ともに $T = A_1$), I_3 型と IV 型 (ともに $T = A_2$) は区別しないこととする. これらは互いに dual graph も等しいことは明らかである.

さて, この論文のメインである目標 (2) に関するアプローチを述べよう. 主要な idea は,

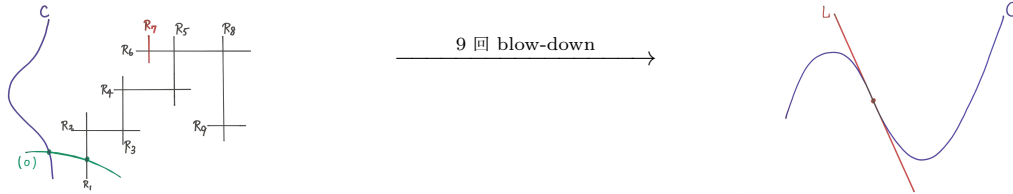
目標 (3) **rational elliptic surface** の **singular fiber** と **section** の位置関係を表す **dual graph** の構造決定

である. この dual graph が決定していれば, 9 回 blow-down することで $\mathbb{P}^2$ 上の cubic pencil を得ることができる. ここではより視覚的に捉えたいので, dual graph に変換する前の “普通の” graph^{*11}を考える. 上で述べたように例えば I_2 型と III 型は普通の graph においては別のものであるが, dual graph でみると等しいものである. 従って, dual graph を決定する分には, singular fiber を **Kodaira type** ではなく, T とその E_8 への埋め込み方で分類しておけば十分である. (実際 [5] では, T とその E_8 への埋め込み方が 74 通りに分類されている.)

例えば, E_8 (No.62) の graph は必ず以下の左図のようになる. (section は左図の 1 個だけということもわかる.)

図 1 E_8 の graph

図 2 対応する cubic pencil



この (-1) -curve^{*12}を合計で 9 回 blow-down してできる図形は右図の通り.

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般に, curve } C \text{ と交わる } (-1)\text{-curve をつぶすと, curve } C \text{ の強変換 } C' \text{ の自己交点数} \\ \text{は 1 上がることに注意すると, つぶし方は,} \\ (O) \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow R_5 \rightarrow R_6 \rightarrow R_8 \rightarrow R_9 \text{ しかない.} \\ \text{このとき, } L \text{ は } R_7 \text{ (重複度 3) に対応.} \end{array} \right)$$

以上より, $\Phi^{-1}(E_8) = \{ \langle C, 3L \rangle \}$ とわかる. ((2) が達成された!)

つまり, 9 回 blow-up して E_8 型になる cubic pencil は上の $P = \langle C, 3L \rangle$ しかないことが示された.

^{*10} より正確には E_8 への埋め込み方も区別する.

^{*11} この論文では singular fiber と section の位置関係を表す図を単に graph と表記することとする.

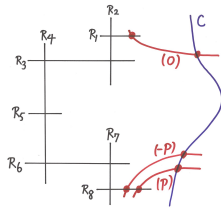
^{*12} この論文で $C : (m)$ -curve ($m \in \mathbb{Z}$) というと, $C : \text{smooth rational curve}$ かつ $C^2 = m$ なる curve を表すこととする.

つまり、図 1 のような graph の構造が全て決定されれば、後は (-1) -curve をどういう順序でつぶすかという組み合わせ論的な話になるので、目標 (3) $\Rightarrow$ 目標 (2) は有限個の可能性をしらみつぶしに調べられる分、比較的容易である。そこで当初の目標は (2) であったが、この論文では (3)、つまり dual graph の構造決定に関して詳しく述べようと思う。上のような $r = 0$ の場合の dual graph の構造については、2.2 節で 1 つ 1 つ図示して紹介している。(わかりやすさのため、実際には dual graph ではなくふつうの graph を図示した。)

上の例では section が有限個しかなかった ($r = 0$ なので) が、一般の rational elliptic surface では section は無限個存在してしまい、上のような dual graph の構造決定は一見困難であるかのように思う。確かに無限個全ての section の位置関係を調べるのは困難であろうが、あくまでもここでは blow-down していくことが目標なので、blow-down に参加する section、つまり互いに交わらない section の集合のみが必要である。この集合に含まれる section の 1 つを zero section (O) として、これと交わらない section は一般に有限個しかないことがわかる^{*13}ので、結局上の例と同じような状況になる。

例えば、 E_7 型 (No.43) の graph は以下の左図のようになる。(zero section (O) を含み、互いに交わらない section は下図の (O), (P), ($-P$) の 3 個に限ることが 2.3 節で示される。)

図 3 E_7 の graph



9 回 blow-down $\rightarrow$

図 4 $\langle C, 3L \rangle$

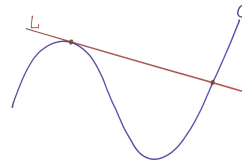
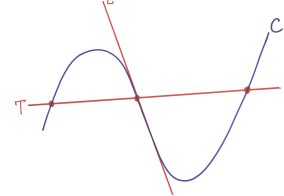


図 5 $\langle C, 2L + T \rangle$



この 3 本の (-1) -curve から始めて 9 回 blow-down して得られる図形は右図の 2 通りに限ることがわかる。

$$\left(\begin{array}{l} \text{つぶし方は、本質的には,} \\ \left\{ \begin{array}{l} (O) \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow R_5 \rightarrow (P) \rightarrow R_8 \rightarrow R_7 \quad ; \quad \langle C, 3L \rangle \\ (O) \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow R_6 \rightarrow R_7 \rightarrow (P) \rightarrow (-P) \quad ; \quad \langle C, 2L + T \rangle \end{array} \right. \\ \text{の 2 通りしか存在しない. 詳しくは 3 節に記した.} \end{array} \right)$$

以上より、 $\Phi^{-1}(E_7) = \{ \langle C, 3L \rangle, \langle C, 2L + T \rangle \}$ とわかる。(2) が達成された！)

つまり、9 回 blow-up して E_7 型になる cubic pencil は上の $\langle C, 3L \rangle, \langle C, 2L + T \rangle$ しかないことが示された。

^{*13} たとえば 2.3 節の導入にある (*) 式と、 $E(K)$ の $\mathbb{Z}$ 上有限生成性から従う。

従って目標 (3) は正確には,

目標 (3)' **rational elliptic surface** の **singular fiber** と “互いに交わらない” **section** からなる **dual graph** の構造決定

と表せる. 上のような $r = 1$ の場合の **dual graph** の構造を 2.3 節では 1 つ 1 つ図示して紹介している. (わかりやすさのため, $r = 0$ の場合と同様, dual graph ではなくふつうの graph を図示した.)

この $r = 1$ の場合の結果がオリジナルの結果である. 更にここでも r : 一般の場合でも通用する方法を用いているので, 実質は r : 一般の場合を解決している.

更に目標 (3), (3)' を決定することは, 目標 (2) に応用できるだけでなく, 例えば次のようなことも示せる. これらもオリジナルの結果である.

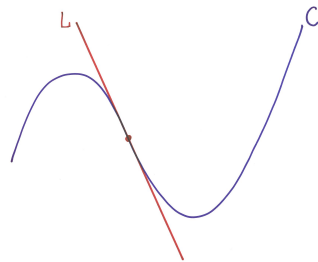
目標 (4) 各モデルの有理数係数の **Weierstrass equation** を与える

目標 (5) (**weak** な) **degree=1** の **Del Pezzo surface** 内の **(-1)-curve** の個数

まず目標 (4) について述べる. 目標 (2) で求めた cubic pencil を用いて, cubic pencil の生成元の $\mathbb{P}^2$ での座標とその上の K -rational point を 1 点与えれば, 対応する elliptic surface (つまり K 上の elliptic curve) の Weierstrass equation を計算することができる. つまり, $\mathbb{P}^2$ 内の genus = 1 の非特異 3 次曲線の方程式を Weierstrass equation に変換すればよく, これには様々な algorithm が知られている.*¹⁴ この論文では, 数式処理ソフト Magma*¹⁵を用いて計算した.

例えば, E_8 (No.62) の Weierstrass equation は以下のようにして計算される.

図 6 E_8 に対応する cubic pencil



$$\begin{cases} C \text{ の方程式: } yz^2 = x^3 \\ L \text{ の方程式: } y = 0 \\ \text{有理点: } (0 : 0 : 1) \end{cases} \quad \text{とする.}$$

*¹⁴ 例えば Nagell's Algorithm など

*¹⁵ <http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/> [1] 参照.

```

> Q := RationalField();
> R<t> := FunctionField(Q);
> P<x,y,z> := ProjectiveSpace(R,2);
> C := Curve(P, (y*z^2-x^3)+t*(y)^3);
> pt := C![0, 0, 1];
> E := EllipticCurve(C, pt);
> E;
> KodairaSymbols(E);
> Discriminant(E);
> BadPlaces(E);

```

Elliptic Curve defined by $y^2 = x^3 - t$ over Univariate rational function field over Rational Field

```

[ <II*, 1>, <II, 1> ]
-432*t^2
[
  1/t,
  t
]

```

つまり, E_8 (No.62) の Weierstrass equation は $y^2 = x^3 - t$ であることがわかった.
 3.2 節においてこのことを詳しく述べて, 3.4 節に $r = 1$ の場合の結果を 1 つ 1 つ示した.

次に目標 (5) について述べよう. 一般に (weak な) degree=1 の Del Pezzo surfaces と rational elliptic surfaces の間には, blow-up, blow-down の関係で 1 : 1 対応にあることから, (weak な) degree=1 の Del Pezzo surface 内の (-1) -curve の個数は, 対応する rational elliptic surface 内の (O) と交わらない section の個数と, 可約な singular fiber の個数との和で計算される. このデータは目標 (3), (3)' で求めた dual graph から容易に計算することができる.

例えば, E_8 (No.62) に対応する Del Pezzo surfaces 内の (-1) -curve の個数は以下のようにして計算される.

- ・ (O) と交わらない section の個数
これは上図 6 より. 0 個.
- ・ 可約な singular fiber の個数
これは 1 個.

以上より求める個数は 1 個.

つまり, E_8 (No.62) に対応する Del Pezzo surfaces 内の (-1) -curve の個数は 1 個であることがわ

かった。

3.3 節においてこのことを詳しく述べて, 3.4 節に $r = 1$ の場合の結果を 1 つ 1 つ示した。

以上がこの論文の要旨である。まず cubic pencil と rational elliptic surface との関係については 1.1 節に, height pairing など Mordell-Weil lattice の一般論は 1.2 節に, この論文のメインである目標 (3), (3)' に関する説明は 2.2 節と 2.3 節に, さらにこれを用いた応用 (目標 (2), (4), (5)) について 3 章に記した。

記号

- ・ k : 標数 0 の代数的閉体
- ・ curve : k 上 1 次元整分離的な有限型 scheme. surface 上の curve を考えるときは, surface 上の effective divisor のことを指す.
- ・ surface : k 上 2 次元整分離的な有限型 scheme.
- ・ $f : S \rightarrow C$: section を持つ elliptic surface
- ・ m_v : 点 $v(\in C)$ におけるファイバー内の既約成分の個数
- ・ $R_{v,i}$: 点 $v(\in C)$ におけるファイバー内の既約成分の 1 つ (ここで $R_{v,0}$ は zero section (O) と交わる成分とする.)
- ・ $T := \bigoplus_{v \in C} T_v^-$, $T_v = \langle R_{v,i} | i = 1, \dots, m_v - 1 \rangle$
一般にこの $(T, (\cdot))$ は, rank $= m_v - 1$ の A, D, E 型の root lattice と同型であり, Kodaira type に応じて次のようになる.

Kodaira type	I_m	I_m^*	II^*	III^*	IV^*	IV	III
T_v^-	A_{m-1}	D_{m+4}	E_8	E_7	E_6	A_2	A_1

- ・ K : C の関数体
- ・ $E(K)$: S に対応する K 上の elliptic curve の K -rational point 全体の集合. elliptic surface の言葉で言うと, f の section 全体の集合 (Mordell-Weil lattice)
- ・ $r = \text{rank } E(K)$ ($< \infty$ ^{*16})
- ・ $E(K)_0$: 全ての singular fiber において, zero section(O) と同じ既約成分を通る section 全体の集合 (narrow Mordell-Weil lattice)
- ・ $g(C) = h^1(\mathcal{O}_C)$: curve C の arithmetic genus. k 上 smooth projective curve に対しては arithmetic genus と geometric genus は一致する.*17 この値を単に curve C の genus と呼ぶこととする.

^{*16} Mordell-Weil の定理

^{*17} Serre duality

目次

概要	2
記号	8
1 rational elliptic surfaces と cubic pencils	11
1.1 rational elliptic surface の定義と cubic pencil を用いた構成法	11
1.2 Mordell-Weil lattice の一般論	19
1.2.1 Néron model	19
1.2.2 平行移動	21
1.2.3 lattice の定義	22
2 rational elliptic surface の dual graph の決定	25
2.1 分類に先立って	25
2.2 $r = 0$ の場合 (No.62 ~ No.74)	27
2.2.1 No.62 E_8	28
2.2.2 No.63 A_8	28
2.2.3 No.64 D_8	28
2.2.4 No.65 $E_7 \oplus A_1$	29
2.2.5 No.66 $A_5 \oplus A_2 \oplus A_1$	29
2.2.6 No.67 $A_4^{\oplus 2}$	29
2.2.7 No.68 $A_2^{\oplus 4}$	30
2.2.8 No.69 $E_6 \oplus A_2$	30
2.2.9 No.70 $A_7 \oplus A_1$	30
2.2.10 No.71 $D_6 \oplus A_1^{\oplus 2}$	31
2.2.11 No.72 $D_5 \oplus A_3$	31
2.2.12 No.73 $D_4^{\oplus 2}$	31
2.2.13 No.74 $(A_3 \oplus A_1)^{\oplus 2}$	32
2.3 $r = 1$ の場合 (No.43 ~ No.61)	33
2.3.1 No.43 E_7	34
2.3.2 No.44 A_7	35
2.3.3 No.45 A_7	37
2.3.4 No.46 D_7	38
2.3.5 No.47 $A_6 \oplus A_1$	39
2.3.6 No.48 $D_6 \oplus A_1$	40
2.3.7 No.49 $E_6 \oplus A_1$	42
2.3.8 No.50 $D_5 \oplus A_2$	43
2.3.9 No.51 $A_5 \oplus A_2$	44
2.3.10 No.52 $D_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	46

2.3.11 No.53	$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	48
2.3.12 No.54	$D_4 \oplus A_3$	50
2.3.13 No.55	$A_4 \oplus A_3$	52
2.3.14 No.56	$A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$	53
2.3.15 No.57	$D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$	54
2.3.16 No.58	$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$	56
2.3.17 No.59	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	58
2.3.18 No.60	$A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$	60
2.3.19 No.61	$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	62
3	応用	64
3.1	目標 (2) について	64
3.2	目標 (4) について	66
3.3	目標 (5) について	69
3.4	各々の結果	70
3.4.1	No.43 E_7	70
3.4.2	No.44 A_7	72
3.4.3	No.45 A_7	73
3.4.4	No.46 D_7	74
3.4.5	No.47 $A_6 \oplus A_1$	75
3.4.6	No.48 $D_6 \oplus A_1$	76
3.4.7	No.49 $E_6 \oplus A_1$	77
3.4.8	No.50 $D_5 \oplus A_2$	78
3.4.9	No.51 $A_5 \oplus A_2$	79
3.4.10	No.52 $D_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	80
3.4.11	No.53 $A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	81
3.4.12	No.54 $D_4 \oplus A_3$	82
3.4.13	No.55 $A_4 \oplus A_3$	83
3.4.14	No.56 $A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$	84
3.4.15	No.57 $D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$	85
3.4.16	No.58 $A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$	86
3.4.17	No.59 $A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	87
3.4.18	No.60 $A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$	88
3.4.19	No.61 $A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	89
3.4.20	No.61 $A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$ に対応する cubic pencil について	92
3.5	一般の Rational elliptic surfaces の場合	95
	謝辞	96
	参考文献	96

1 rational elliptic surfaces と cubic pencils

この章では、次章以降で行う cubic pencil による rational elliptic surface の構成の理論的側面である。具体的にはまず rational elliptic surface の定義を行い (定義 1.1), それが $\mathbb{P}^2$ の 9 回 blow-up により実現されることをみる (命題 1.1). そこでその 9 点を base point として持つ $\mathbb{P}^2$ 上の cubic pencil が登場する (命題 1.2). そこから概要で述べた対応 Φ が定まることをみて、これが全射であることを示す. (系 1.1)

1.1 rational elliptic surface の定義と cubic pencil を用いた構成法

rational elliptic surface に先んじて、一般の elliptic surface の定義を与えよう.

定義 1.1.

C を k 上 smooth projective curve, S を k 上 smooth projective surface とし,

$$f : S \longrightarrow C \text{ 全射}$$

が与えられているとする.

このとき, S が C 上 **elliptic surface** とは, 以下の 4 条件を満たすときをいう.

- (1) general fiber は genus=1 の smooth irreducible curve.
- (2) ファイバー方向に (-1) -curve を含まない. (相対極小性)
- (3) $f : S \longrightarrow C$ は少なくとも 1 つ section を持つ.
- (4) $f : S \longrightarrow C$ は少なくとも 1 つ singular fiber を持つ. ($\Leftrightarrow \chi_{top}(\mathcal{O}_S)^{*18} > 0$)

この論文では上の条件に更に S : rational^{*19} を課した elliptic surface (つまり **rational elliptic surface**) を考える.

命題 1.1.

$C, S, f : S \longrightarrow C$ は定義 1.1 と同じものとする.

新たに, S : rational を仮定する. (このとき自動的に $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$, $C \cong \mathbb{P}^1$ を満たす.)

このとき、次の 3 条件は同値.

- (1) $f : S \longrightarrow C$ は (section を持つ) rational elliptic surface.
- (2) f は section を持ち, 射 f に対応する linear system は $|-K_S|$ である.
- (3) S は $\mathbb{P}^2$ の 9 回 blow-up と同型であり, 射 f に対応する linear system は $|3\tilde{H} - \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i^{*20}|$ である.
(ここで $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, E_i は i 回目の blow-up での exceptional curve.)

証明.

^{*18} 位相的オイラー数. この同値性の証明は例えば [2]

^{*19} $\mathbb{P}^2$ と双有理同値である surface.

^{*20} この論文では $\sim$ により全変換を表すこととする. たとえば i 回目の blow-up を ϵ_i と書いて, $\tilde{E}_i := (\epsilon_9 \circ \cdots \circ \epsilon_{i+1})^*(E_i)$

・ (1) $\Rightarrow$ (2)

canonical bundle formula より,

$$K_S \sim (2g(C) - 2 + \chi(\mathcal{O}_S))F = -F$$

が成立. (ここで $\sim$ は線形同値を表す.)

従って, f に対応する linear system を L としたとき, $L \subset |F| = |-K_S|$ を満たす. この等号を示すため, 任意に $C' \in |-K_S|$ を取ると, $S = \bigcup_{x \in C'} F_x$ (ここで F_x は点 x におけるファイバー) なので, C' と交わるファイバー F が存在する. いま, 交点数 $C' \cdot F = 0$ なので $C' \subset F$, つまり $C' : \text{vertical}^{*21}$ とわかる. これと $C'^2 = 0$ より, $C' = F$ が従う. ($\because$ section を持つ elliptic surface では, vertical かつ自己交点数 0 である曲線はファイバーと等しい^{*22}.)

・ (1) $\Leftarrow$ (2)

定義 1.1 の (1) $\sim$ (4) を満たすことをチェックする.

- ・ $g(F) = 1$ であること :
genus formula より,

$$2g(F) - 2 = F^2 + F \cdot K_S = F^2 + F \cdot (-F) = 0$$

従って $g(F) = 1$ を得る.

- ・ general fiber F が smooth であること :
これは Bertini の定理そのもの. ($\text{char}(k) = 0$ に注意.)
- ・ 相対極小性 :
任意の vertical curve C_1 ($\in \text{Div}(S)$) に対して, $C_1 \cdot K_S = C_1 \cdot (-F) = 0$ (≥ 0)
つまり $K_S : \text{relatively nef}$ が従う.
- ・ 少なくとも 1 つ section を持つこと :
これは (2) であらかじめ仮定している.
- ・ 少なくとも 1 つ singular fiber を持つこと :
これは $S : \text{rational}$ から従う. 具体的には, $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ から Noether's formula より $\chi_{\text{top}}(\mathcal{O}_S) = 12$ (> 0) となる.

以上より, (1) と (2) の同値性は示された.

(2), (3) の同値性の前に, (1) から従うことを整理しておこう.

$\text{Pic}(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$, つまり線形同値, 代数的同値, 数値的同値は全て等しい.

特に, S の Picard number $\rho(S) = \text{rk } \text{Pic}(S) = b_2(S) = 12 - 2 = 10$. ($q(S) = b_1(S) = 0$.)

この結果から ($\rho(\mathbb{P}^2) = 1$ と合わせて), S は $\mathbb{P}^2$ の 9 点 blow-up に同型ではないかと予想される.

・ (2) $\Leftarrow$ (3)

^{*21} $f(C') = \{\text{pt}\}$ となる S 上の effective divisor

^{*22} 証明は例えば [7] Prop8.2

$\epsilon : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ 9 回 blow-up として, blow-up の一般論より,

$$\begin{aligned} K_S &\sim \epsilon^* K_{\mathbb{P}^2} + \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2 + \cdots + \tilde{E}_9 \\ &= \epsilon^*(-3H) + \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i \\ &= -3\tilde{H} + \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i \end{aligned}$$

射 f に対応する linear system は $| -K_S |$ である.

section の存在は, (-1) -curve の存在を示せばよく^{*23}, E_9 がこれを満たす.

・ (2) $\Rightarrow$ (3)

以下の 2 つのことを示せばよい;

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } S \text{ が } \mathbb{P}^2 \text{ の 9 回 blow-up と同型であること} \\ \text{(b) } -K_S = 3\tilde{H} - \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i \end{array} \right.$$

(a) S : rational であり, 以下の補題 1.1 から S の minimal model は $\mathbb{P}^2$ または $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_2$ (Hirzebruch surface) となる. もし minimal model が $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_2$ であったとしても elementary translation を施すことにより, S の minimal model として $\mathbb{P}^2$ が取れることが従う.

$\rho(S) = 10$, $\rho(\mathbb{P}^2) = 1$ なので, birational morphism $S \rightarrow \mathbb{P}^2$ は 9 回 blow-up に同型であることが示された.

(b) (a) と (2) $\Leftarrow$ (3) の証明より従う.

□

補題 1.1.

rational surfaces の minimal model は $\mathbb{P}^2$ または $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_2$ (Hirzebruch surface) に限る.

つまり rational surface S を blow-down していくと, 必ず $\mathbb{P}^2$ または $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_2$ になる.

証明.

曲面論の一般論から rational surfaces の minimal model は $\mathbb{P}^2$ または $\mathcal{F}_n$ (ただし $n \neq 1$) に限る. 今, S 内の任意の rational non-singular curve の自己交点数は genus formula より -2 以上であり, 一般に $\mathcal{F}_n$ は $(-n)$ -curve を持つことから, $-n \geq -2$, つまり $n = 0, 1, 2$ を得る.

□

この命題 1.1(3) を用いれば, 概要で述べた目標 (1) を示すことが出来る.

^{*23} genus formula と $K_S \sim -F$ より従う. 詳しくは命題 3.1.

linear system $|3\tilde{H} - \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i|$ において, E_i を E_9 から順につぶしていくことで, 次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} S & \searrow & |3\tilde{H} - \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i| \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow P \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon : 9 \text{ 回 blow-down} \\ P : |3H| \text{ の 1 次元 sublinear system} \end{array} \right.$$

P は, 次の定理 1.1 より, 各 base point $p \in \mathbb{P}^2$ において, $\min_{D \in P} \text{mult}_p D = 1$ となる $|3H|$ の 1 次元 sublinear system, つまり $n = 1$ (命題 1.2 の記号) なる **cubic pencil** である.

以上より (Φ の対応の存在を認めれば)^{*24} Φ の全射性が示された.

定理 1.1. [elimination of indeterminacy]

surface S 上の linear system P で固定成分を持たないものを取る. ($l = \dim P$ とおく.) このとき surface S 上の点を有限回 blow-up を施して base point free にできる.

つまり, P に対して以下の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \hat{S} & \searrow & \text{射} \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow P \\ S & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^l \end{array}$$

証明.

P の各 base point x において blow-up $\epsilon : S_1 \rightarrow S$ を行う. このとき, P の全変換 ϵ^*P は E_1 を固定成分に持つので, $k := \min_{D \in P} \text{mult}_p D$ として, 新たな linear system $P_1 := \epsilon^*P - kE_1$ は固定成分を持たない. この操作を繰り返せばよい.

$$\left(\begin{array}{l} \because \text{有限回で止まること:} \\ \{ \epsilon_l : S_l \rightarrow S_{l-1} : \text{blow-up, } P_l \subset |D_l| : S_l \text{ 上の linear system} \}_{l \geq 1} \\ \text{が, } D_l = \epsilon^*D_{l-1} - k_l E_l \text{ (} k_l \geq 0 \text{) を満たす. このとき } \{D_l^2\}_{l \geq 1} \text{ は正值単調減少数列である. これ} \\ \text{は, } l \gg 0 \text{ で base point free となることを示している.} \end{array} \right)$$

□

この証明から分かるように, D の自己交点数 D^2 は blow-up の回数の上界である. 今考えている cubic pencil $P = \langle C, C' \rangle \subset |3H|$ についてみると, blow-up の回数の上界は $(3H)^2 = 9$ である.

実はどんな cubic pencil に関しても rational elliptic surface が得られるとは限らない. 実際 $\mathbb{P}^2$ 上の cubic

^{*24} 次の命題 1.2 で示す.

pencil は次の 3 パターンに分類することができる. この (1) から Φ の対応が定まる.

命題 1.2.

$P = \langle C, C' \rangle : \mathbb{P}^2$ 上の cubic pencil. (C, C' : 異なる 2 つの cubics, 可約なものも含む.)

この base point を blow-up によって解消した linear system は次の 3 パターンのいずれかである.

($n := \max_{p \in C \cap C'} \min \{\text{mult}_p C, \text{mult}_p C'\}$ とおくと, これは pencil P ごとに定まる値.)

- (1) $n = 1 \Rightarrow 9$ 回 blow-up することで P は $|3\tilde{H} - \tilde{E}_1 - \tilde{E}_2 - \cdots - \tilde{E}_9|$ となる.
- (2) $n = 2 \Rightarrow 6$ 回 blow-up することで P は $|3\tilde{H} - 2\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2 \cdots - \tilde{E}_6|$ の subpencil となる.
- (3) $n = 3 \Rightarrow 1$ 回 blow-up することで P は $|3\tilde{H} - 3\tilde{E}_1|$ の subpencil となる.

証明.

・ n の well-defined 性

上で定義された n が pencil P の代表元 C, C' の取り方に依らないことを示す.

つまり, 各 $p \in C \cap C'$ に対して $\{\text{mult}_p C\}_{C \in P}$ は,

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ 全て同じ値} \\ \text{or} \\ \cdot \text{ 1 つの } C'' \in P \text{ でのみ大きい値を取り, それ以外は同じ値} \end{array} \right.$$

のいずれかであることを示せばよい.

あらかじめ平行移動しておくことで $p = (0 : 0 : 1)$ としておく.

$m := \text{mult}_p C, \quad m' := \text{mult}_p C'$ とおくと, ($1 \leq m \leq m' \leq 3$ と仮定して一般性を失わない.)

$$\left\{ \begin{array}{l} C \text{ の定義方程式 } g(x, y) = g_m(x, y) + g_{m+1}(x, y) + \cdots + g_3(x, y) \\ C' \text{ の定義方程式 } h(x, y) = h_{m'}(x, y) + h_{m'+1}(x, y) + \cdots + h_3(x, y) \end{array} \right. \text{ と表せる.}$$

(a) $m < m'$ のとき,

P の一般元 C'' の定義方程式は $\lambda g + \mu h = \lambda g_m(x, y) + \cdots$ と表せるので, $\text{mult}_p C'' = m$ が従う.

($\lambda \neq 0$ に注意.) よって, $(*)$ が成立.

(b) $m = m'$ のとき,

このとき P の元 C'' の定義方程式で m 次の項が消えうるものは 1 つだけであるが, このとき, $\text{mult}_p C'' \geq m$ なので, $(*)$ が成立.

以上より n の well-defined 性が確かめられた.

- (1) C, C' の全ての交点 p に対し, $\min \{\text{mult}_p C, \text{mult}_p C'\} = 1$ なので, 上の定理 1.1 より有限回の blow-up の結果, 新しい linear system は,

$$\epsilon^* P - \tilde{E}_1 - \cdots - \tilde{E}_k : \text{ base point free}$$

の形になる. (blow-up の回数を $k (\leq 9)$ とおく.) このとき $k = 9$ を示す.

上の $(*)$ より 有限個の元 $F (\in P)$ を除いて, $\forall p (\in C \cap C'), \text{mult}_p F = 1$ を満たす. F の k 回 blow-up

による強変換 $\hat{F}$ は linear sytem $\epsilon^*P - \tilde{E}_1 - \cdots - \tilde{E}_k$ に含まれ, これは base point free なので, $\hat{F}^2 = 0$.
 もともと $F^2 = 3^2 = 9$ かつ $p \in F$: smooth point であったので, 9 回 blow-up であることがわかる.
 後は $\epsilon^*P - \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i = |3\tilde{H} - \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i|$ であることを示せばよい.
 $\subseteq$ は自明なので, $\supseteq$ のみを示そう.

右辺の任意の元 $D \in |3\tilde{H} - \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i|$ は $\mathbb{P}^2$ 上のある 3 次曲線 C'' を用いて, $D = \epsilon^*C'' - \sum_{i=1}^9 \tilde{E}_i$ と表せる. (この 3 次曲線 C'' は各 D に対して一意の.*²⁵)
 C'' は各 base point を通るので, Max-Noether の定理より $C'' \in P$ が従う.

- (2) (1) と同様に考えて, $n = 6$ を示したい. (1) との違いは, C と C' の交点の中に, $\text{mult}_p(C'') = 2$ (for $C'' \in P$: general) となる点 p が存在することである. (一般に既約 3 次曲線は重複度 2 の点を持つとすると 1 点に限る.)

この点を中心に 1 回 blow-up すると, 特異点が解消され rational curve となり, 自己交点数は $2^2 = 4$ 下がる. 残りの $n - 1$ 回は smooth point において blow-up するので, 自己交点数の関係は,

$$9 - 4 - (n - 1) = 0 \quad \therefore n = 6$$

- (3) 一般に既約 3 次曲線は重複度 3 以上の点を持たないので, この C, C' はともに次の例 (3) にあるような形に限る. これは 1 回 blow-up すれば全て離れる.

□

命題 1.1 と命題 1.2 により 以下のことが分かる. これが 1.1 節のメインの結果である.

系 1.1.

$P = \langle C, C' \rangle$: $\mathbb{P}^2$ 上の cubic pencil (C, C' :異なる 2 つの cubics, 可約なものも含む) とする.

このとき 以下が成立.

- (1) blow-up して rational elliptic surface になる cubic pencil は以下の条件を満たすものに限る.

$$\forall p \in C \cap C', \min \{ \text{mult}_p C, \text{mult}_p C' \} = 1$$

- (2) 概要で述べた以下の対応 Φ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \left\{ \mathbb{P}^2 \text{ 上の cubic pencil } \mid \forall p \in C \cap C', \min \{ \text{mult}_p C, \text{mult}_p C' \} = 1 \right\} & \longrightarrow & \{ \text{rational elliptic surfaces} \} \\ \cup & & \cup \\ P & \longmapsto & f : S \rightarrow \mathbb{P}^1 \end{array}$$

- (3) Φ は全射である. (目標 (1) が示された!)

証明. (3) 命題 1.1 の後に述べた議論より従う.

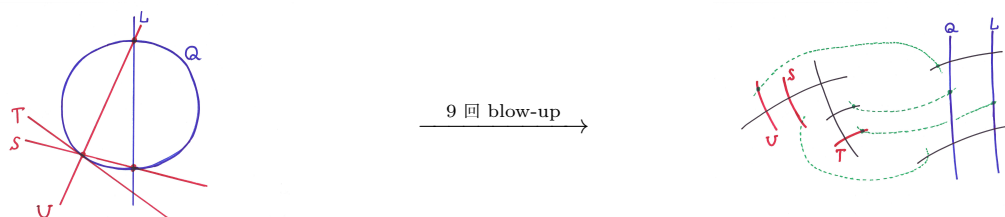
□

*²⁵ $\epsilon^*C''_1 = \epsilon^*C''_2$ とすると, この 2 つの 3 次曲線 C''_1, C''_2 は有限個の base point を除いた $\mathbb{P}^2$ の non-empty Zariski open set 上で等しいことから従う.

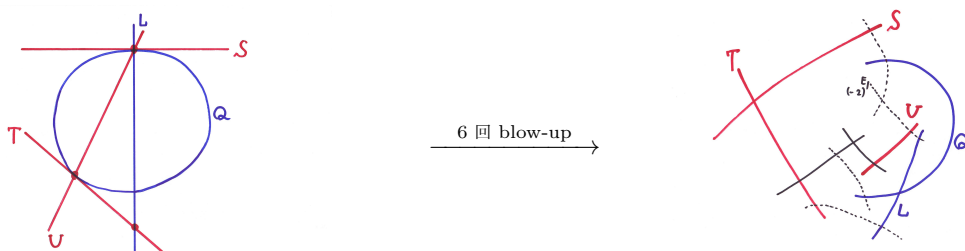
例 1.1.

上の命題 1.2 で分類された 3 つの cubic pencil に対して, 各々具体例を挙げると以下の通り.
(cubic pencil の生成元を 青色と赤色で図示し, また linear system に含まれない curve は点線で図示することとする.)

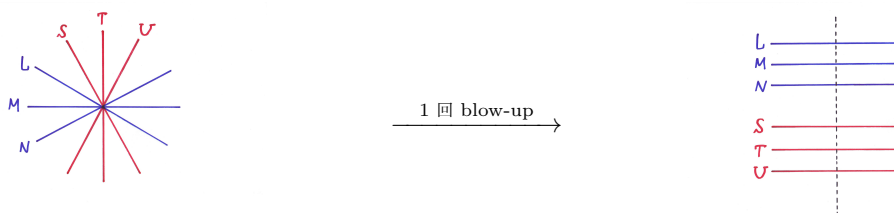
(1) $n = 1$ の場合.



(2) $n = 2$ の場合.



(3) $n = 3$ の場合.



さて, この論文では直接用いないが, Φ の対応を具体的に調べる上で役立つ命題を述べておこう. 上の命題によって, cubic pencil が与えられれば blow-up の回数は計算できるが, 各 base point において何回 blow-up すればよいかはまだわかっていなかった. これを局所交点数と深く関係付けたのが次の命題である.

命題 1.3.

cubic pencil $P = \langle C, C' \rangle$ の各 base point p に対して,

- (1) $\min \{\text{mult}_p C, \text{mult}_p C'\} = 1 \Rightarrow$ 点 p において, $I_p(C \cap C')$ ^{*26} 回 blow-up すればよい.
 (2) $\min \{\text{mult}_p C, \text{mult}_p C'\} = 2 \Rightarrow$ 点 p において, $I_p(C \cap C') - 3$ 回 blow-up すればよい.

証明.

・ (2) $\Rightarrow$ (1)

$F \in P$ (general なもの) に対して, cubics の一般論から $\text{mult}_p F = 2$ なる点 p はただ 1 つであり, また cubic は特異点があっても 1 回の blow-up で解消されるので, 後半は前半と命題 1.2 より従う.

・ (1)

これは cubic pencil という条件は不要なので, より一般的に示そう. いま, C は点 p を smooth point として持つと仮定でき, blow-up の度に自己交点数は 1 下がる. 従って, 交点数も blow-up の度に 1 下がっていくので, 局所交点数の数だけ blow-up すれば点 p の上では 2 つの曲線は離れる.

□

^{*26} surface S 上の 2 つの curve C, C' の交点 p における局所交点数

1.2 Mordell-Weil lattice の一般論

この節では次章で用いる elliptic surface の一般論や, Mordell-Weil lattice の一般論を主に [7] や [5] から引用する. 証明等はここではほぼ行わず, 結果のみを引用する.

$f : S \rightarrow C$: elliptic surface に対し, K を C の関数体として, $E(K)$ を section 全体の集合とすると, これと K -rational point 全体の集合は 1 対 1 に対応する. 特にこれは群構造を持つ. K -rational point $P \in E(K)$ に対応する section を (P) で表すこととする. また $R := \{v \in C \mid f^{-1}(v) : \text{singular fiber}\}$, $C' := C - R$ とおく.

1.2.1 Néron model

[8] 第 7 章参照.

$S' := f^{-1}(C')$, $f' := f|_{S'} : S' \rightarrow C'$ とおくと,

任意の $v \in C'$ に対して, $f^{-1}(v)$ は $O(v)$ を単位元とする elliptic curve であり, この群構造によって,

$$\begin{array}{ccc} S' \times_{C'} S' & := \{ (x, y) \in S' \times S' \mid f(x) = f(y) \} & \longrightarrow S' \\ \cup & & \cup \\ (x, y) & & \longmapsto x - y \end{array}$$

は morphism になる. (つまり $f' : S' \rightarrow C'$ は $O|_{C'}$ を単位元とする group scheme.)

この group scheme structure を $f : S \rightarrow C$ に伸ばしたい. しかし group scheme になるには f : smooth でなければならないことを考慮して, $S^\sharp := \{x \in S \mid f : \text{smooth at } x\}$ とおき, smooth morphism

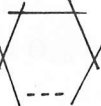
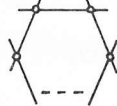
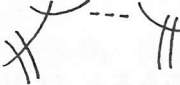
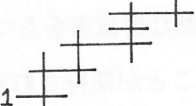
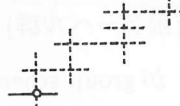
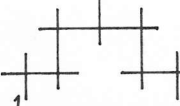
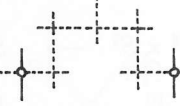
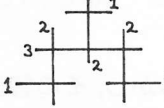
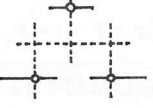
$$\begin{array}{ccc} f^\sharp := f|_{S^\sharp} : & S^\sharp & \longrightarrow C \\ \cup & & \cup \\ S' & \longmapsto & C' \end{array}$$

を考えよう.

$(f^{-1}(v))^\sharp = f^{-1}(v) \cap S^\sharp$ はもとの singular fiber から特異点を除いた重複度 1 の既約成分からなるものであり, ここには自然な群演算が入る^{*27}が, この群構造により $f^\sharp : S^\sharp \rightarrow C$ は実は group scheme となる. この group scheme を **Néron model** といい, 群構造は type に応じて以下の通りである.

^{*27} $\mathbb{G}_a \times (\text{有限アーベル群})$, $\mathbb{G}_m \times (\text{有限アーベル群})$ の形.

定理 (7.1) $f^\sharp : S^\sharp \rightarrow C$ は, $f' : S' \rightarrow C'$ の group scheme structure と compatible な unique な group scheme structure (単位元は O) をもつ. そして, 特異ファイバー $f^{-1}(v)$ に対して, $(f^{-1}(v))^\sharp$ 上の group structure は, その型に応じて次の通り.

$f^{-1}(v)$ の型	$m_v^{(1)}$	$(f^{-1}(v))^\sharp$	$(f^{-1}(v))^\sharp$ の群構造
I_1 	1		$G_m (= k^\times)$
I_2 	2		$G_m \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
I_b ($b \geq 3$) 	b		$G_m \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$
II 	1		$G_a (= k)$
III 	2		$G_a \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
IV 	3		$G_a \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
I_b^* 	4		$G_a \times \begin{cases} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & (b \text{ が奇数}) \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & (b \text{ が偶数}) \end{cases}$
II^* 	1		G_a
III^* 	2		$G_a \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
IV^* 	3		$G_a \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

特に $(f^{-1}(v))^\sharp \cong (\text{単位元成分}) \times (\text{有限アーベル群})$, $|\text{有限アーベル群}| = m_v^{(1)}$ の形であり, I_b 型 ($b \geq 0$) を除くと, すべてその群構造は additive type である.

1.2.2 平行移動

[7] III 章 9 節参照.

任意の rational point $P \in E(K)$ に対応する section (P) の定める平行移動 $\tau_P \in \text{Aut}(S/C)^{*28}$ が以下のよう

に定義される.
任意の点 $x \in C$ の上のファイバー F_x と section (P) との交点を $\text{sp}_x(P)$ で表したとき, 各 elliptic curve F_x 上に “点 $\text{sp}_x(P)$ を足す” という次の自己同型が定義される.

$$\begin{array}{ccc} F_x & \xrightarrow{\text{点 sp}(P) \text{ を足す}} & F_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \longmapsto & \text{sp}_x(P) + Q \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ここで「足す」とは elliptic curve の群演算によるもの} \end{array}$$

点 x を動かすことで, birational map $\tau_P : C \dashrightarrow C$ が定義される.(Zariski-open set $C - R$ 上では同型写像であることに注意.)

ここで S の相対極小性^{*29} を用いると, これは C 上に拡張できる.^{*30}

以上より, 次の対応が存在する.

$$\begin{array}{ccc} E(K) & \longrightarrow & \text{Aut}(S/C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longmapsto & \tau_P \end{array}$$

この τ_P を, section P の定める平行移動という.

命題 1.4. [平行移動の性質]

(1) この map は群準同型, つまり

$$\forall P, Q \in E(K), \quad \tau_{P+Q} = \tau_P \circ \tau_Q$$

(2) $\forall P, Q \in E(K), \quad \tau_P((Q)) = (P + Q)$

証明.

(1) [7] prop9.1 (b)

(2) (1) を用いると $Q = 0$ の場合を示せばよく, これは τ の定義の仕方から自明.

□

τ_P は C 上の射なので, τ_P を singular fiber F_v 上に制限することで, (アプリアリには群構造を持たない) **singular fiber** 上にも群構造が誘導されたことになる. 更に定め方からこの群構造は Néron model によるも

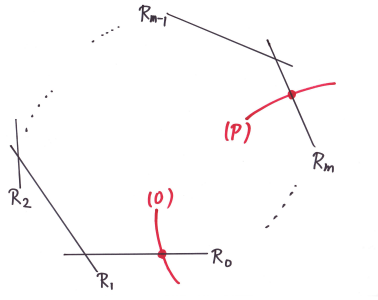
^{*28} C 上の射であり, S 上の自己同型写像全体のなす群

^{*29} 定義 1.1(a) 参照

^{*30} [7] prop9.1(2)

のと両立する.

例 1.2. $[I_n]$ 型について



$(O), (P)$ が左図のような位置関係のとき,
 τ_P は section を時計回りに m 個ずらす map である.

Néron model の群構造より, section (P) が既約成分 R_m を通ることを, $P = [m]$ と表すこととすると,
 $a \cdot P = [am]$ が成立する. つまり, rational point に対応する section がどの既約成分を通るかを表す写像は群
準同型となる.

$$\begin{array}{ccc} E(K) & \xrightarrow{[\cdot]} & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad \text{群準同型} \\ \Psi & & \Psi \\ P & \longmapsto & [P] \end{array}$$

以下, $E(K)/E(K)_0$ が巡回群である **singular fiber** に対しては, 上のように群構造を保つように既約成
分の番号付けを行うこととする. 唯一巡回群とならない I_n^* 型 (n : even) に対しては, 混乱を避けるため n :
odd の場合と同様の番号付けを行うこととする.

$$\left(\begin{array}{l} \text{つまりこのとき, } \{0, 1, 2, 3\} \text{ に,} \\ \quad 0: \text{単位元} \quad 1+1=0 \quad 2+2=0 \quad 3+3=0 \\ \quad \quad \quad 1+2=3 \quad 2+3=1 \quad 3+1=2 \\ \text{なる群構造を入れることとなる.} \\ \text{便宜上, } 0 := 00, 1 := 01, 2 := 10, 3 := 11 \text{ と 2 進} \\ \text{数表記するとわかりやすい.} \end{array} \right)$$

1.2.3 lattice の定義

一般に次を満たす map が一意的に存在する.

$$\phi: E(K) \longrightarrow NS(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

$$(1) \phi(P) \equiv (P) \pmod{T \otimes \mathbb{Q}}$$

$$(2) \phi(P) \perp T$$

更に $\text{Ker } \phi = E(K)_{\text{tor}}$ が成立.

この map ϕ と S 上の交点数を用いて, height pairing が以下のように定義される.

$$\forall P, Q \in E(K), \quad \langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} -\phi(P) \cdot \phi(Q) \in \mathbb{Q}$$

このとき $(E(K)/E(K)_{\text{tor}}, \langle, \rangle)$ は positive-definite lattice となる. これを $f: S \rightarrow C$ の **Mordell-Weil lattice** といい, pairing $\langle, \rangle$ を **height pairing** という. torsion element と height の関係は以下の通り.

$$P \in E(K)_{\text{tor}} \Leftrightarrow \phi(P) = 0 \Leftrightarrow \langle P, P \rangle = 0$$

この height pairing はもともと $\phi(P), \phi(Q)$ という「わかりにくい」section どうしの交点数として定義されているが, 実は $(P), (Q)$ という「わかりやすい」section どうしの交点数で表すことができる. この公式はこの論文における理論的根拠の 1 つとなる公式である.

定理 1.2. [explicit formula of height pairing]

$\forall P, Q \in E(K),$

$$\langle P, Q \rangle = 2\chi(\mathcal{O}_S) + (P) \cdot (O) + (Q) \cdot (O) - (P) \cdot (Q) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P, Q)$$

特に,

$$\langle P, P \rangle = 2\chi(\mathcal{O}_S) + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

但し, $\text{contr}_v(P) := \text{contr}_v(P, P)$ と表す.

ここで, $\text{contr}_v(P, Q)$ は以下のような値を取る.

注意 (5.6) $F_v = f^{-1}(v)$ と P (resp. Q) が $\Theta_{v,i}$ (resp. $\Theta_{v,j}$) ($i, j \geq 1$) で交わる時, $\text{contr}_v(P, Q)$, $\text{contr}_v(P)$ の値は次の表で与えられる.

Type of F_v	I_b ($b \geq 2$)	I_b^* ($b \geq 0$)
番号付け		
$\text{contr}_v(P)$	$i(b-i)/b$	$\begin{cases} 1 & (i=1) \\ 1+b/4 & (i \geq 2) \end{cases}$
$\text{contr}_v(P, Q)$ ただし, $i \leq j$	$i(b-j)/b$	$\begin{cases} 1 & (i=j=1) \\ 1/2 & (i=1, j \geq 2) \\ (b+2)/4 & (2 \leq i \leq j) \\ 1 + \frac{b}{4} & (2 \leq i=j) \end{cases}$

III	III*	IV	IV*
$1/2$	$3/2$	$2/3$	$4/3$
$1/2$	$3/2$	$\begin{cases} 2/3 & (i=j) \\ 1/3 & (i \neq j) \end{cases}$	$\begin{cases} 4/3 & (i=j) \\ 2/3 & (i \neq j) \end{cases}$

2 rational elliptic surface の dual graph の決定

2.1 分類に先立って

この章では概要にて記した次の目標 (3), (3)' について説明する.

- $$\begin{cases} (3) \text{ rational elliptic surface の singular fiber と section の位置関係を表す dual graph の構造決定} \\ (3)' \text{ rational elliptic surface の singular fiber と互いに交わらない section からなる dual graph の構造決定} \end{cases}$$

2.2 節では $r = 0$ の場合を, 2.3 節では $r = 1$ の場合について解説する. この (特に $r = 1$ の場合の) 結果がオリジナルの結論である.

以下の定理は分類の結果導かれるものである.

定理 2.1.

singular fiber と section の位置関係を表す dual graph は各 T とその E_8 への埋め込み方に対して一意的に存在する.

以後, これを確かめるため, 74 通り 1 つ 1 つ check していこう.

この章で使う理論的事実の大部分は以下の命題である.

命題 2.1.

rational elliptic surface に対して以下が成立.

- (1) $\langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$
- (2) torsion section どうしは交わらない. 特に,

$$\forall P \in E(K)_{\text{tor}} - \{O\}, \quad \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) = 2$$

が成立する.

証明.

- (1) rational elliptic surface S に対して, $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ が成立するので, 定理 1.2 から従う.
- (2) 前半を認めれば, 後半は (1) から従う. 前半の証明は [2] .

□

命題 2.1 の式はよく用いるので, 以下のように

$$(\spadesuit) \quad \forall P \in E(K), \quad \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

で表すこととする.

また命題 2.1(2) からの帰結として, $r = 0$ の場合は上の目標 (3), (3)' は一致することがわかる.

分類に先立ち, 以下の記号 $[\]$ を定義しておく. 任意の rational point $P \in E(K)$ に対して, section (P) の各 singular fiber を通る既約成分が T の表記で 左から 順に $(i_1, i_2, \dots)$ であるとき, $P = [i_1, i_2, \dots]$ と表す. 以後, i_k を P の i_k 成分, $[i_1, i_2, \dots]$ を P の座標 と呼ぶこととする. 定め方から $O = [0, 0, \dots]$ であり, 一般には $E(K)_0$ の定義から, $P = [0, 0, \dots, 0] \iff P \in E(K)_0$ も成立する. このように定義された $[\]$ の定める写像に対して以下が成立する.

命題 2.2.

rational elliptic surface において, $G := \prod(\text{singular fiber の既約成分のなす群})$ とおくと, 以下が成立する.

- (1) $E(K) \xrightarrow{[\]} G$ は群準同型
- (2) $E(K)_{\text{tor}}$ への制限写像は単射.

証明.

- (1) 群準同型となるように既約成分の番号付けを行っていたので自明. (例 1.2 参照)
- (2) $E(K)_{\text{tor}} \cap E(K)_0 = \{O\}^{*31}$ より従う.

□

以下の分類においてはこの命題を以下の形で用いる.

・ $r = 0$ の場合

$E(K)_{\text{tor}} = E(K)$ なので, 上の群準同型 $E(K) \xrightarrow{[\]} G$ は単射. 特に,

$$\forall P \in E(K), \quad P = O \iff P = [0, 0, \dots, 0]$$

が成立.

・ $r \geq 1$ の場合

$\forall m \in \mathbb{Z}$, 群準同型 $E(K) \xrightarrow{[\]} G$ の $mP + E(K)_{\text{tor}}$ への制限写像は単射

つまり, $mP + E(K)_{\text{tor}} \xrightarrow{\text{res}[\]} G' (\subset G)$ に対して,

$$\sharp\{mP + E(K)_{\text{tor}}\} \leq \sharp\{G'\} \implies mP + E(K)_{\text{tor}} = G'$$

が成立.

写像 $[\]$ を用いれば, 目標である dual graph の構造決定とは, $E(K)$ の各元の座標の組を求めることに他ならず, つまり写像 $[\]$ の像を決定すればよいこととなる. 更に群構造から $E(K)^{*32}$ の生成元 $P_1, P_2, \dots, P_r$ と torsion (の生成元) についてのみ $[\]$ を調べれば十分である. 従って, $E(K)_{\text{tor}}, E(K)_{\text{tor}} + P_1, E(K)_{\text{tor}} + P_2, \dots, E(K)_{\text{tor}} + P_r$ の $[\]$ による像を決定しよう.

^{*31} [8] 補題 5.8(3)

^{*32} $E(K) = \mathbb{Z}P_1 \oplus \mathbb{Z}P_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}P_r \oplus E(K)_{\text{tor}}$

2.2 $r = 0$ の場合 (No.62 ~ No.74)

[5] に依れば, $r = 0$ の場合の T とその E_8 への埋め込み方や $E(K)$ は以下のように分類されている:

No.	T	$E(K)$
62	E_8	0
63	A_8	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
64	D_8	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
65	$E_7 \oplus A_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
66	$A_5 \oplus A_2 \oplus A_1$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
67	$A_4^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
68	$A_2^{\oplus 4}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$
69	$E_6 \oplus A_2$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
70	$A_7 \oplus A_1$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
71	$D_6 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
72	$D_5 \oplus A_3$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
73	$D_4^{\oplus 2}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
74	$(A_3 \oplus A_1)^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

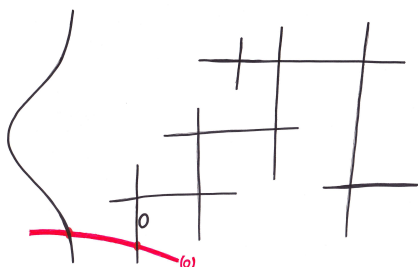
$r = 0$ のとき, $E(K)_{\text{tor}} = E(K)$ であるので,

$$(\spadesuit) \quad \forall P \in E(K) - \{O\}, \quad \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) = 2$$

が成立. 更に前節で注意したように, 群準同型 $E(K) \xrightarrow{[1]} G$ は単射である.

また以下の図において, **section** は赤色で図示している.

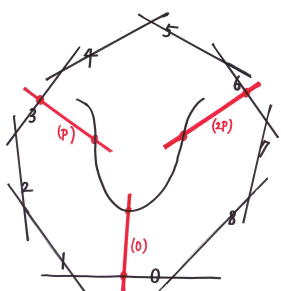
2.2.1 No.62 E_8



$E(K) \cong \{0\}$, つまり section は 1 個である. section は singular fiber の 重複度 1 の成分としか交わらないので左図に限る.

$$E(K) = \{O\}, O = [0]$$

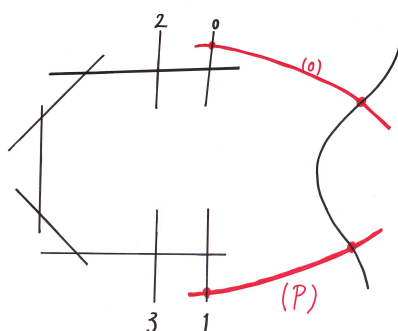
2.2.2 No.63 A_8



$E(K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, つまり section は 3 個である. $E(K)$ の生成元を P とし, $P = [i]$ とおくと, $\text{contr}_v(P) = \frac{i(9-i)}{9}$ ($i = 0, 1, \dots, 8$) より, ($\spadesuit$) を用いて, $\frac{i(9-i)}{9} = 2 \Leftrightarrow i^2 - 9i + 18 = 0 \therefore i = 3, 6$. 対称性から $P = [3]$ としてよい. 群構造から $2P = [6]$ も従う. 以上より, graph は左図に限る.

$$E(K) = \{O, P, 2P\}, O = [0], P = [3], 2P = [6]$$

2.2.3 No.64 D_8



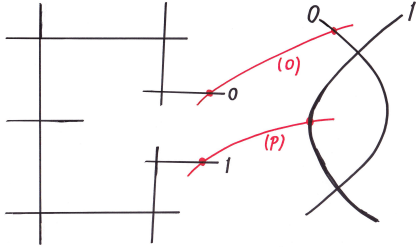
$E(K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, つまり section は 2 個である. この群の生成元を P とし, $P = [i]$ とおくと,

i	0	1	2	3
$\text{contr}_v(P)$	0	2	1	2

なので ($\spadesuit$) より $i = 1, 3$ に限る. 対称性より $i = 1$ としてよい. 以上より, graph は左図に限る.

$$E(K) = \{O, P\}, O = [0], P = [1]$$

2.2.4 No.65 $E_7 \oplus A_1$



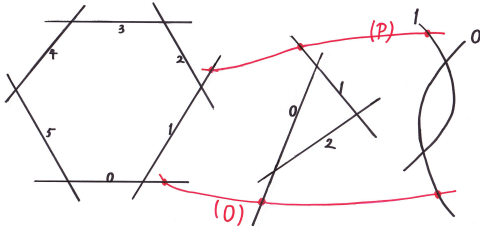
$E(K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, つまり section は 2 個である. この群の生成元を P とし, $P = [i_1, i_2]$ とおくと,

i_1	0	1	i_2	0	1
$contr_{v_1}(P)$	0	$3/2$	$contr_{v_2}(P)$	0	$1/2$

なので (♠) より和が 2 になる組は $(i_1, i_2) = (1, 1)$ に限る. 以上より, graph は左図に限る.

$$E(K) = \{O, P\}, \quad O = [0, 0], P = [1, 1]$$

2.2.5 No.66 $A_5 \oplus A_2 \oplus A_1$

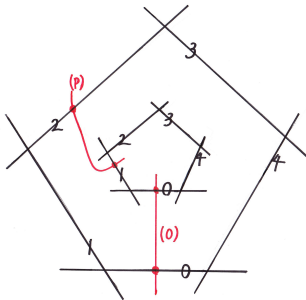


$E(K) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, つまり section は 6 個である. この群の生成元を P とし, $P = [i_1, i_2, i_3]$ とおく. 対称性から $i_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i_2 \in \{0, 1\}$ としてよい.

i_1	0	1	2	3	
$contr_{v_1}(P)$	0	5/6	4/3	3/2	
i_2	0	1	i_3	0	1
$contr_{v_2}(P)$	0	2/3	$contr_{v_3}(P)$	0	1/2

(♠) より和が 2 になる組は, $(i_1, i_2, i_3) = (1, 1, 1), (2, 1, 0), (3, 0, 1)$ に限る. この中で位数 6 の元は $P = (1, 1, 1)$ しかない. (命題 2.2 を用いた.) 以上より, graph は左図に限る.

2.2.6 No.67 $A_4^{\oplus 2}$

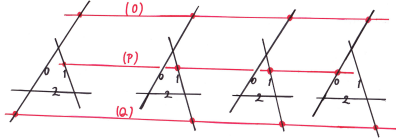


$E(K) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, つまり section は 5 個である. この群の生成元を P とし, $P = [i_1, i_2]$ とおく (内側の 5 角形を i_1 成分とする). 対称性から $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq 2$ としてよい.

i	0	1	2
$contr_v(P)$	0	$4/5$	$6/5$

(♠) より和が 2 になる組は, $(i_1, i_2) = (1, 2)$ に限る. 以上より, graph は左図に限る.

2.2.7 No.68 $A_2^{\oplus 4}$

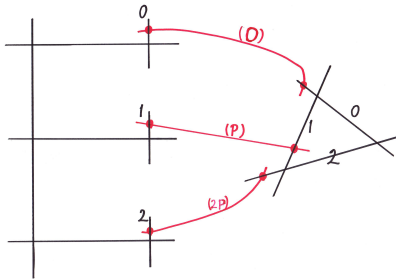


$E(K) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. この群の生成元を P, Q とすると, 命題 2.2 より, P の座標には 0 でない成分が存在する. 対称性より P の i_1 成分 = 1 と仮定してよい.

i	0	1	2
$\text{contr}_v(P)$	0	2/3	2/3

(♠) より和が 2 になる組を考えると, 対称性から $P = [1, 1, 1, 0]$ に限ってよい. 次に Q についてであるが, Q の i_4 成分 $\neq 0$ が成り立つ. もし $i_4=0$ であれば, $Q = [1\text{or}2, 1\text{or}2, 1\text{or}2, 0]$ となり, $(0 \neq)Q - P = [0\text{or}1, 0\text{or}1, 0\text{or}1, 0]$ を得, contr の和が 2 になる組を考えれば, $Q - P = [1, 1, 1, 0] (= P)$, つまり $Q = 2P$ となってしまう, これは Q の取り方に矛盾. 従って Q の i_4 成分 = 1 としてよく, contr を考えると, i_1 成分と i_2 成分と i_3 成分の対称性から $Q = [0, 1, 1, 1]$ しかない. 以上より, graph は上図に限る.

2.2.8 No.69 $E_6 \oplus A_2$

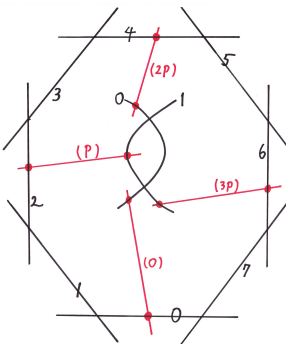


$E(K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, つまり section は 3 個である. この群の生成元を P とし, $P = [i_1, i_2]$ とおくと, 対称性から $\{i_1, i_2\} \subset \{0, 1\}$ としてよい.

i_1	0	1	i_2	0	1
$\text{contr}_{v_1}(P)$	0	4/3	$\text{contr}_{v_2}(P)$	0	2/3

(♠) より和が 2 になる組は $(i_1, i_2) = (1, 1)$ に限る. 以上より, graph は左図に限る.

2.2.9 No.70 $A_7 \oplus A_1$

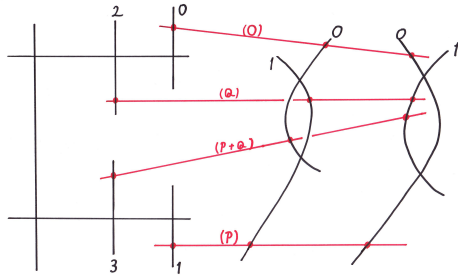


$E(K) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, つまり section は 4 個である. この群の生成元を P とし, $P = [i_1, i_2]$, (i_1 成分は 8 角形の既約成分を表す) とおくと, P の位数は 4 なので, $i_1 \in \{2, 6\}$ でなければならない. ($\because i_2$ 成分は 4 倍すると必ず 0 になるので考慮しなくてよい.) 対称性から $i_1 = 2$ としてよい.

i_1	2	i_2	0	1
$\text{contr}_{v_1}(P)$	3/2	$\text{contr}_{v_2}(P)$	0	1/2

(♠) より和が 2 になる組は $(i_1, i_2) = (2, 1)$ に限る. 以上より, graph は左図に限る.

2.2.10 No.71 $D_6 \oplus A_1^{\oplus 2}$



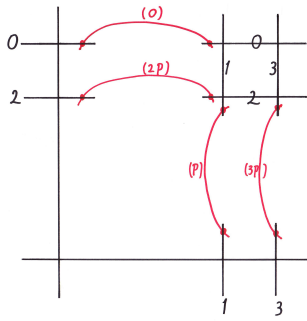
$E(K) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, つまり section は 4 個である. この群の生成元を P, Q とする. 4 個の section の i_1 成分は互いに異なる. なぜならば, もし P と Q の i_1 成分が等しいとすると, $(0 \neq) Q - P$ の i_1 成分 $= 0$ となるが, このとき $contr$ の和が 2 となる組は存在しない (矛盾).

i_1	0	1	2	3
$contr_{v_1}(P)$	0	3/2	1	3/2

i_2	0	1	i_3	0	1
$contr_{v_2}(P)$	0	1/2	$contr_{v_3}(P)$	0	1/2

上の事実と, (♠) より和が 2 になる組を考えて, 対称性から $P = [1, 1, 0], Q = [2, 1, 1], P + Q = [3, 0, 1]$ に限ってよいことがわかる. (D_6 の群演算は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ であることに注意.) 以上より, graph は上図に限る.

2.2.11 No.72 $D_5 \oplus A_3$

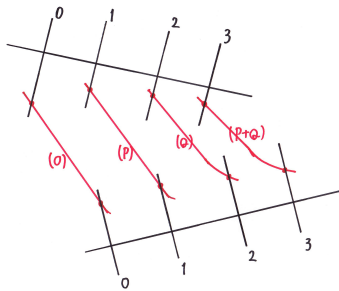


$E(K) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, つまり section は 4 個である. この群の生成元を P とし, $P = [i_1, i_2]$ とおくと, 対称性から $\{i_1, i_2\} \subset \{0, 1, 2\}$ としてよい.

i_1	0	1	2	i_2	0	1	2
$contr$	0	$5/4$	1	$contr$	0	$3/4$	1

(♠) より和が 2 になる組は $[1, 1], [2, 2]$ に限るが, この中で位数 4 の元は $[1, 1]$ しかない. つまり $P = [1, 1]$ となる. 以上より, graph は左図に限る.

2.2.12 No.73 $D_4^{\oplus 2}$

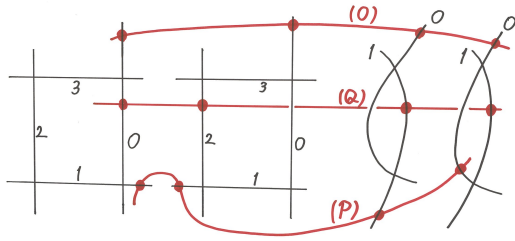


$E(K) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, つまり section は 4 個である. この群の生成元を P, Q とする. No.71 での議論と全く同様にして, 4 個の section の i_1 成分は互いに異なる.

i_1	0	1	2	3
$contr_{v_1}(P)$	0	1	1	1

上の事実と, (♠) より和が 2 になる組を考えて, $P = [1, 1]$ としてよい. 次に Q であるが, $\{i_2, i_3\} \subset \{2, 3\}$ であるので, 対称性から $Q = [2, 2]$ としてよいことがわかる. 以上より, graph は左図に限る.

2.2.13 No.74 $(A_3 \oplus A_1)^{\oplus 2}$



$E(K) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, つまり section は 8 個である. この群の生成元を P (位数 4), Q (位数 2) とする. 対称性を用いると P について, $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq 2$, $i_3 \geq i_4$ と仮定してよい. 更に, P の位数は 4 なので, $(i_1, i_2) = (0, 1), (1, 1), (1, 2)$ に限ることがわかる. (♠) より $contr$ の和が 2 になる組を考えると $P = [1, 1, 1, 0]$ しかない.

i_1	0	1	2	3
$contr$	0	3/4	1	3/4

i_2	0	1	2	3
$contr$	0	3/4	1	3/4

i_3	0	1
$contr$	0	1/2

i_4	0	1
$contr$	0	1/2

次に Q についてであるが, 依然 i_1 成分と i_2 成分には対称性があるので, $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq 2$ としてよい. Q の位数は 2 なので, $(i_1, i_2) = (0, 0), (0, 2), (2, 2)$ に限ることがわかる. (♠) より $contr$ の和が 2 になる組を考えると, $Q = [0, 2, 1, 1], [2, 2, 0, 0](= 2P)$ の 2 通りの可能性が残る. しかし Q の定め方から $Q \neq 2P$ なので, 後者では無いことがわかる. 従って, $Q = [0, 2, 1, 1]$ であることが示された. 以上より, graph は上図に限る.

以上の分類結果より $r = 0$ の場合の定理 2.1 の主張も確かめられた.

2.3 $r = 1$ の場合 (No.43 ~ No.61)

[5] に依れば, $r = 0$ の場合の T とその E_8 への埋め込み方や $E(K)$ は以下のように分類されている。

No.	T	$E(K)$
43	E_7	$\langle 1/2 \rangle$
44	A_7	$\langle 1/2 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
45	A_7	$\langle 1/8 \rangle$
46	D_7	$\langle 1/4 \rangle$
47	$A_6 \oplus A_1$	$\langle 1/14 \rangle$
48	$D_6 \oplus A_1$	$\langle 1/2 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
49	$E_6 \oplus A_1$	$\langle 1/6 \rangle$
50	$D_5 \oplus A_2$	$\langle 1/12 \rangle$
51	$A_5 \oplus A_2$	$\langle 1/2 \rangle \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
52	$D_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 1/4 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
53	$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 1/6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
54	$D_4 \oplus A_3$	$\langle 1/4 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
55	$A_4 \oplus A_3$	$\langle 1/20 \rangle$
56	$A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$	$\langle 1/30 \rangle$
57	$D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$\langle 1/2 \rangle \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
58	$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$	$\langle 1/2 \rangle \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
59	$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 1/12 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
60	$A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\langle 1/4 \rangle \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
61	$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	$\langle 1/6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

ここで, $\langle m \rangle := \mathbb{Z}x$; $\langle x, x \rangle = m$ を表す。

分類にあたって, 以下の順序で調べていく。

- ① $E(K)$ の生成元が定める section が (O) と交わらないこと
- ② $E(K)$ の生成元, torsion の座標
- ③ (O) と交わらない section の集合 $\mathfrak{S}$
- ④ (O) を含み, 互いに交わらない section の集合 $\mathfrak{S}'$

・ ①については以下の判定条件 (*) を用いて確かめる。

$P \in E(K)$ に対して, (P) が (O) と交わるためには, 少なくとも

$$\langle P, P \rangle + \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) \geq 4$$

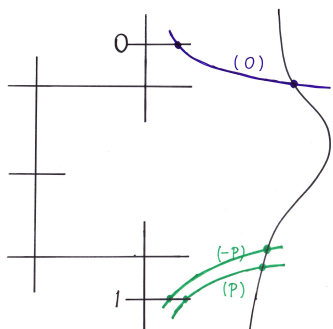
を満たさなければならない。つまり,

$$(*) \quad \langle P, P \rangle + \sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} < 4 \implies (P) \text{ と } (O) \text{ は交わらない.}$$

が成立。

・ 以下の図において, (O) は青色で, torsion は赤色で, それ以外の section は緑色で図示している。

2.3.1 No.43 E_7



$E(K) \cong \langle \frac{1}{2} \rangle$. 生成元を P とおく. $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$

① $(*)$ を確かめればよい.

$\max\{contr_v(P)\} = \frac{3}{2}$ かつ $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$ なの
で, $(*)$ の左辺 $= 2 < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1
$contr_{v_1}$	0	$3/2$

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - contr_v(P)$$

② $(\spadesuit) \iff \frac{1}{2} = 2 - contr_v(P) \iff contr_v(P) = \frac{3}{2}$
従って $P = [1]$ となる.

③ $mP \in E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$(mP) \cdot (O) = 0 \implies \frac{m^2}{2} = 2 - contr_v(mP) \leq 2$$

従って $m = \pm 1, \pm 2$ とわかる. ($m = 0$ のときは, $(O) \cdot (O) = -1$ となり不適.)

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \{-2P = [0], -P = [1], P = [1], 2P = [0]\}$$

逆に, 右辺の任意の元は左辺に含まれることも $(\spadesuit)$ からわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P = [0] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-2)^2}{2} = 2 + 2(-2P) \cdot (O) - 0 \iff (-2P) \cdot (O) = 0 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

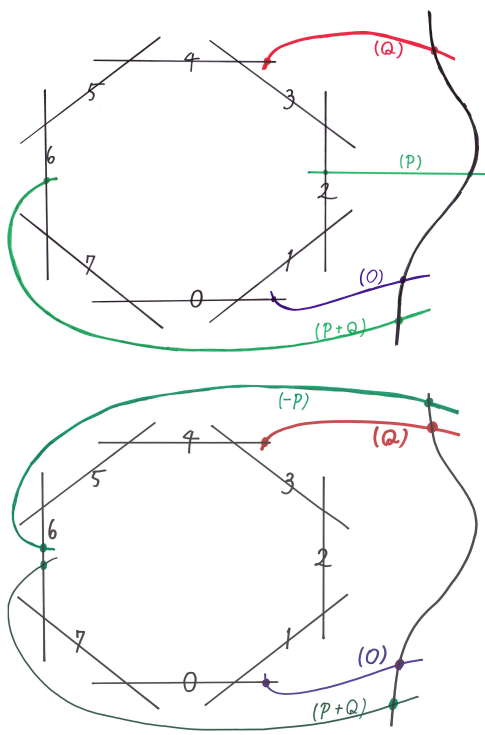
以上より, $\mathfrak{S} = \{-2P = [0], -P = [1], P = [1], 2P = [0]\}$ が示された.

④ ③において, $(-2P)$ と (P) は交わる.

($\because \tau_{2P}$ で変換して, これは (O) と $(3P)$ が交わることに同値. ③でこれらは交わることをみた.)

同様の議論を繰り返して, $\mathfrak{S}' = \{-2P, -P, O\}, \{-P, O, P\}, \{O, P, 2P\}$ とわかる. しかしこれらは互いに τ_P などの平行移動でうつり合うので, graph としては $\{-P, O, P\}$ のときの graph と全て等しい. 以上より, graph は左上図に限る.

2.3.2 No.44 A_7



$E(K) \cong \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる. ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$, Q は位数 2 の元.

① $(*)$ を確かめればよい.

$\max\{\text{contr}_v(P)\} = 2$ かつ $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$ なの
で, $(*)$ の左辺 $= \frac{5}{2} < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 7	2, 6	3, 5	4
contr_{v_1}	0	7/8	3/2	15/8	2

(♠) $\forall P \in E(K)$, $\langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \text{contr}_v(P)$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \text{contr}_v(Q) \iff \text{contr}_v(Q) = 2$$

従って $E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0], [4]\}$ となるが, 両辺の位数はともに 2 なので,

$E(K)_{\text{tor}} = \{[0], [4]\}$ となる. ($Q = [4]$)

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{2} = 2 - \text{contr}_v(P) \iff \text{contr}_v(P) = \frac{3}{2}$$

となる. 従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[2], [6]\}$ となるが, 両辺の位数はともに 2 なので,

$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[2], [6]\}$ となる. (対称性より $P = [2]$ としてよい.)

③ $mP + E(K)_{\text{tor}} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{\text{tor}} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{2} = 2 - \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{cccccc} -2P = [4] & -P = [6] & P = [2] & 2P = [4] & & \\ -2P + Q = [0] & -P + Q = [2] & Q = [4] & P + Q = [6] & 2P + Q = [0] & \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $-2P$ と $2P$ は左辺に含まれず, それ以外は含まれることも (♠) を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P = [4] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-2)^2}{2} = 2 + 2(-2P).(O) - 2 \iff (-2P).(O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{cccccc} & -P = [6] & & P = [2] & & \\ -2P + Q = [0] & -P + Q = [2] & Q = [4] & P + Q = [6] & 2P + Q = [0] & \end{array} \right\}$$

④ ③において, $(-P)$ と (P) は交わる.

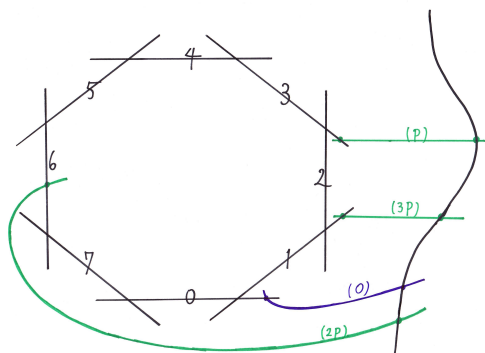
($\because \tau_P$ で変換して, これは (O) と $(2P)$ が交わることと同値. ③でこれらは交わることをみた.)

しかし $(-P)$ と $(P + Q)$ は交わらない. このことに注意して, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は以下の 2 通り.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{cc} O = [0] & P = [2] \\ Q = [4] & P + Q = [6] \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} -P = [6] & O = [0] \\ & Q = [4] \quad P + Q = [6] \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は上図のように 2 通りが存在する.

2.3.3 No.45 A_7



$E(K) \cong \langle \frac{1}{8} \rangle$. 生成元を P とおく. $\langle P, P \rangle = \frac{1}{8}$

① $(*)$ を確かめればよい.

$\max\{contr_v(P)\} = 2$ かつ $\langle P, P \rangle = \frac{1}{8}$ なの
で, $(*)$ の左辺 $= \frac{17}{8} < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 7	2, 6	3, 5	4
$contr_{v_1}$	0	$7/8$	$3/2$	$15/8$	2

$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P). (O) - contr_v(P)$

② $(\spadesuit) \iff \frac{1}{8} = 2 - contr_v(P) \iff contr_v(P) = \frac{15}{8}$
従って $P \in \{[3], [5]\}$ となる. 対称性より $P = [3]$ としてよい.

③ $mP \in E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$(mP). (O) = 0 \implies \frac{m^2}{8} = 2 - contr_v(mP) \leq 2$$

従って $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ とわかる. ($m = 0$ のときは, $(O). (O) = -1$ となり不適.)

$\therefore \mathfrak{S} \subset \{-4P = [4], -3P = [7], -2P = [2], -P = [5], P = [3], 2P = [6], 3P = [1], 4P = [4]\}$
逆に, 右辺の元のうち, $\pm 4P$ は左辺に含まれず, それ以外は左辺に含まれることも $(\spadesuit)$ からわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -4P = [4] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-4)^2}{8} = 2 + 2(-4P). (O) - 2 \iff (-4P). (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より, $\mathfrak{S} = \{-3P = [7], -2P = [2], -P = [5], P = [3], 2P = [6], 3P = [1]\}$ を得る.

④ ③において, $(-P)$ と $(3P)$ は交わる.

($\because \tau_P$ で変換して, これは (O) と $(4P)$ が交わることと同値. ③でこれらは交わることをみた.)

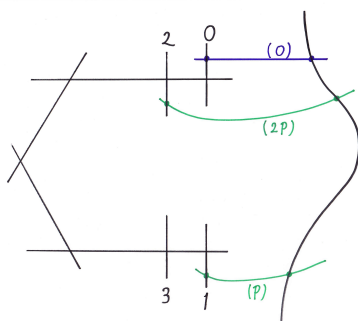
このことに注意して, dual graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$\mathfrak{S}' = \{O = [0], P = [3], 2P = [6], 3P = [1]\}$, 以上より, graph は左上図に限る.

注意. No.44 と No.45 の見分け方として, この分類結果から以下が成立することがわかる.

奇数番目の既約成分と交わる section が存在する $\iff$ No.45

2.3.4 No.46 D_7



$E(K) \cong \langle \frac{1}{4} \rangle$. 生成元を P とおく. $\langle P, P \rangle = \frac{1}{4}$

① $(*)$ を確かめればよい.

$\max\{contr_v(P)\} = \frac{7}{4}$ かつ $\langle P, P \rangle = \frac{1}{4}$ なの
で, $(*)$ の左辺 $= 2 < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 3	2
$contr_{v_1}$	0	7/4	1

$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - contr_v(P)$

② $(\spadesuit) \iff \frac{1}{4} = 2 - contr_v(P) \iff contr_v(P) = \frac{7}{4}$
従って $P \in \{[1], [3]\}$ となる. 対称性より $P = [1]$ としてよい.

③ $mP \in E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$(mP) \cdot (O) = 0 \implies \frac{m^2}{4} = 2 - contr_v(mP) \leq 2$$

従って $m = \pm 1, \pm 2$ とわかる. ($m = 0$ のときは, $(O) \cdot (O) = -1$ となり不適.)

$\therefore \mathfrak{S} \subset \{-2P = [2], -P = [3], P = [1], 2P = [2]\}$

逆に, 右辺の任意の元は左辺に含まれることも $(\spadesuit)$ からわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P = [2] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-2)^2}{4} = 2 + 2(-2P) \cdot (O) - 1 \iff (-2P) \cdot (O) = 0 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より, $\mathfrak{S} = \{-2P = [2], -P = [3], P = [1], 2P = [2]\}$ を得る.

④ ③において, $(-P)$ と $(2P)$ は交わる.

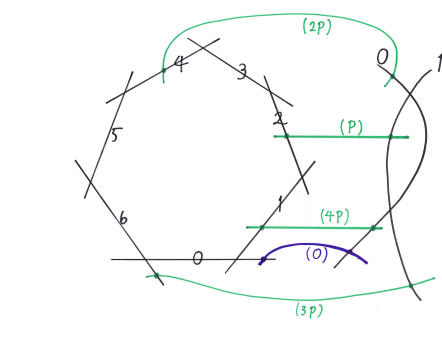
($\because \tau_P$ で変換して, これは (O) と $(3P)$ が交わることに同値. ③でこれらは交わることをみた.)

このことに注意して, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$\mathfrak{S}' = \{O = [0], P = [1], 2P = [2]\}$

以上より, graph は左上図に限る.

2.3.5 No.47 $A_6 \oplus A_1$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{14} \rangle$. 生成元を P とおく. $\langle P, P \rangle = \frac{1}{14}$

① $(*)$ を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{contr_v(P)\} = \frac{12}{7} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{14}$$

なので, $(*)$ の左辺 $= \frac{25}{14} < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 6	2, 5	3, 4	i_2	0	1
$contr_{v_1}$	0	6/7	10/7	12/7	$contr_{v_2}$	0	1/2

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} contr_v(P)$$

$$\textcircled{2} (\spadesuit) \iff \frac{1}{14} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(P) \iff (contr_{v_1}(P), contr_{v_2}(P)) = \left(\frac{10}{7}, \frac{1}{2}\right)$$

従って $P \in \{[2, 1], [5, 1]\}$ となる. 対称性より $P = [2, 1]$ としてよい.

③ $mP \in E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$(mP) \cdot (O) = 0 \implies \frac{m^2}{14} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(mP) \leq 2$$

従って $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ とわかる. ($m = 0$ のときは, $(O) \cdot (O) = -1$ となり不適.)

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{ccccc} P = [2, 1] & 2P = [4, 0] & 3P = [6, 1] & 4P = [1, 0] & 5P = [3, 1] \\ -P = [5, 1] & -2P = [3, 0] & -3P = [1, 1] & -4P = [6, 0] & -5P = [4, 1] \end{array} \right\}$$

このうち $\pm 5P$ は左辺に含まれず, それ以外は左辺に含まれることも $(\spadesuit)$ からわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } 5P = [3, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{5^2}{14} = 2 + 2(5P) \cdot (O) - \frac{12}{7} - \frac{1}{2} \iff (5P) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

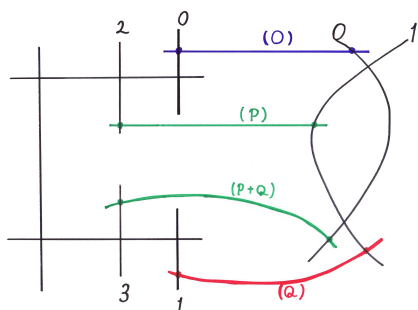
$$\mathfrak{S} = \{-4P = [6, 0], -3P = [1, 1], -2P = [3, 0], -P = [5, 1], P = [2, 1], 2P = [4, 0], 3P = [6, 1], 4P = [1, 0]\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \{O = [0, 0], P = [2, 1], 2P = [4, 0], 3P = [6, 1], 4P = [1, 0]\}$$

以上より, graph は左上図に限る.

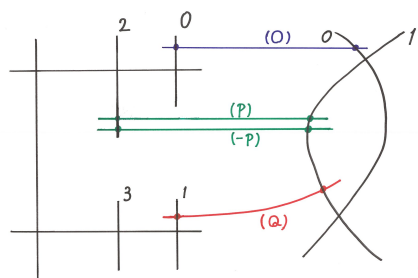
2.3.6 No.48 $D_6 \oplus A_1$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{2} \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる.
ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$, Q は位数 2 の元.

① (*) を確かめればよい.

$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = \frac{3}{2}$ かつ $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$ なので,
(*) の左辺 = 2 < 4. 従って (*) が成立.



i_1	0	1, 3	2
contr_{v_1}	0	3/2	1

i_2	0	1
contr_{v_2}	0	1/2

(♠) $\forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q) \iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

従って $E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0, 0], [1, 1], [3, 1]\}$ となるが, 対称性より $Q = [1, 1]$ としてよい.

以上より $E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0], [1, 1]\}$ となる.

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{2} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) \iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P)) = \left(\frac{3}{2}, 0\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

となる. 従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[1, 0], [2, 1], [3, 0]\}$ となる. 左辺は $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じているが, 右辺の $[1, 0]$ は Q を加えることで右辺には無い元 $[0, 1]$ が生まれることとなり矛盾.

従って $P + E(K)_{\text{tor}} = \{[2, 1], [3, 0]\}$ となる. (どの元も生成元となるので, $P = [2, 1]$ としてよい.)

③ $mP + E(K)_{\text{tor}} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{\text{tor}} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{2} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [0, 0] & -P = [2, 1] & P = [2, 1] & 2P = [0, 0] & \\ -2P + Q = [1, 1] & -P + Q = [3, 0] & Q = [1, 1] & P + Q = [3, 0] & 2P + Q = [1, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $-2P + Q$ と $2P + Q$ は左辺に含まれず, それ以外は含まれることも ($\spadesuit$) を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P + Q = [1, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-2)^2}{2} = 2 + 2(-2P + Q) \cdot (O) - 2 \iff (-2P + Q) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

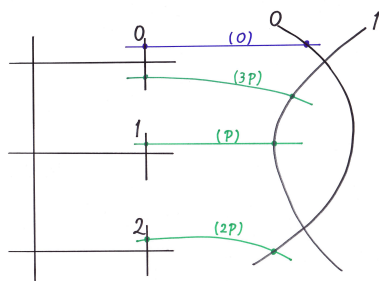
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [0, 0] & -P = [2, 1] & P = [2, 1] & 2P = [0, 0] & \\ & -P + Q = [3, 0] & Q = [1, 1] & P + Q = [3, 0] & \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は以下の 2 通り.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{cc} O = [0, 0] & P = [2, 1] \\ Q = [1, 1] & P + Q = [3, 0] \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} -P = [2, 1] & O = [0, 0] & P = [2, 1] \\ & Q = [1, 1] & \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は上図のように 2 通りが存在する.

2.3.7 No.49 $E_6 \oplus A_1$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{6} \rangle$. 生成元を P とおく. $\langle P, P \rangle = \frac{1}{6}$

① $(*)$ を確かめればよい.

$\sum_{v \in R} \max\{contr_v(P)\} = \frac{11}{6}$ かつ $\langle P, P \rangle = \frac{1}{6}$ なの
で, $(*)$ の左辺 $= 2 < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 2	i_2	0	1
$contr_{v_1}$	0	4/3	$contr_{v_2}$	0	1/2

$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} contr_v(P)$

$$\textcircled{2} (\spadesuit) \iff \frac{1}{6} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(P) \iff (contr_{v_1}(P), contr_{v_2}(P)) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

従って $P \in \{[1, 1], [2, 1]\}$ となる. 対称性より $P = [1, 1]$ としてよい.

③ $mP \in E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$(mP) \cdot (O) = 0 \implies \frac{m^2}{6} = 2 - \sum_{v \in R} \max\{contr_v(mP)\} \leq 2$$

従って $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ とわかる. ($m = 0$ のときは, $(O) \cdot (O) = -1$ となり不適.)

$\therefore \mathfrak{S} \subset \{-3P = [0, 1], -2P = [1, 0], -P = [2, 1], P = [1, 1], 2P = [2, 0], 3P = [0, 1]\}$

逆に右辺の任意の元は左辺に含まれることも $(\spadesuit)$ からわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } 3P = [0, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{3^2}{6} = 2 + 2(3P) \cdot (O) - 0 - \frac{1}{2} \iff (3P) \cdot (O) = 0 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

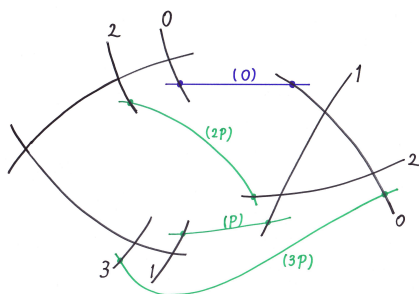
$\mathfrak{S} = \{-3P = [0, 1], -2P = [1, 0], -P = [2, 1], P = [1, 1], 2P = [2, 0], 3P = [0, 1]\}$ を得る.

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \{O = [0, 0], P = [1, 1], 2P = [2, 0], 3P = [0, 1]\}$$

以上より, graph は左上図に限る.

2.3.8 No.50 $D_5 \oplus A_2$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{12} \rangle$. 生成元を P とおく. $\langle P, P \rangle = \frac{1}{12}$

① $(*)$ を確かめればよい.

$\sum_{v \in R} \max\{contr_v(P)\} = \frac{23}{12}$ かつ $\langle P, P \rangle = \frac{1}{12}$ なの
で, $(*)$ の左辺 $= 2 < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 3	2
$contr_{v_1}$	0	5/4	1
i_2	0	1	
$contr_{v_2}$	0	2/3	

(♠) $\forall P \in E(K)$, $\langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} contr_v(P)$

$$\textcircled{2} \quad (\spadesuit) \iff \frac{1}{12} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(P) \iff (contr_{v_1}(P), contr_{v_2}(P)) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

従って $P \in \{[1, 1], [3, 1]\}$ となる. 対称性より $P = [1, 1]$ としてよい.

③ $mP \in E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$(mP) \cdot (O) = 0 \implies \frac{m^2}{12} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(mP) \leq 2$$

従って $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ とわかる. ($m = 0$ のときは, $(O) \cdot (O) = -1$ となり不適.)

$\therefore \mathfrak{S} \subset \{-3P = [1, 0], -2P = [2, 1], -P = [3, 2], P = [1, 1], 2P = [2, 2], 3P = [3, 0]\}$

逆に右辺の任意の元は左辺に含まれることも (♠) からわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -3P = [1, 0] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-3)^2}{12} = 2 + 2(-3P) \cdot (O) - \frac{5}{4} - 0 \iff (-3P) \cdot (O) = 0 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

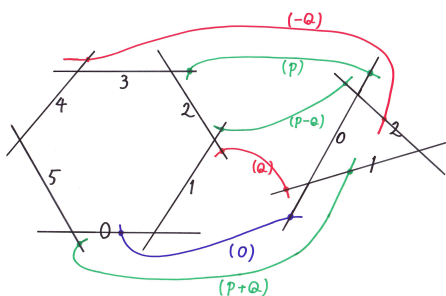
$\mathfrak{S} = \{-3P = [1, 0], -2P = [2, 1], -P = [3, 2], P = [1, 1], 2P = [2, 2], 3P = [3, 0]\}$ を得る.

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \{O = [0, 0], P = [1, 1], 2P = [2, 2], 3P = [3, 0]\}$$

以上より, graph は左上図に限る.

2.3.9 No.51 $A_5 \oplus A_2$

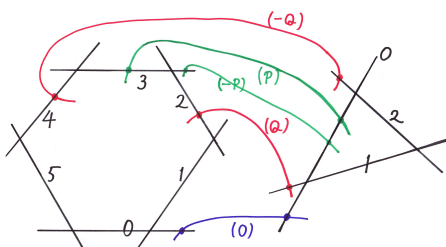


$E(K) \cong \langle \frac{1}{2} \rangle \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる.
ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$, Q は位数 3 の元.

① $(*)$ を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = \frac{13}{6} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{2} \text{ なの}$$

で, $(*)$ の左辺 $= \frac{8}{3} < 4$. 従って $(*)$ が成立.



i_1	0	1, 5	2, 4	3
contr_{v_1}	0	5/6	4/3	3/2
i_2	0	1, 2		
contr_{v_2}	0	2/3		

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q) \iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q)) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

となる. 従って $E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0, 0], [2, 1], [2, 2], [4, 1], [4, 2]\}$ となるが, 対称性より $Q = [2, 1]$ としてよい.

以上より $E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0], [2, 1], [4, 2]\}$ となる.

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{2} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) \iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P)) = \left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[1, 1], [1, 2], [3, 0], [5, 1], [5, 2]\}$ となる. 左辺は $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じているが, 右辺の $[1, 1], [5, 2]$ は Q を加えることで各々右辺には無い元 $[3, 2], [1, 0]$ が生まれることとなり矛盾. 左辺の位数は 3 なので,

$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[1, 2], [3, 0], [5, 1]\}$ となる. (どの元も生成元となるので $P = [3, 0]$ としてよい.)

③ $mP + E(K)_{tor} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{tor} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{2} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P - Q = [4, 2] & -P - Q = [1, 2] & -Q = [4, 2] & P - Q = [1, 2] & 2P - Q = [4, 2] \\ -2P = [0, 0] & -P = [3, 0] & & P = [3, 0] & 2P = [0, 0] \\ -2P + Q = [2, 1] & -P + Q = [5, 1] & Q = [2, 1] & P + Q = [5, 1] & 2P + Q = [2, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $\pm 2P + Q$ と $\pm 2P - Q$ は左辺に含まれず, それ以外は含まれることも ($\spadesuit$) を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P + Q = [2, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-2)^2}{2} = 2 + 2(-2P + Q) \cdot (O) - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \iff (-2P + Q) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

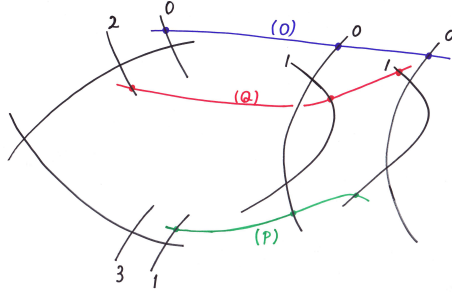
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{ccccc} & -P - Q = [1, 2] & -Q = [4, 2] & P - Q = [1, 2] & \\ -2P = [0, 0] & -P = [3, 0] & & P = [3, 0] & 2P = [0, 0] \\ & -P + Q = [5, 1] & Q = [2, 1] & P + Q = [5, 1] & \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は以下の 2 通り.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{cc} -Q = [4, 2] & P - Q = [1, 2] \\ O = [0, 0] & P = [3, 0] \\ Q = [2, 1] & P + Q = [5, 1] \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{cc} -Q = [4, 2] & \\ -P = [3, 0] & O = [0, 0] \\ Q = [2, 1] & P = [3, 0] \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は上図のように 2 通りが存在する.

2.3.10 No.52 $D_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{4} \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる. ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{4}$, Q は位数 2 の元.

① (*) を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{contr_v(P)\} = \frac{9}{4} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{4} \text{ なの}$$

ので, (*) の左辺 $= \frac{5}{2} < 4$. 従って (*) が成立.

i_1	0	1, 3	2
$contr_{v_1}$	0	5/4	1

i_2	0	1
$contr_{v_2}$	0	1/2

i_3	0	1
$contr_{v_3}$	0	1/2

(♠) $\forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P). (O) - \sum_{v \in R} contr_v(P)$

② $\cdot E(K)_{tor}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(Q) \iff (contr_{v_1}(Q), contr_{v_2}(Q), contr_{v_3}(Q)) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

となる. 従って $E(K)_{tor} \subset \{[0, 0, 0], [2, 1, 1]\}$ となる. 両辺の位数は 2 なので,

$$E(K)_{tor} = \{[0, 0, 0], [2, 1, 1]\} \text{ となる. } (Q = [2, 1, 1])$$

$\cdot P + E(K)_{tor}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{4}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{4} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(P) \iff (contr_{v_1}(P), contr_{v_2}(P), contr_{v_3}(P)) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

従って $P + E(K)_{tor} \subset \{[1, 1, 0], [1, 0, 1], [3, 1, 0], [3, 0, 1]\}$ となる. これは singular fiber において D_5 の既約成分 $\{1, 3\}$ や, $A_1^{\oplus 2}$ の順序を指定していない為に多く生じたものである. 右辺は $[1, 0, 1]$ を含むと仮定して一般性を失わない. このとき, $E(K)_{tor}$ の元 $Q = [2, 1, 1]$ を加えて, 右辺は $[3, 1, 0]$ も含む. 左辺の位数は 2 なので,

$$P + E(K)_{tor} = \{[1, 0, 1], [3, 1, 0]\} \text{ となる. (どの元も生成元となるので } P = [1, 0, 1] \text{ としてよい.)}$$

③ $mP + E(K)_{tor} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{tor} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{4} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{cccc} -2P = [2, 0, 0] & -P = [3, 0, 1] & P = [1, 0, 1] & 2P = [2, 0, 0] \\ -2P + Q = [0, 1, 1] & -P + Q = [1, 1, 0] & Q = [2, 1, 1] & P + Q = [3, 1, 0] & 2P + Q = [0, 1, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の任意の元は左辺に含まれることが $(\spadesuit)$ を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P + Q = [0, 1, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(-2)^2}{4} = 2 + 2(-2P + Q) \cdot (O) - 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad (-2P + Q) \cdot (O) = 0 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

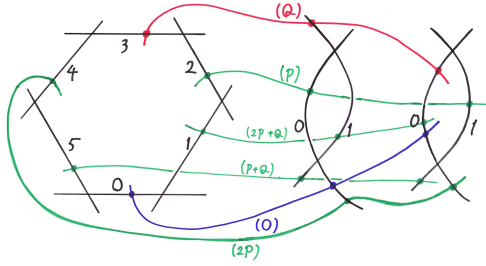
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{cccc} -2P = [2, 0, 0] & -P = [3, 0, 1] & P = [1, 0, 1] & 2P = [2, 0, 0] \\ -2P + Q = [0, 1, 1] & -P + Q = [1, 1, 0] & Q = [2, 1, 1] & P + Q = [3, 1, 0] & 2P + Q = [0, 1, 1] \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{ccc} O = [0, 0, 0] & P = [1, 0, 1] & 2P = [2, 0, 0] \\ Q = [2, 1, 1] & P + Q = [3, 1, 0] & 2P + Q = [0, 1, 1] \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は上のものに限る. ($(O), (P), (Q)$ のみ図示した.)

2.3.11 No.53 $A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$

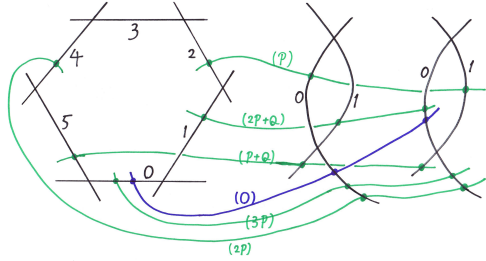


$E(K) \cong \langle \frac{1}{6} \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる. ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{6}$, Q は位数 2 の元.

① (*) を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = \frac{5}{2} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{6} \text{ な}$$

ので, (*) の左辺 = $\frac{8}{3} < 4$. 従って (*) が成立.



i_1	0	1, 5	2, 4	3
contr_{v_1}	0	5/6	4/3	3/2

i_2	0	1
contr_{v_2}	0	1/2

i_3	0	1
contr_{v_3}	0	1/2

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P). (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標 : $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q) \iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q), \text{contr}_{v_3}(Q)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

となる. 従って $E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0, 0, 0], [3, 1, 0], [3, 0, 1]\}$ となる. これ singular fiber において $A_1^{\oplus 2}$ の順序を指定していない為に多く生じたものである. 右辺は $[3, 1, 0]$ を含むと仮定して一般性を失わない. 両辺の位数は 2 なので,

$$E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0, 0], [3, 1, 0]\} \text{ となる. } (Q = [3, 1, 0])$$

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標 : $\langle P, P \rangle = \frac{1}{6}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{6} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) \iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P), \text{contr}_{v_3}(P)) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[1, 1, 1], [2, 0, 1], [2, 1, 0], [4, 0, 1], [4, 1, 0], [5, 1, 1]\}$ となる. 左辺は $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じているが, 右辺の $[2, 1, 0], [4, 1, 0]$ は Q を加えることで各々右辺には無い元 $[5, 0, 0]$,

$[1,0,0]$ が生まれることとなり矛盾. ここから,

$P + E(K)_{tor} = \{[1, 1, 1], [4, 0, 1]\}, \{[2, 0, 1], [5, 1, 1]\}$ の 2 通りの可能性があることがわかる.

しかしこれは, singular fiber において A_5 の左右の対称性の為に多く生じたものであるので, 右辺は $[2, 0, 1]$ を含むと仮定して一般性を失わない. 以上より,

$P + E(K)_{tor} = \{[2, 0, 1], [5, 1, 1]\}$ を得る. (どの元も生成元となるので $P = [2, 0, 1]$ としてよい.)

③ $mP + E(K)_{tor} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{tor} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{6} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{cccccc} -3P = [0, 0, 1] & -2P = [2, 0, 0] & -P = [4, 0, 1] & P = [2, 0, 1] & 2P = [4, 0, 0] & 3P = [0, 0, 1] \\ -3P + Q = [3, 1, 1] & -2P + Q = [5, 1, 0] & -P + Q = [1, 1, 1] & Q = [3, 1, 0] & P + Q = [5, 1, 0] & 2P + Q = [1, 1, 0] & 3P + Q = [3, 1, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $\pm 3P + Q$ は左辺に含まれず, それ以外は含まれることが $(\spadesuit)$ を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -3P + Q = [3, 1, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-3)^2}{6} = 2 + 2(-3P + Q) \cdot (O) - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \iff (-3P + Q) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

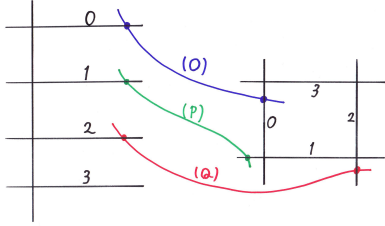
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{cccccc} -3P = [0, 0, 1] & -2P = [2, 0, 0] & -P = [4, 0, 1] & P = [2, 0, 1] & 2P = [4, 0, 0] & 3P = [0, 0, 1] \\ & -2P + Q = [5, 1, 0] & -P + Q = [1, 1, 1] & Q = [3, 1, 0] & P + Q = [5, 1, 0] & 2P + Q = [1, 1, 0] \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は以下の 2 通り.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{l} \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} O = [0, 0, 0] & P = [2, 0, 1] & 2P = [4, 0, 0] \\ Q = [3, 1, 0] & P + Q = [5, 1, 1] & 2P + Q = [1, 1, 0] \end{array} \right\} \\ \text{or} \\ \cdot \left\{ \begin{array}{ccc} O = [0, 0, 0] & P = [2, 0, 1] & 2P = [4, 0, 0] & 3P = [0, 0, 1] \\ & P + Q = [5, 1, 1] & 2P + Q = [1, 1, 0] \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は上図のように 2 通りが存在する.

2.3.12 No.54 $D_4 \oplus A_3$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{4} \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる.
ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{4}$, Q は位数 2 の元.

① (*) を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = 2 \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{4} \text{ なので,}$$

$$(*) \text{ の左辺} = \frac{9}{4} < 4. \text{ 従って } (*) \text{ が成立.}$$

i_1	0	1, 2, 3	i_2	0	1, 3	2
contr_{v_1}	0	1	contr_{v_2}	0	3/4	1

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q) \iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q)) = (1, 1)$$

となる. 従って $E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0, 0], [1, 2], [2, 2], [3, 2]\}$ となるが, 対称性より $Q = [2, 2]$ としてよい.

以上より $E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0], [2, 2]\}$ となる.

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{4}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{4} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) \iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P)) = \left(1, \frac{3}{4}\right)$$

従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[1, 1], [1, 3], [2, 1], [2, 3], [3, 1], [3, 3]\}$ となる. 左辺は $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じているが, 右辺の $[2, 1], [2, 3]$ は $Q = [2, 2]$ を加えることで右辺には無い元 $[0, 3], [0, 1]$ が生まれることとなり矛盾. ここから,

$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[1, 1], [3, 3]\}, \{[1, 3], [3, 1]\}$ の 2 通りの可能性があることがわかる.

しかしこれは, singular fiber において, A_3 の左右の対称性の為に多く生じたものである. 右辺は $[1, 1]$ を含むと仮定して一般性を失わない. 以上より,

$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[1, 1], [3, 3]\}$ を得る. (どの元も生成元となるので $P = [1, 1]$ としてよい.)

③ $mP + E(K)_{\text{tor}} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{\text{tor}} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{4} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [0, 2] & -P = [1, 3] & P = [1, 1] & 2P = [0, 2] & \\ -2P + Q = [2, 0] & -P + Q = [3, 1] & Q = [2, 2] & P + Q = [3, 3] & 2P + Q = [2, 0] \end{array} \right\}$$

右辺の任意の元は左辺に含まれることが $(\spadesuit)$ を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P + Q = [2, 0] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(-2)^2}{4} = 2 + 2(-2P + Q) \cdot (O) - 1 - 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (-2P + Q) \cdot (O) = 0 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

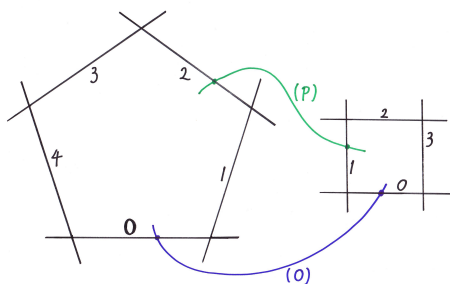
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [0, 2] & -P = [1, 3] & P = [1, 1] & 2P = [0, 2] & \\ -2P + Q = [2, 0] & -P + Q = [3, 1] & Q = [2, 2] & P + Q = [3, 3] & 2P + Q = [2, 0] \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{ccc} O = [0, 0] & P = [1, 1] & 2P = [0, 2] \\ Q = [2, 2] & P + Q = [3, 3] & 2P + Q = [2, 0] \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は上のものに限る. ($(O), (P), (Q)$ のみ図示した.)

2.3.13 No.55 $A_4 \oplus A_3$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{20} \rangle$. 生成元を P とおく. $\langle P, P \rangle = \frac{1}{20}$

① $(*)$ を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{contr_v(P)\} = \frac{49}{20} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{20}$$

なので, $(*)$ の左辺 $= \frac{5}{2} < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 4	2, 3
$contr_{v_1}$	0	4/5	6/5
i_2	0	1, 3	2
$contr_{v_2}$	0	5/4	1

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} contr_v(P)$$

$$\textcircled{2} (\spadesuit) \iff \frac{1}{20} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(P) \iff (contr_{v_1}(P), contr_{v_2}(P)) = \left(\frac{6}{5}, \frac{5}{4}\right)$$

従って $P \in \{[2, 1], [2, 3], [3, 1], [3, 3]\}$ となる. 対称性より $P = [2, 1]$ としてよい.

③ $mP \in E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$(mP) \cdot (O) = 0 \implies \frac{m^2}{20} = 2 - \sum_{v \in R} contr_v(mP) \leq 2$$

従って $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ とわかる. ($m = 0$ のときは, $(O) \cdot (O) = -1$ となり不適.)

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{cccccc} P = [2, 1] & 2P = [4, 2] & 3P = [1, 3] & 4P = [3, 0] & 5P = [0, 1] & 6P = [2, 2] \\ -P = [3, 3] & -2P = [1, 2] & -3P = [4, 1] & -4P = [2, 0] & -5P = [0, 3] & -6P = [3, 2] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $\pm 6P$ は左辺に含まれず, それ以外は左辺に含まれることも $(\spadesuit)$ からわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -6P = [3, 2] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-6)^2}{20} = 2 + 2(-6P) \cdot (O) - \frac{6}{5} - 1 \iff (-6P) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

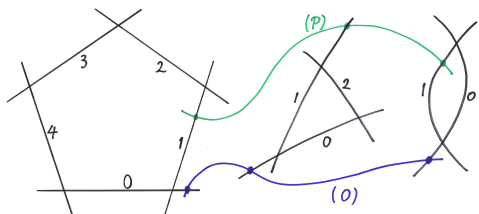
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{ccccc} P = [2, 1] & 2P = [4, 2] & 3P = [1, 3] & 4P = [3, 0] & 5P = [0, 1] \\ -P = [3, 3] & -2P = [1, 2] & -3P = [4, 1] & -4P = [2, 0] & -5P = [0, 3] \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \{O = [0, 0], P = [2, 1], 2P = [4, 2], 3P = [1, 3], 4P = [3, 0], 5P = [0, 1]\}$$

以上より, graph は左上図に限る. ($(O), (P)$ のみ図示した.)

2.3.14 No.56 $A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{30} \rangle$. 生成元を P とおく. $\langle P, P \rangle = \frac{1}{30}$

① $(*)$ を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = \frac{71}{30} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{30}$$

なので, $(*)$ の左辺 $= \frac{12}{5} < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 4	2, 3	i_2	0	1, 2	i_3	0	1
$contr_{v_1}$	0	4/5	6/5	$contr_{v_2}$	0	2/3	$contr_{v_3}$	0	1/2

(♠) $\forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P). (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$

$$\textcircled{2} \text{ (♠)} \iff \frac{1}{30} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) \iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P), \text{contr}_{v_3}(P)) = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

従って $P \in \{[1\text{or}4, 1\text{or}2, 1]\}$ となる. 対称性より $P = [1, 1, 1]$ としてよい.

③ $mP \in E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$(mP). (O) = 0 \implies \frac{m^2}{30} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7$ とわかる. ($m = 0$ のときは, $(O). (O) = -1$ となり不適.)

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{lllllll} P = [1, 1, 1] & 2P = [2, 2, 0] & 3P = [3, 0, 1] & 4P = [4, 1, 0] & 5P = [0, 2, 1] & 6P = [1, 0, 0] & 7P = [2, 1, 1] \\ -P = [4, 2, 1] & -2P = [3, 1, 0] & -3P = [2, 0, 1] & -4P = [1, 2, 0] & -5P = [0, 3, 1] & -6P = [4, 0, 0] & -7P = [3, 2, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $\pm 7P$ は左辺に含まれず, それ以外は左辺に含まれることも (♠) からわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -7P = [3, 2, 1] \text{ について,} \\ \text{(\♠)} \iff \frac{(-7)^2}{30} = 2 + 2(-7P). (O) - \frac{6}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \iff (-7P). (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

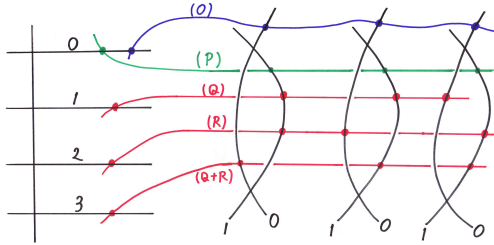
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{llllll} P = [1, 1, 1] & 2P = [2, 2, 0] & 3P = [3, 0, 1] & 4P = [4, 1, 0] & 5P = [0, 2, 1] & 6P = [1, 0, 0] \\ -P = [4, 2, 1] & -2P = [3, 1, 0] & -3P = [2, 0, 1] & -4P = [1, 2, 0] & -5P = [0, 3, 1] & -6P = [4, 0, 0] \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \{O = [0, 0, 0], P = [1, 1, 1], 2P = [2, 2, 0], 3P = [3, 0, 1], 4P = [4, 1, 0], 5P = [0, 2, 1], 6P = [1, 0, 0]\}$$

以上より, graph は左上図に限る. ($(O), (P)$ のみ図示した.)

2.3.15 No.57 $D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{2} \rangle \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \langle Q, R \rangle$ と表せる. ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$, Q, R は位数 2 の元.

① (*) を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = \frac{5}{2} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{2} \text{ な} \\ \text{ので, } (*) \text{ の左辺} = 3 < 4. \text{ 従って } (*) \text{ が成立.}$$

i_1	0	1, 2, 3	i_2	0	1	i_3	0	1	i_4	0	1
contr_{v_1}	0	1	contr_{v_2}	0	1/2	contr_{v_3}	0	1/2	contr_{v_4}	0	1/2

(♠) $\forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P). (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q)$$

$$\iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q), \text{contr}_{v_3}(Q), \text{contr}_{v_4}(Q)) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

となる. 従って $E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0, 0, 0, 0], [1\text{or}2\text{or}3, 1, 1, 0], [1\text{or}2\text{or}3, 1, 0, 1], [1\text{or}2\text{or}3, 0, 1, 1]\}$ となる. これは singular fiber において D_4 の既約成分 $\{1, 2, 3\}$ の対称性や, $A_1^{\oplus 3}$ の順序を指定していない為に多く生じたものであるので, 右辺は $[1, 1, 1, 0]$ を含むと仮定して一般性を失わない. 左辺は $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じているが, 右辺の $[1, 1, 0, 1], [1, 0, 1, 1], [2\text{or}3, 1, 1, 0]$ は $[1, 1, 1, 0]$ を加えることで各々右辺には無い元 $[0, 0, 1, 1], [0, 1, 0, 1], [2\text{or}3, 0, 0, 0]$ が生まれることとなり矛盾. ここから, 左辺の位数 = 4 に注意して,

$$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0], [2, 1, 0, 1], [3, 0, 1, 1]\}, \{[0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0], [3, 1, 0, 1], [2, 0, 1, 1]\}$$

の 2 通りの可能性があることがわかる.

しかしこれは, singular fiber において $A_1^{\oplus 3}$ の左 2 つの順序を指定していない為に多く生じたものである. 以上より,

$$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0], [2, 1, 0, 1], [3, 0, 1, 1]\} \text{ を得る. } (Q = [1, 1, 1, 0], R = [2, 1, 0, 1])$$

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{2} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

$$\iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P), \text{contr}_{v_3}(P), \text{contr}_{v_4}(P)) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(1, 0, \frac{1}{2}, 0\right), \left(1, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[1\text{or}2\text{or}3, 1, 0, 0], [1\text{or}2\text{or}3, 0, 1, 0], [1\text{or}2\text{or}3, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 1]\}$ となる. 左辺は $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じていることに注目すると,

$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1], [2, 0, 1, 0], [3, 1, 0, 0]\}$ の 1 通りの可能性しかないことがわかる. (どの元も生成元となるので $P = [0, 1, 1, 1]$ としてよい.)

③ $mP + E(K)_{\text{tor}} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{\text{tor}} \text{の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{2} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [0, 0, 0, 0] & -P = [0, 1, 1, 1] & P = [0, 1, 1, 1] & 2P = [0, 0, 0, 0] & \\ -2P + Q = [1, 1, 1, 0] & -P + Q = [1, 0, 0, 1] & Q = [1, 1, 1, 0] & P + Q = [1, 0, 0, 1] & 2P + Q = [1, 1, 1, 0] \\ -2P + R = [2, 1, 0, 1] & -P + R = [2, 0, 1, 0] & R = [2, 1, 0, 1] & P + R = [2, 0, 1, 0] & 2P + R = [2, 1, 0, 1] \\ -2P + Q + R = [3, 0, 1, 1] & -P + Q + R = [3, 1, 0, 0] & Q + R = [3, 0, 1, 1] & P + Q + R = [3, 1, 0, 0] & 2P + Q + R = [3, 0, 1, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $\pm 2P + Q$, $\pm 2P + R$, $\pm 2P + Q + R$ は左辺に含まれず, それ以外は含まれることが $(\spadesuit)$ を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P + Q + R = [3, 0, 1, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-2)^2}{2} = 2 + 2(-2P + Q + R) \cdot (O) - 1 - 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \iff (-2P + Q + R) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

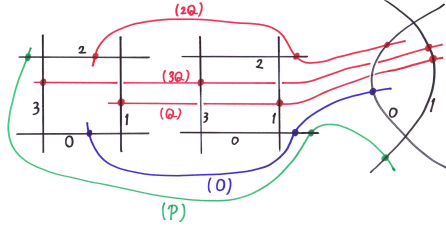
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{cccc} -2P = [0, 0, 0, 0] & -P = [0, 1, 1, 1] & P = [0, 1, 1, 1] & 2P = [0, 0, 0, 0] \\ -P + Q = [1, 0, 0, 1] & Q = [1, 1, 1, 0] & P + Q = [1, 0, 0, 1] & \\ -P + R = [2, 0, 1, 0] & R = [2, 1, 0, 1] & P + R = [2, 0, 1, 0] & \\ -P + Q + R = [3, 1, 0, 0] & Q + R = [3, 0, 1, 1] & P + Q + R = [3, 1, 0, 0] & \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{ccc} -P = [0, 1, 1, 1] & O = [0, 0, 0, 0] & P = [0, 1, 1, 1] \\ & Q = [1, 1, 1, 0] & \\ & R = [2, 1, 0, 1] & \\ & Q + R = [3, 0, 1, 1] & \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は左上図に限る.

2.3.16 No.58 $A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$



$E(K) \cong \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる. ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$, Q は位数 4 の元.

① $(*)$ を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = \frac{5}{2} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{2} \text{ な} \\ \text{ので, } (*) \text{ の左辺} = 3 < 4. \text{ 従って } (*) \text{ が成立.}$$

i_1	0	1, 3	2
contr_{v_1}	0	3/4	1

i_2	0	1, 3	2
contr_{v_2}	0	3/4	1

i_3	0	1
contr_{v_3}	0	1/2

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P) \cdot (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q) \\ \iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q), \text{contr}_{v_3}(Q)) = (1, 1, 0), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

従って $E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0, 0, 0], [2, 2, 0], [1\text{or}3, 1\text{or}3, 1]\}$ となる. 左辺の位数は 4 なので, $[1\text{or}3, 1\text{or}3, 1]$ の形の元を少なくとも 1 つ含むが, これは singular fiber において A_3 の既約成分 $\{1, 3\}$ の対称性や, $A_3^{\oplus 2}$ の順序を指定していない為に多く生じたものである. 右辺は $[1, 1, 1]$ を含むと仮定して一般性を失わない. このとき, これは位数 4 の元なので, $P + E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0, 0], [1, 1, 1], [2, 2, 0], [3, 3, 1]\}$ の 1 通りの可能性しかないことがわかる. ($Q = [1, 1, 1]$)

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{2}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{2} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) \\ \iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P), \text{contr}_{v_3}(P)) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 0\right), \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$$

となる. 従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0, 2, 1], [1\text{or}3, 1\text{or}3, 0], [2, 0, 1]\}$ となる. 左辺は $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じていることに注目すると,

$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 2, 1], [1, 3, 0], [2, 0, 1], [3, 1, 0]\}$ の 1 通りの可能性しかないことがわかる. (どの元も生成元となるので $P = [2, 0, 1]$ としてよい.)

③ $mP + E(K)_{tor} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{tor} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{2} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [0, 0, 0] & -P = [2, 0, 1] & P = [2, 0, 1] & 2P = [0, 0, 0] & \\ -2P + Q = [1, 1, 1] & -P + Q = [3, 1, 0] & Q = [1, 1, 1] & P + Q = [3, 1, 0] & 2P + Q = [1, 1, 1] \\ -2P + 2Q = [2, 2, 0] & -P + 2Q = [0, 2, 1] & 2Q = [2, 2, 2] & P + 2Q = [0, 2, 1] & 2P + 2Q = [2, 2, 0] \\ -2P + 3Q = [3, 3, 1] & -P + 3Q = [1, 3, 0] & 3Q = [3, 3, 1] & P + 3Q = [1, 3, 0] & 2P + 3Q = [3, 3, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $\pm 2P + Q$, $\pm 2P + 2Q$, $\pm 2P + 3Q$ は左辺に含まれず, それ以外は含まれることが $(\spadesuit)$ を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P + 2Q = [2, 2, 0] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-2)^2}{2} = 2 + 2(-2P + Q + R) \cdot (O) - 1 - 1 - 0 \iff (-2P + 2Q) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

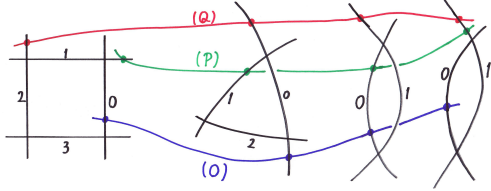
$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [0, 0, 0] & -P = [2, 0, 1] & P = [2, 0, 1] & 2P = [0, 0, 0] & \\ & -P + Q = [3, 1, 0] & Q = [1, 1, 1] & P + Q = [3, 1, 0] & \\ & -P + 2Q = [0, 2, 1] & 2Q = [2, 2, 2] & P + 2Q = [0, 2, 1] & \\ & -P + 3Q = [1, 3, 0] & 3Q = [3, 3, 1] & P + 3Q = [1, 3, 0] & \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は次の 1 通りしかない.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{ccc} -P = [2, 0, 1] & O = [0, 0, 0] & P = [2, 0, 1] \\ & Q = [1, 1, 1] & \\ & 2Q = [2, 2, 2] & \\ & 3Q = [3, 3, 1] & \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は左上図に限る. (torsion と生成元 P のみ図示した.)

2.3.17 No.59 $A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$



$E(K) \cong \left\langle \frac{1}{12} \right\rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる. ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{12}$, Q は位数 2 の元.

① (*) を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = \frac{8}{3} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{12}$$

なので, (*) の左辺 = $\frac{11}{4} < 4$. 従って (*) が成立.

i_1	0	1, 3	2
contr_{v_1}	0	3/4	1
i_2	0	1, 2	
contr_{v_2}	0	2/3	
i_3	0	1	
contr_{v_3}	0	1/2	
i_4	0	1	
contr_{v_4}	0	1/2	

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P). (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$(\spadesuit) \iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q)$$

$$\iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q), \text{contr}_{v_3}(Q), \text{contr}_{v_4}(Q)) = \left(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

となる. 従って $E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0, 0, 0], [2, 0, 1, 1]\}$ となる. ($Q = [2, 0, 1, 1]$)

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{12}$ より,

$$(\spadesuit) \iff \frac{1}{12} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

$$\iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P), \text{contr}_{v_3}(P), \text{contr}_{v_4}(P)) = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[1\text{or}3, 1\text{or}2, 1, 0], [1\text{or}3, 1\text{or}2, 0, 1]\}$ となる. 左辺は位数 2 であり, $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じていることに注目すると,

$$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[1, 1, 1, 0], [3, 1, 0, 1]\}, \{[1, 1, 0, 1], [3, 1, 1, 0]\},$$

$$\{[1, 2, 0, 1], [3, 2, 1, 0]\}, \{[1, 2, 1, 0], [3, 2, 0, 1]\}$$

の 4 通りの可能性があることがわかる. これは singular fiber において A_3 の既約成分 $\{1, 3\}$ の対称性, A_2 の既約成分 $\{1, 2\}$ の対称性や, $A_1^{\oplus 2}$ の順序を指定していない為に多く生じたものである. 右辺

は $[1, 1, 0, 1]$ を含むと仮定して一般性を失わない.

$$\left(\begin{array}{l} \text{つまりこの4個はどれも, } P + E(K)_{\text{tor}} = \left\{ \begin{array}{l} \cdot A_3 \text{ を通る 2 本は 0 と隣接する別々の辺を通る} \\ \cdot A_2 \text{ を通る 2 本は 0 でない同一の辺を通る} \\ \cdot A_1^{\oplus 2} \text{ を通る 2 本は, 互いに別々の既約成分を通る} \end{array} \right\} \\ \text{を満たす.} \end{array} \right)$$

従って, $P + E(K)_{\text{tor}} = \{[1, 1, 0, 1], [3, 1, 1, 0]\}$ を得る. ($P = [1, 1, 0, 1]$)

③ $mP + E(K)_{\text{tor}} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{\text{tor}} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{12} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{cccccccc} -4P = [0, 2, 0, 0] & -3P = [1, 0, 0, 1] & -2P = [2, 1, 0, 0] & -P = [3, 2, 0, 1] & P = [1, 1, 0, 1] & 2P = [2, 2, 0, 0] & 3P = [3, 0, 0, 1] & 4P = [0, 1, 0, 0] \\ -4P + Q = [2, 2, 1, 1] & -3P + Q = [3, 0, 1, 0] & -2P + Q = [0, 1, 1, 1] & -P + Q = [1, 2, 1, 0] & Q = [2, 0, 1, 1] & P + Q = [3, 1, 1, 0] & 2P + Q = [0, 2, 1, 1] & 3P + Q = [1, 0, 1, 0] & 4P + Q = [2, 1, 1, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち, $\pm 4P + Q$ は左辺に含まれず, それ以外は含まれることが $(\spadesuit)$ を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -4P + Q = [2, 2, 1, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-4)^2}{12} = 2 + 2(-4P + Q) \cdot (O) - 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \iff (-4P + Q) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} -4P = [0, 2, 0, 0] & -3P = [1, 0, 0, 1] & -2P = [2, 1, 0, 0] & -P = [3, 2, 0, 1] & P = [1, 1, 0, 1] & 2P = [2, 2, 0, 0] & 3P = [3, 0, 0, 1] & 4P = [0, 1, 0, 0] \\ -3P + Q = [3, 0, 1, 0] & -2P + Q = [0, 1, 1, 1] & -P + Q = [1, 2, 1, 0] & Q = [2, 0, 1, 1] & P + Q = [3, 1, 1, 0] & 2P + Q = [0, 2, 1, 1] & 3P + Q = [1, 0, 1, 0] & \end{array} \right\}$$

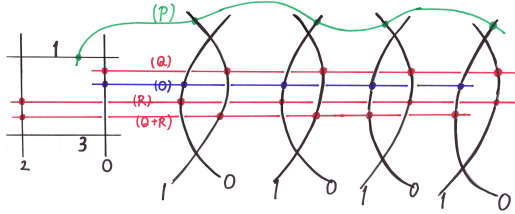
④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は以下の 2 通り.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{cccc} O = [0, 0, 0, 0] & P = [1, 1, 0, 1] & 2P = [2, 2, 0, 0] & 3P = [3, 0, 0, 1] \\ Q = [2, 0, 1, 1] & P + Q = [3, 1, 1, 0] & 2P + Q = [0, 2, 1, 1] & 3P + Q = [1, 0, 1, 0] \end{array} \right\} \\ \text{or} \\ \left\{ \begin{array}{cccccc} O = [0, 0, 0, 0] & P = [1, 1, 0, 1] & 2P = [2, 2, 0, 0] & 3P = [3, 0, 0, 1] & 4P = [0, 1, 0, 0] \\ & P + Q = [3, 1, 1, 0] & 2P + Q = [0, 2, 1, 1] & 3P + Q = [1, 0, 1, 0] & \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は上の 2 通りが存在する.

(torsion と生成元 P のみ図示した.)

2.3.18 No.60 $A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{4} \rangle \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \langle Q, R \rangle$ と表せる. ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{4}$, Q, R は位数 2 の元.

① (*) を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = 3 \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{4} \text{ な}$$

ので, (*) の左辺 = $\frac{13}{4} < 4$. 従って (*) が成立.

i_1	0	1, 3	2	i_2	0	1	i_3	0	1	i_4	0	1	i_5	0	1
contr_{v_1}	0	3/4	1	contr_{v_2}	0	1/2	contr_{v_3}	0	1/2	contr_{v_4}	0	1/2	contr_{v_5}	0	1/2

(♠) $\forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P). (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標 : $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

(♠) $\iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q)$

$$\iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q), \text{contr}_{v_3}(Q), \text{contr}_{v_4}(Q), \text{contr}_{v_5}(Q)) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \underbrace{\left(1, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\text{4 個中 2 個が 0}}$$

となる.

従って $E(K)_{\text{tor}} = \left\{ [0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 1, 1], [2, \underbrace{0, 0, 1, 1}] \right\}$ となる.
4 個中 2 個が 0

もし, $[0, 1, 1, 1, 1] \notin E(K)_{\text{tor}}$ とすると, Q, R とともに i_1 成分が 2 となり, $Q + R$ の i_1 成分は 0 となるが, このような元は $[0, 0, 0, 0, 0]$ に限り, 矛盾が生じた. 従って, $[0, 1, 1, 1, 1] \in E(K)_{\text{tor}}$

また左辺の位数は 4 なので, $[2, 0, 0, 1, 1]$ の形の元を少なくとも 1 つは含み, これは singular fiber において $A_1^{\oplus 4}$ の順序を指定していない為に多く生じたものであるので, 左辺は $[2, 0, 0, 1, 1]$ を含むと仮定して一般性を失わない.

以上より, $E(K)_{\text{tor}} = \left\{ [0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 1, 1], [2, 0, 0, 1, 1], [2, 1, 1, 0, 0] \right\}$ がわかる.

($Q = [0, 1, 1, 1, 1], R = [2, 0, 0, 1, 1]$ とおく.)

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標 : $\langle P, P \rangle = \frac{1}{4}$ より,

(♠) $\iff \frac{1}{4} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$

$$\iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P), \text{contr}_{v_3}(P), \text{contr}_{v_4}(P), \text{contr}_{v_5}(P)) = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

4 個中 2 個が 0

従って $P + E(K)_{tor} \subset \left\{ [1 \text{ or } 3, \underbrace{0, 0, 1, 1}_{4 \text{ 個中 } 2 \text{ 個が } 0}] \right\}$ となる. 左辺は位数 4 であり, $E(K)_{tor}$ の和に関して閉じていることに注目すると,

$$P + E(K)_{tor} = \begin{cases} \cdot \{ [1, 1, 0, 1, 0], [1, 0, 1, 0, 1], [3, 1, 0, 0, 1], [3, 0, 1, 1, 0] \} \\ \text{or} \\ \cdot \{ [1, 1, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 1, 0], [3, 1, 0, 1, 0], [3, 0, 1, 0, 1] \} \end{cases}$$

の 2 通りの可能性があることがわかる. これは singular fiber において $A_1^{\oplus 4}$ の 1 つ目と 2 つ目, 3 つ目と 4 つ目の順序を各々指定していない為に多く生じたものであるので, 右辺は $[1, 1, 0, 1, 0]$ を含むと仮定して一般性を失わない.

従って, $P + E(K)_{tor} = \{ [1, 1, 0, 1, 0], [1, 0, 1, 0, 1], [3, 1, 0, 0, 1], [3, 0, 1, 1, 0] \}$ を得る. ($P = [1, 1, 0, 1, 0]$)

③ $mP + E(K)_{tor} \subset E(K)$ に対して, (m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{tor} \text{ の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{4} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2$ とわかる.

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [2, 0, 0, 0, 0] & -P = [3, 1, 0, 1, 0] & P = [1, 1, 0, 1, 0] & 2P = [2, 0, 0, 0, 0] \\ -2P + Q = [2, 1, 1, 1, 1] & -P + Q = [3, 0, 1, 0, 1] & Q = [0, 1, 1, 1, 1] & P + Q = [1, 0, 1, 0, 1] & 2P + Q = [2, 1, 1, 1, 1] \\ -2P + R = [0, 0, 0, 1, 1] & -P + R = [1, 1, 0, 0, 1] & R = [2, 0, 0, 1, 1] & P + R = [3, 1, 0, 0, 1] & 2P + R = [0, 0, 0, 1, 1] \\ -2P + Q + R = [0, 1, 1, 0, 0] & -P + Q + R = [1, 0, 1, 1, 0] & Q + R = [2, 1, 1, 0, 0] & P + Q + R = [3, 0, 1, 1, 0] & 2P + Q + R = [0, 1, 1, 0, 0] \end{array} \right\}$$

右辺の任意の元は左辺に含まれることが ($\spadesuit$) を用いるとわかる.

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -2P + Q + R = [0, 1, 1, 0, 0] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-2)^2}{4} = 2 + 2(-2P + Q + R) \cdot (O) - 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 - 0 \iff (-2P + Q + R) \cdot (O) = 0 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より,

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{ccccc} -2P = [2, 0, 0, 0, 0] & -P = [3, 1, 0, 1, 0] & P = [1, 1, 0, 1, 0] & 2P = [2, 0, 0, 0, 0] \\ -2P + Q = [2, 1, 1, 1, 1] & -P + Q = [3, 0, 1, 0, 1] & Q = [0, 1, 1, 1, 1] & P + Q = [1, 0, 1, 0, 1] & 2P + Q = [2, 1, 1, 1, 1] \\ -2P + R = [0, 0, 0, 1, 1] & -P + R = [1, 1, 0, 0, 1] & R = [2, 0, 0, 1, 1] & P + R = [3, 1, 0, 0, 1] & 2P + R = [0, 0, 0, 1, 1] \\ -2P + Q + R = [0, 1, 1, 0, 0] & -P + Q + R = [1, 0, 1, 1, 0] & Q + R = [2, 1, 1, 0, 0] & P + Q + R = [3, 0, 1, 1, 0] & 2P + Q + R = [0, 1, 1, 0, 0] \end{array} \right\}$$

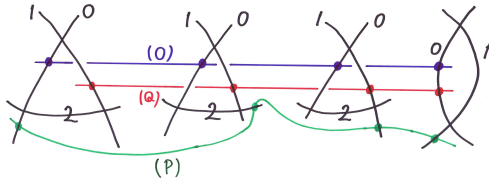
④ 今までと同様に考えて, graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は以下の 1 通りに限る.

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{ccc} O = [0, 0, 0, 0, 0] & P = [1, 1, 0, 1, 0] & 2P = [2, 0, 0, 0, 0] \\ Q = [0, 1, 1, 1, 1] & P + Q = [1, 0, 1, 0, 1] & 2P + Q = [2, 1, 1, 1, 1] \\ R = [2, 0, 0, 1, 1] & P + R = [3, 1, 0, 0, 1] & 2P + R = [0, 0, 0, 1, 1] \\ Q + R = [2, 1, 1, 0, 0] & P + Q + R = [3, 0, 1, 1, 0] & 2P + Q + R = [0, 1, 1, 0, 0] \end{array} \right\}$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は左上図に限る.

(torsion と生成元 P のみ図示した.)

2.3.19 No.61 $A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$



$E(K) \cong \langle \frac{1}{6} \rangle \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ より, $E(K) = \mathbb{Z}P \oplus \mathbb{Z}Q$ と表せる. ここで $\langle P, P \rangle = \frac{1}{6}$, Q は位数 3 の元.

① $(*)$ を確かめればよい.

$$\sum_{v \in R} \max\{\text{contr}_v(P)\} = \frac{5}{2} \text{ かつ } \langle P, P \rangle = \frac{1}{6} \text{ なの}$$

ので, $(*)$ の左辺 $= \frac{8}{3} < 4$. 従って $(*)$ が成立.

i_1	0	1, 2	i_2	0	1, 2	i_3	0	1, 2	i_4	0	1
contr_{v_1}	0	2/3	contr_{v_2}	0	2/3	contr_{v_3}	0	2/3	contr_{v_4}	0	1/2

$$(\spadesuit) \forall P \in E(K), \langle P, P \rangle = 2 + 2(P). (O) - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P)$$

② $\cdot E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle Q, Q \rangle = 0$ より,

$$\begin{aligned} (\spadesuit) &\iff 0 = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(Q) \\ &\iff (\text{contr}_{v_1}(Q), \text{contr}_{v_2}(Q), \text{contr}_{v_3}(Q), \text{contr}_{v_4}(Q)) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

従って $E(K)_{\text{tor}} \subset \{[0, 0, 0, 0], [1 \text{ or } 2, 1 \text{ or } 2, 1 \text{ or } 2, 0]\}$ となるが, これは singular fiber において $A_2^{\oplus 3}$ 各々の既約成分 $\{1, 2\}$ を指定していない為に多く生じたものであるので, 右辺は $[1, 1, 1, 0]$ を含むと仮定して一般性を失わない. 以上より,

$$E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 0, 0, 0], [1, 1, 1, 0], [2, 2, 2, 0]\}$$

を得る. ($Q = [1, 1, 1, 0]$)

$\cdot P + E(K)_{\text{tor}}$ の座標: $\langle P, P \rangle = \frac{1}{6}$ より,

$$\begin{aligned} (\spadesuit) &\iff \frac{1}{6} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(P) \\ &\iff (\text{contr}_{v_1}(P), \text{contr}_{v_2}(P), \text{contr}_{v_3}(P), \text{contr}_{v_4}(P)) = \left(\underbrace{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0}_{3 \text{ 個中 } 1 \text{ 個が } 0}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる. 従って $P + E(K)_{\text{tor}} \subset \{[\underbrace{1 \text{ or } 2, 1 \text{ or } 2, 0, 1}_{3 \text{ 個中 } 1 \text{ 個が } 0}]\}$ となる. 左辺は位数 2 であり, $E(K)_{\text{tor}}$ の和に関して閉じていることに注目すると,

$P + E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 1, 2, 1], [1, 2, 0, 1], [2, 0, 1, 1]\}, \{[0, 2, 1, 1], [1, 0, 2, 1], [2, 1, 0, 1]\}$ の 2 通りの可

能性があることがわかるが、これは singular fiber において $A_2^{\oplus 3}$ の順序を指定していない為に多く生じたものであるので、右辺は $[0, 2, 1, 1]$ を含むと仮定して一般性を失わない。

従って、 $P + E(K)_{\text{tor}} = \{[0, 2, 1, 1], [1, 0, 2, 1], [2, 1, 0, 1]\}$ を得る。($P = [0, 2, 1, 1]$)

③ $mP + E(K)_{\text{tor}} \subset E(K)$ に対して、(m は任意の整数)

$$mP + E(K)_{\text{tor}} \text{の元が } (O) \text{ と交わらない} \implies \frac{m^2}{6} = 2 - \sum_{v \in R} \text{contr}_v(mP) \leq 2$$

従って $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ とわかる。

$$\therefore \mathfrak{S} \subset \left\{ \begin{array}{llllll} -3P = [0, 0, 0, 1] & -2P = [0, 2, 1, 0] & -P = [0, 1, 2, 1] & P = [0, 2, 1, 1] & 2P = [0, 1, 2, 0] & 3P = [0, 0, 0, 1] \\ -3P + Q = [1, 1, 1, 1] & -2P + Q = [1, 0, 2, 0] & -P + Q = [1, 2, 0, 1] & Q = [1, 1, 1, 0] & P + Q = [1, 0, 2, 1] & 2P + Q = [1, 2, 0, 0] & 3P + Q = [1, 1, 1, 1] \\ -3P + 2Q = [2, 2, 2, 1] & -2P + 2Q = [2, 1, 0, 0] & -P + 2Q = [2, 0, 1, 1] & 2Q = [2, 2, 2, 0] & P + 2Q = [2, 1, 0, 1] & 2P + 2Q = [2, 0, 1, 0] & 3P + 2Q = [2, 2, 2, 1] \end{array} \right\}$$

右辺の元のうち、 $\pm 3P + Q$, $\pm 3P + 2Q$ は左辺に含まれず、それ以外は含まれることが $(\spadesuit)$ を用いるとわかる。

$$\left(\begin{array}{l} \text{たとえば } -3P + Q = [1, 1, 1, 1] \text{ について,} \\ (\spadesuit) \iff \frac{(-3)^2}{6} = 2 + 2(-3P + Q) \cdot (O) - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \iff (-3P + Q) \cdot (O) = 1 \\ \text{を得る.} \end{array} \right)$$

以上より、

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{array}{llllll} -3P = [0, 0, 0, 1] & -2P = [0, 2, 1, 0] & -P = [0, 1, 2, 1] & P = [0, 2, 1, 1] & 2P = [0, 1, 2, 0] & 3P = [0, 0, 0, 1] \\ -2P + Q = [1, 0, 2, 0] & -P + Q = [1, 2, 0, 1] & Q = [1, 1, 1, 0] & P + Q = [1, 0, 2, 1] & 2P + Q = [1, 2, 0, 0] & \\ -2P + 2Q = [2, 1, 0, 0] & -P + 2Q = [2, 0, 1, 1] & 2Q = [2, 2, 2, 0] & P + 2Q = [2, 1, 0, 1] & 2P + 2Q = [2, 0, 1, 0] & \end{array} \right\}$$

④ 今までと同様に考えて、graph が異なる $\mathfrak{S}'$ の候補は以下の 2 通り。

$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{lll} O = [0, 0, 0, 0] & P = [0, 2, 1, 1] & 2P = [0, 1, 2, 0] \\ Q = [1, 1, 1, 0] & P + Q = [1, 0, 2, 1] & 2P + Q = [1, 2, 0, 0] \\ 2Q = [2, 2, 2, 0] & P + 2Q = [2, 1, 0, 1] & 2P + 2Q = [2, 0, 1, 0] \end{array} \right\} \\ \text{or} \\ \left\{ \begin{array}{llll} O = [0, 0, 0, 0] & P = [0, 2, 1, 1] & 2P = [0, 1, 2, 0] & 3P = [0, 0, 0, 1] \\ & P + Q = [1, 0, 2, 1] & 2P + Q = [1, 2, 0, 0] & \\ & P + 2Q = [2, 1, 0, 1] & 2P + 2Q = [2, 0, 1, 0] & \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

以上より 互いに交わらない section からなる graph は上の 2 通りが存在する。(torsion(O), (Q) と生成元 (P) のみ図示した)

以上の分類結果より $r = 1$ の場合の定理 2.1 の主張も確かめられた。

3 応用

この節では, 2.2 節, 2.3 節で用いた分類結果の応用として, 概要で述べた目標 (2), (4), (5) を解いてみよう. ここでは $r = 0, 1$ の場合のみ考察する.

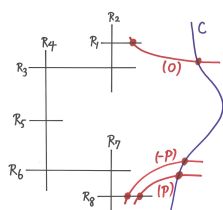
3.1 目標 (2) について

基本的には概要に述べた通りであるので, ここでは概要であげた例 (No.43 E_7) の詳細を解説した後, 他の例については結果だけを述べようと思う. 更に dual graph が決定された今, 逆像 Φ^{-1} を全て求めるのは有限個の可能性をしらみつぶしに調べるだけの機械的作業であるので, ここでは 1 例だけを挙げようと思う.

例 3.1.

$\Phi^{-1}(E_7) = \{ \langle C, 3L \rangle, \langle C, 2L + T \rangle \}$ が成立する. これを示そう.

図 7 E_7 の dual graph



9 回 blow-down

図 8 $\langle C, 3L \rangle$

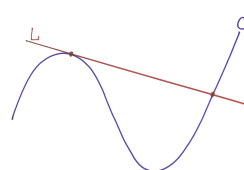
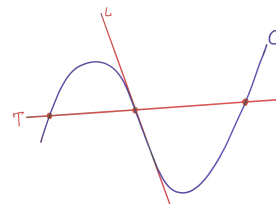


図 9 $\langle C, 2L + T \rangle$



証明.

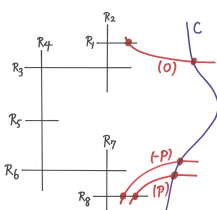
2.3 節の結果より, E_7 型 (No.43) の dual graph は上の左図のようになる. この 3 本の (-1) -curve から始めて 9 回 blow-down して得られる図形は上の右図の 2 通りに限ることを示そう.

(i) section を 1 本だけつぶすとき.

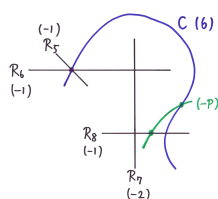
このとき 9 回つぶせないことが容易にわかる.

(ii) section を 2 本つぶすとき. (このとき対応する cubic pencil の base point は 2 個)

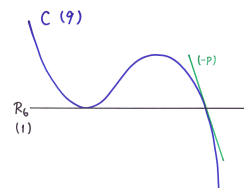
以下の図において () 内の数字で自己交点数を表すこととする.



6 回 blow-down



3 回 blow-down



$(P), (-P)$ の両方をつぶすと 9 回つぶせないことが容易にわかるので, $(O), (P)$ の 2 本をつぶす場合のみを考えればよい. 上下の対称性から (O) から R_4 までつぶし, 更に (P) 自身をつぶすと仮定してよい.

$$(O) \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_2 \longrightarrow R_3 \longrightarrow R_4 \longrightarrow (P)$$

あと 3 回つぶせばよいが, このつぶし方は

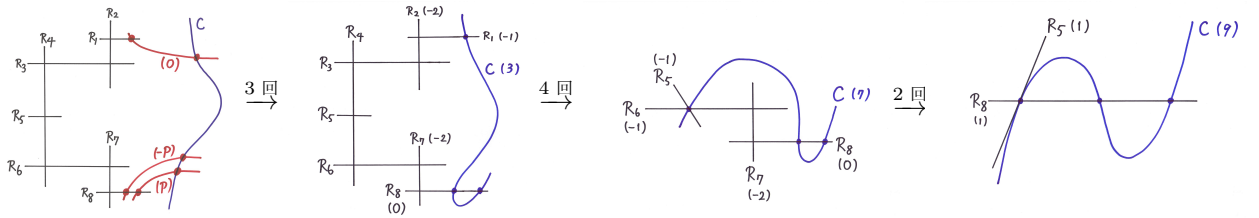
$$R_5 \longrightarrow R_8 \longrightarrow R_7$$

しかない. ($L := R_6$ とせよ.)

参考

最後の図を見れば, 3 次曲線 C と直線 R_6 の交点の内, 局所交点数 1 の交点における C の接線は section に対応していることがわかる.

(iii) section を 3 本つぶすとき. (このとき対応する cubic pencil の base point は 2 個)



$(O), (P), (-P)$ の 3 本をつぶすと左の 2 つ目の図になる.

$$(O) \longrightarrow (P) \longrightarrow (-P)$$

このときあと 6 回つぶせばよいが, 最初の 4 回は,

$$R_1 \longrightarrow R_2 \longrightarrow R_3 \longrightarrow R_4$$

とつぶすしかない. その結果 3 つ目の図になる.

あと 2 回つぶせばよいが, これは

$$R_6 \longrightarrow R_7$$

とつぶすしかない. ($L := R_5, T := R_8$ とせよ. R_5 は 3 次曲線 C の 3 重接線.)

□

3.2 目標 (4) について

一般に cubic pencil の生成元の $\mathbb{P}^2$ での座標とその上の K -rational point を 1 点与えれば, 対応する elliptic surface (つまり K 上の elliptic curve) の Weierstrass equation を計算することができる.*³³そこで, 任意の elliptic surface に対し, 対応する cubic pencil の中で最も Weierstrass equation の表示が綺麗なものを探すことで有理数係数の Weierstrass equation を与えることができる. ここでは数式処理ソフト Magma*³⁴を用いて計算した.

手順を述べよう. まず求めたい elliptic surface に対応する cubic pencil P の生成元 C, C' の方程式を 1 つ与える.

$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = 0 \\ C' : h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

このとき $\mathbb{P}^1$ 上のパラメータを t として, P の一般の元は $g + th = 0$ で定義される. この $k(t)$ -rational point を 1 つ求めておく.

あとは下記の Magma のページにおいて, 以下のように入力すればよい.

```
> Q1 := RationalField();
> Q2<a,b,c,d,e,f> := FunctionField(Q1,); % ここでは係数を a,b,...,f としている.
> R<t> := FunctionField(Q2);
> P<x,y,z> := ProjectiveSpace(R,2);
> C := Curve(P, g + th = 0 ); % ここに 3 次式を入力する
> pt := C![ , , ]; % ここに C 上の rational point を 1 つ入力する
> E := EllipticCurve(C, pt);
> E; %elliptic curve C の Weierstrass equation が出力される
> KodairaSymbols(E); %elliptic curve C の Kodaira type が出力される
> Discriminant(E); %elliptic curve C の判別式が出力される
> BadPlaces(E); %singular fiber となる P^1 上の点 t が出力される
```

例 3.2.

No.43 (E_7) の有理数係数の Weierstrass equation の 1 つを与えよう.

cubic pencil $\langle C, 2L + T \rangle$ において, 以下のように方程式を与える. ここで a はパラメータとする.

$$\begin{cases} C : 3(x^2 - y^2)z + 2x^3 = 0 \\ L : z = 0 \\ T : x + az = 0 \end{cases}$$

このとき, 対応する Weierstrass equation の 1 つは, $y^2 = x^3 + (2t - 3)x + (4a - 2)t + 2$ となる.

更に, $a = 0$ のときは T が C の node $(0 : 0 : 1)$ を通ることとなり, E_7 ではなく, $E_7 \oplus A_1$ (No.65. $r = 0$) を得る. この Weierstrass equation は, $y^2 = x^3 + (2t - 3)x - 2t + 2$ である.

*³³ たとえば Nagell's Algorithm など

*³⁴ <http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/> [1] 参照.

証明.

3 次曲線 $3(x^2 - y^2)z + 2x^3 + tz^2(x + az)$ に対して上の手順を実行する.

```
> Q1 := RationalField();
> Q2<a,b,c,d,e,f,g> :=FunctionField(Q1,7);
> R<t> := FunctionField(Q2);
> P<x,y,z> := ProjectiveSpace(R,2);
> C := Curve(P, 3*(x^2-y^2)*z+2*x^3+t*z^2*(x+a*z));
> pt := C![0, 1, 0];
> E := EllipticCurve(C, pt);
> E;
> KodairaSymbols(E);
> Discriminant(E);
> BadPlaces(E);
```

出力結果は以下の通り.

```
Elliptic Curve defined by y^2 = x^3 + 9/4*x^2 + 9/8*t*x + 27/16*a*t over
Univariate rational function field over Multivariate rational function field of
rank 7 over Rational Field
[ <I1, 2>, <III*, 1>, <I1, 1> ]
-729/8*t^3 + (-19683/16*a^2 + 19683/16*a + 6561/64)*t^2 - 19683/16*a*t
[
  t^2 + (27/2*a^2 - 27/2*a - 9/8)*t + 27/2*a,
  1/t,
  t
]
```

よって Weierstrass equation $y^2 = x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{9t}{8}x + \frac{27a}{16}t$ を得る.

変数変換

$$\begin{cases} x \mapsto u^2x \\ y \mapsto u^3y \end{cases}$$

を施して, $(u = \frac{2}{\sqrt{3}})$

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2tx + 4at$$

を得る. 右辺を立方完成して x を平行移動することで,

$$y^2 = x^3 + (2t - 3)x + (4a - 2)t + 2$$

を得る. これが No.43 (E_7) の有理数係数の Weierstrass equation である.

特に $a = 0$ として, 以下の通り $E_7 \oplus A_1$ (No.65) を得る.

```
> Q1 := RationalField();
> Q2<a,b,c,d,e,f,g> :=FunctionField(Q1,7);
> R<t> := FunctionField(Q2);
> P<x,y,z> := ProjectiveSpace(R,2);
> a := 0 ;
> C := Curve(P, 3*(x^2-y^2)*z+2*x^3+t*z^2*(x+a*z));
> pt := C![0, 1, 0];
> E := EllipticCurve(C, pt);
> E;
> KodairaSymbols(E);
> Discriminant(E);
> BadPlaces(E);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
Elliptic Curve defined by  $y^2 = x^3 + 9/4*x^2 + 9/8*t*x$  over Univariate rational
function field over Multivariate rational function field of rank 7 over Rational
Field
```

```
[ <III*, 1>, <I1, 1>, <I2, 1> ]
```

```
-729/8*t^3 + 6561/64*t^2
```

```
[
```

```
    1/t,
```

```
    t - 9/8,
```

```
    t
```

```
]
```

これを変数変換して, Weierstrass equation $y^2 = x^3 + (2t - 3)x - 2t + 2$ を得る.

□

上の例からわかるように, $r = 1$ の場合は 1 次元のパラメータ a の自由度があり, これを特殊化すると $r = 0$ の場合の cubic pencil を構成することができる. そこで $r = 0$ を与える cubic pencil は全てこの方法で得られるかと問うのは自然なことであるが, これは実は真である.

定理 3.1.

$r = 0$ の elliptic surface を与える cubic pencil は全て $r = 1$ の場合の cubic pencil の特殊化によって構成することができる.

3.4 節においてこれを 1 つ 1 つ調べることにより示す.

3.3 目標 (5) について

一般に次の 1 : 1 対応が存在する.

$$\{(\text{weak な}) \text{ degree } 1 \text{ の Del Pezzo surfaces}\} \xrightleftharpoons[1 \text{ 点 blow-up}]{1 \text{ 点 blow-down}} \{\text{rational elliptic surfaces}\}$$

従って, (weak な) degree 1 の Del Pezzo surface 内の (-1) -curve は, 対応する rational elliptic surface 内の (O) と交わらない (-1) -curve と, (O) と交わる (-2) -curve の個数の和に等しい. この値は以下の命題を用いれば, 2.3 節で求めた graph から容易に求めることができる.

命題 3.1.

rational elliptic surface^{*35} 上の curve C に対して, 以下が成立.

- (1) $C : (-1)$ -curve $\iff C : \text{section}$
- (2) $C : (-2)$ -curve $\iff C : \text{可約な singular fiber 内の既約成分}$

証明.

canonical bundle formula より, $F \sim -K_S$ なので, genus formula は,

$$(*) \quad 2g(C) - 2 = C^2 - C \cdot F$$

と表せる.

- (1) $C : (-1)$ -curve ならば, $(*)$ より $C \cdot F = 1$ が従う. 逆に $C : \text{section}$ ならば, $S : \text{rational}$ より $C \cong \mathbb{P}^1$, つまり $g(C) = 0$ が成り立つので, $(*)$ より $C^2 = -1$ が従う.
- (2) $C : (-2)$ -curve ならば, $(*)$ より $C \cdot F = 0$ が従う. いま, $f(C) = \mathbb{P}^1$, or $\{\text{pt}\}$ だが, $f(C) = \mathbb{P}^1$ であれば $C \cap F \neq \emptyset$ となり矛盾. 従って, $f(C) = \{\text{pt}\}$, つまり $C : \text{vertical curve}$. 更に $C^2 = -2 \neq 0$ からファイバーではない. 以上より, C は可約な singular fiber 内の既約成分となる. 逆に C がこれを満たせば, C はファイバーでないことから $C^2 < 0$. 従って $(*)$ から, $(C^2, g(C)) = (-2, 0)$ に限る.

□

例 3.3.

No.43 (E_7) の (O) と交わらない (-1) -curve と (O) と交わる (-2) -curve の個数をそれぞれ求めよう.

証明.

- ・ (O) と交わらない (-1) -curve の個数
これは 2.3 節での分類結果より 2 個.
- ・ (O) と交わる (-2) -curve の個数
これは上の命題 3.1 より可約な singular fiber の個数に等しく, 1 個.

以上より求める個数は 3 個.

□

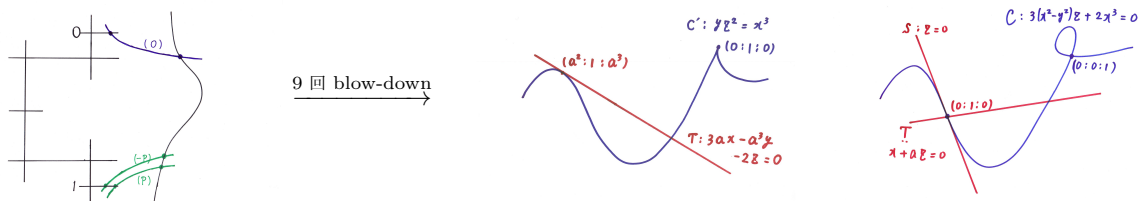
^{*35} (1) の $\Leftarrow$ 以外は一般の elliptic surface で成立

3.4 各々の結果

以下の Weierstrass equation の与え方として, $r = 1$ の場合, 各係数は t, a の多項式となる例を与えている.

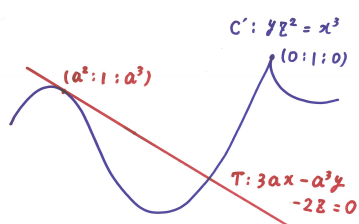
3.4.1 No.43 E_7

$$(2) \Phi^{-1}(E_7) = \left\{ \langle 3T, C' \rangle, \langle C, 2S + T \rangle \right\}$$



(4) 以下の 2 通りを考察する.

(a) $\langle 3T, C' \rangle$

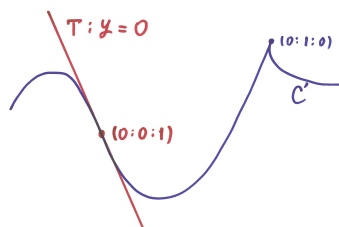


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (3ax - a^3y - 2z)^3 \\ C' : h(x, y, z) = yz^2 - x^3 \end{cases}$$

Kodaira fiber	$III^* \cdots t = 0$
	$II \cdots t = \infty$
	$I_1 \cdots t = 108a^3$

$$\text{Weierstrass equation : } y^2 = x^3 - 9at^3x + t^5$$

特に $a = \infty$ のとき, T は C' の 3 重接線となり, このとき $E_8(\text{No.62})$ を得る.

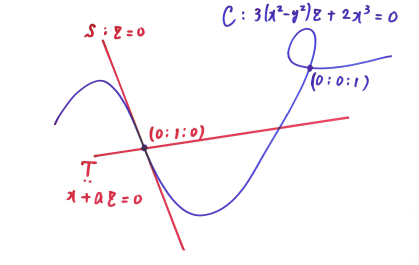


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = -y^3 \\ C' : h(x, y, z) = yz^2 - x^3 \end{cases}$$

Kodaira fiber	$II^* \cdots t = 0$
	$II \cdots t = \infty$

$$\text{Weierstrass equation : } y^2 = x^3 + \frac{1}{t}$$

(b) $\langle C, 2S + T \rangle$

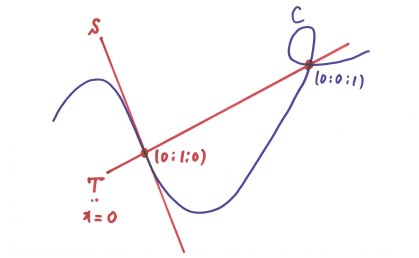


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = 3(x^2 - y^2)z + 2x^3 \\ C' : h(x, y, z) = z^2(x + az) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$III^* \cdots t = \infty$
	$I_1 \cdots t = 0$
	$2I_1 \cdots t^2 + \frac{108a^2 - 108a - 9}{8}t + \frac{27a}{2} = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (2t - 3)x + (4a - 2)t + 2$

特に $a = 0$ のとき, T は C の node $(0:0:1)$ を通り, このとき $E_7 \oplus A_1$ (No.65) を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = yz^2 - x^3 \\ C' : h(x, y, z) = -(y - 3a^2x + 2a^3z)^3 \end{cases}$$

Kodaira fiber	$III^* \cdots t = \infty$
	$I_2 \cdots t = 0$
	$I_1 \cdots t = \frac{9}{8}$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (2t - 3)x - 2t + 2$

(5) $\cdot$ (O) と交わらない (-1) -curve の個数

これは 2.3 節での分類結果より 2 個.

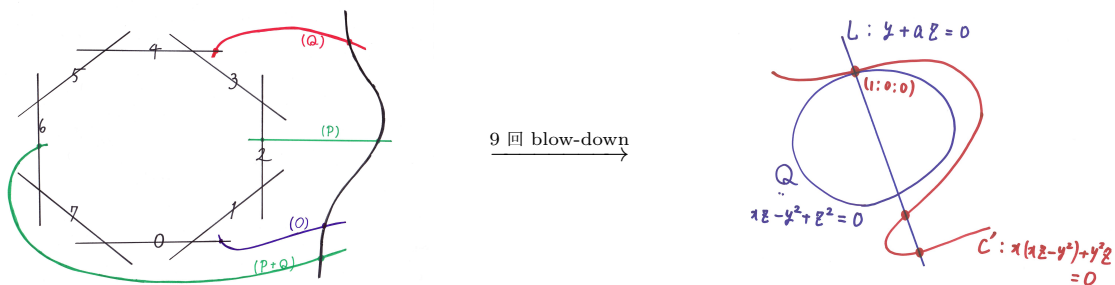
$\cdot$ (O) と交わる (-2) -curve の個数

これは上の命題 3.1 より可約な singular fiber の個数に等しく, 1 個.

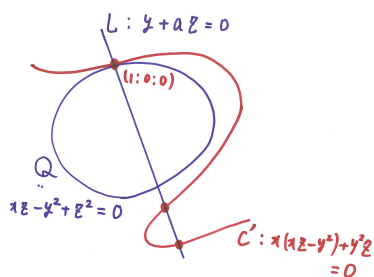
以上より求める個数は 3 個.

3.4.2 No.44 A_7

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle Q + L, C' \rangle$



(4) $\langle Q + L, C' \rangle$

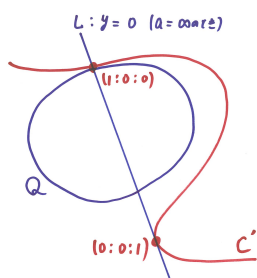


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (ay + z)(xz - y^2 + z^2) \\ C' : h(x, y, z) = x(xz - y^2) + y^2z \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_8 \cdots t = 0$
	$2I_1 \cdots t = \frac{a^2}{4}, \infty$
	$2I_1 \cdots t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{a^2}{16} = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (-4t^2 + 8t + a^2)x^2 - 8t\{(a^2 - 2)t - a^2\}x - 16(t - 1)t^2(4t^2 - a^2t + a^2)$

特に $a = \infty$ のとき, L は C' の接線となり, このとき $A_7 \oplus A_1$ (No.70) を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = y(xz - y^2 + z^2) \\ C' : h(x, y, z) = x(xz - y^2) + y^2z \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_8 \cdots t = 0$
	$I_2 \cdots t = \infty$
	$2I_1 \cdots t^2 + \frac{1}{16} = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + \frac{-4t^2 + 1}{t^2}x^2 - \frac{8}{t^2}x + \frac{16}{t^2}$

(5)

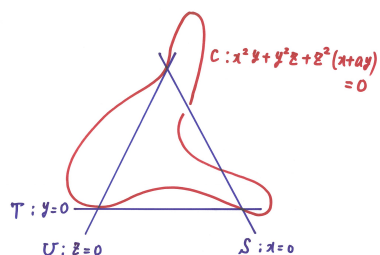
- (O) と交わらない (-1) -curve の個数 $\cdots 7$ 個
 - (O) と交わる (-2) -curve の個数 $\cdots 1$ 個
- } $\therefore 8$ 個

3.4.3 No.45 A_7

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle C, S+T+U \rangle$



(4) $\langle C, S+T+U \rangle$

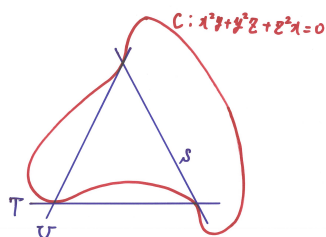


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2(x + ay) \\ C' : h(x, y, z) = -3xyz \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_8 \cdots t = \infty$
	$4I_1 \cdots t^4 + \frac{1}{3a}t^3 - \frac{8a}{9}t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{16a^3-27}{81a} = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (9t^2 - 4a)x^2 + 24tx + 16$

特に $a = 0$ のとき, 3 次曲線 C は点 $(0 : 0 : 1)$ において直線 S に接し, このとき $A_8(\text{No.63})$ を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x \\ C' : h(x, y, z) = -3xyz \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_9 \cdots t = \infty$
	$3I_1 \cdots t = 1, \omega, \omega^2 \text{ } (\omega : 1 \text{ の原始 } 3 \text{ 乗根})$

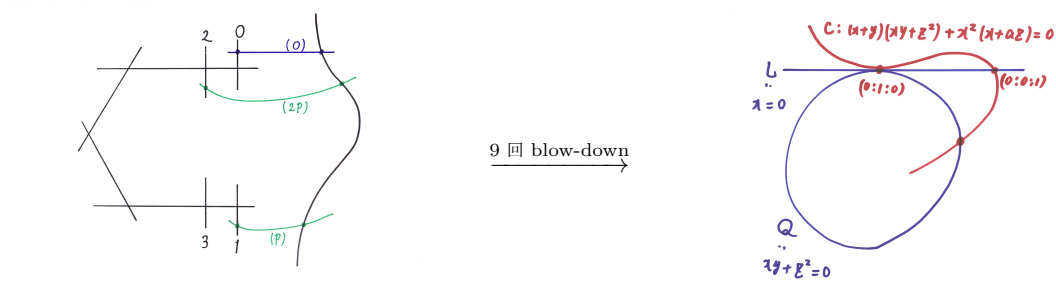
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + 9t^2x^2 + 24tx + 16$

(5)

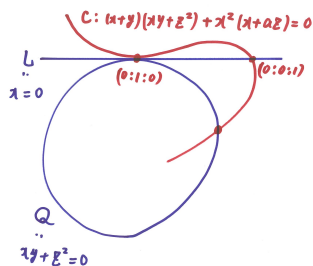
- (O) と交わらない (-1) -curve の個数 $\cdots 6$ 個
 - (O) と交わる (-2) -curve の個数 $\cdots 1$ 個
- $\therefore 7$ 個

3.4.4 No.46 D_7

$$(2) \quad \Phi^{-1}(A_7) \ni \langle C, Q + L \rangle$$



(4) $\langle C, Q + L \rangle$

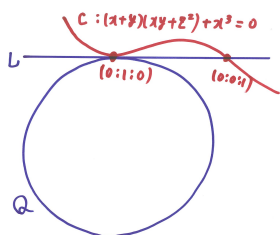


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(xy + z^2) + x^2(x + az) \\ C' : h(x, y, z) = x(xy + z^2) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_3^* \cdots t = \infty$ $3I_1 \cdots t^3 + \frac{3a^2-1}{a^2}t^2 - \frac{3a^2+4}{2a^2}t + \frac{27a^4-56a^2+48}{16a^2} = 0$
---------------	--

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (t+1)x^2 + x + \frac{1}{4}$

特に $a = 0$ のとき, 3 次曲線 C は点 $(0 : 1 : 0)$ において Q と 3 重に接し, このとき $D_8(\text{No.64})$ を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(xy + z^2) + x^3 \\ C' : h(x, y, z) = x(xy + z^2) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_4^* \cdots t = \infty$
	$2I_1 \cdots t = 1, -3$

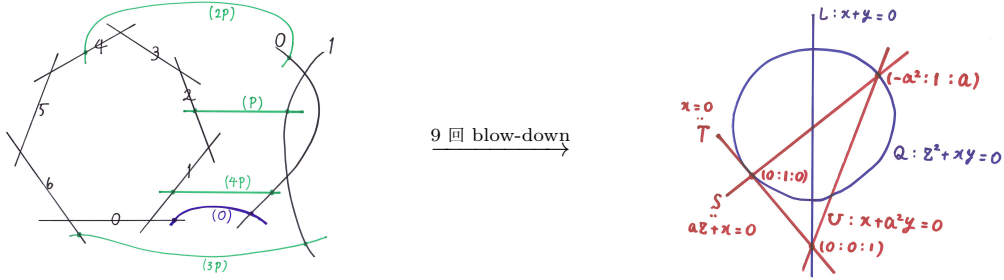
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (t + 1)x^2 + x$

(5)

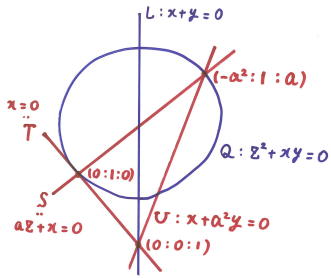
$$\left. \begin{array}{l} \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 4 \text{ 個} \\ \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 1 \text{ 個} \end{array} \right\} \therefore 5 \text{ 個}$$

3.4.5 No.47 $A_6 \oplus A_1$

$$(2) \Phi^{-1}(A_7) \ni \langle S+T+U, Q+L \rangle$$



$$(4) \langle S+T+U, Q+L \rangle$$



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x(x + a^2y)(az + x) \\ C' : h(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_7 \cdots t = 0$
	$I_2 \cdots t = \infty$
	$3I_1 \cdots t^3 + \frac{5a^2-8}{2}t^2 - \frac{a^6-13a^4}{16}t - \frac{a^8}{8} = 0$

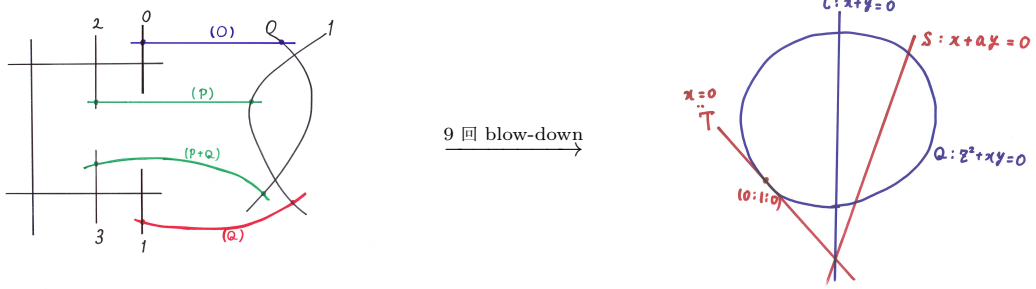
$$\text{Weierstrass equation : } y^2 = x^3 - (8t^2 + 4a^2t - a^6)x^2 + 8t^2\{2t^2 + 2(a^2 + 1)t - a^4\}x - 16t^4(4t - a^2)$$

(5)

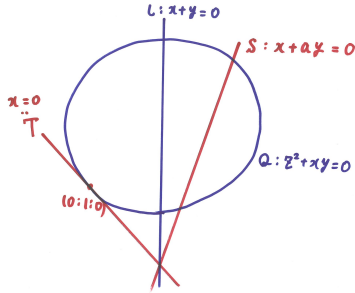
$$\left. \begin{array}{l} \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 8 \text{ 個} \\ \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 2 \text{ 個} \end{array} \right\} \therefore 10 \text{ 個}$$

3.4.6 No.48 $D_6 \oplus A_1$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle S + 2T, Q + L \rangle$



(4) $\langle S + 2T, Q + L \rangle$

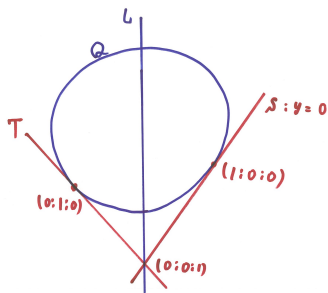


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x^2(x + ay) \\ C' : h(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_2^* \cdots t = 0$
	$I_2 \cdots t = \infty$
	$2I_1 \cdots t^2 + (2a - 4)t + a^2 = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + t(2t + a)x^2 + t^3(t + a + 1)x + t^5$

特に $a = \infty$ のとき, 直線 S は Q に接し, このとき $D_6 \oplus A_1^{\oplus 2}$ (No.71) を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x^2y \\ C' : h(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_2^* \cdots t = 0$
	$I_2 \cdots t = \infty$
	$I_2 \cdots t = -1$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 - \frac{t(2t + 1)}{(t + 1)^2}x^2 + \frac{t^3}{(t + 1)^3}x$

(5)

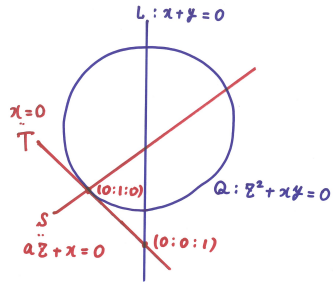
$$\left. \begin{array}{l} \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 7 \text{ 個} \\ \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 2 \text{ 個} \end{array} \right\} \therefore 9 \text{ 個}$$

3.4.7 No.49 $E_6 \oplus A_1$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle Q + L, S + 2T \rangle$



(4) $\langle Q + L, S + 2T \rangle$

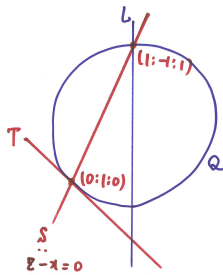


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = x^2(az + x) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$IV^* \dots t = \infty$
	$I_2 \dots t = 0$
	$2I_1 \dots t^2 - \frac{72a^2-64}{27a^4}t + \frac{16a^2-16}{27a^4} = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + 2x^2 + 4tx + 2a^2t^2$

特に $a = -1$ のとき, S は点 $(1 : -1 : 1)$ を通り, このとき $E_6 \oplus A_2$ (No.69) を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = x^2(-z + x) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$IV^* \dots t = \infty$
	$I_3 \dots t = 0$
	$I_1 \dots t = \frac{8}{27}$

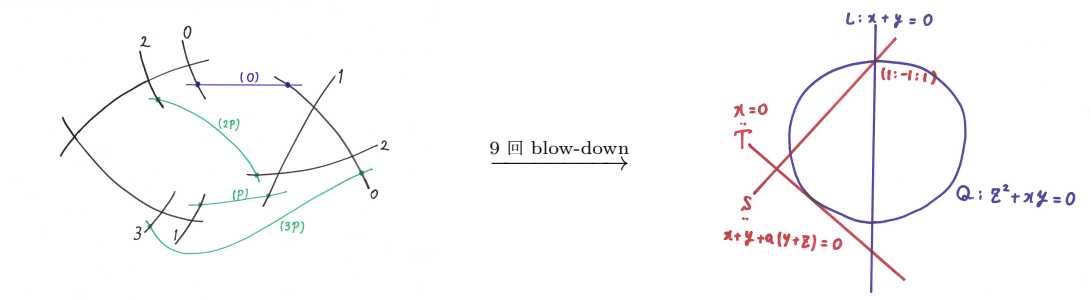
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + 2x^2 + 4tx + 2t^2$

(5)

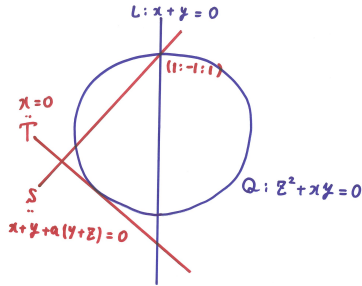
- (O) と交わらない (-1) -curve の個数 $\dots 6$ 個
 - (O) と交わる (-2) -curve の個数 $\dots 2$ 個
- $\therefore 8$ 個

3.4.8 No.50 $D_5 \oplus A_2$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle Q + L, S + 2T \rangle$



(4) $\langle Q + L, S + 2T \rangle$

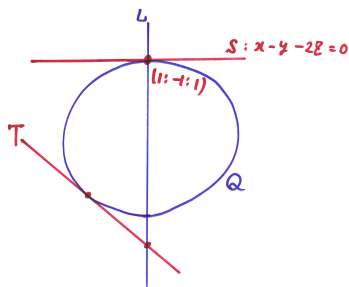


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = x^2(x + y + a(y + z)) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_1^* \cdots t = \infty$
	$I_3 \cdots t = 0$
	$2I_1 \cdots t^2 + \frac{13a^2+8a-32}{16(a+1)^3}t + \frac{a+2}{2(a+1)^3} = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 - \{(a+1)t-1\}x^2 - atx + \frac{a^2t^2}{4}$

特に $a = -2$ のとき, 直線 S は点 $(1:-1:1)$ において Q に接し, このとき $D_5 \oplus A_3$ (No.72) を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = x^2(x - y - 2z) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_1^* \cdots t = \infty$
	$I_4 \cdots t = 0$
	$I_1 \cdots t = \frac{1}{4}$

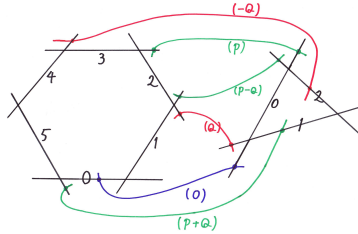
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (t+1)x^2 + 2tx + t^2$

(5)

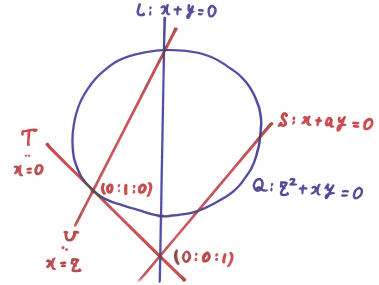
$$\left. \begin{aligned} & \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 6 \text{ 個} \\ & \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 2 \text{ 個} \end{aligned} \right\} \therefore 8 \text{ 個}$$

3.4.9 No.51 $A_5 \oplus A_2$

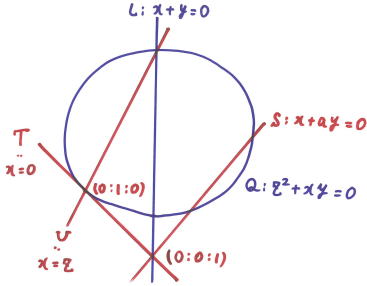
(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle Q + L, S + T + U \rangle$



9 回 blow-down



(4) $\langle Q + L, S + T + U \rangle$

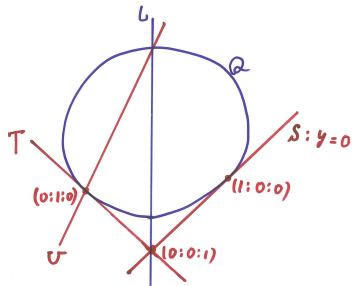


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = x(x - z)(x + ay) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_6 \cdots t = \infty$
	$I_3 \cdots t = 0$
	$3I_1 \cdots t^3 - \frac{6}{a}t^2 - \frac{15a-27}{a^3}t - \frac{8}{a^3} = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (at - 2)^2x^2 + 8(a - 1)t(at - 2)x + 16(a - 1)^2t^2$

特に $a = \infty$ のとき, 直線 S は Q に接し, このとき $A_5 \oplus A_2 \oplus A_1$ (No.66) を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = x(x - z)y \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_6 \cdots t = \infty$
	$I_3 \cdots t = 0$
	$I_2 \cdots t = -1$
	$I_1 \cdots t = 8$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (t - 2)^2x^2 + 8t(t - 2)x + 16t^2$

(5)

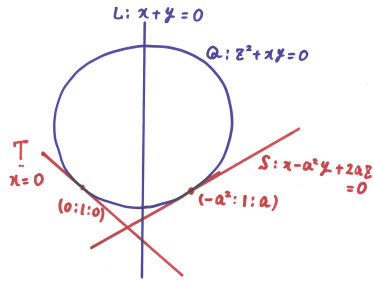
$$\left. \begin{array}{l} \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 10 \text{ 個} \\ \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 2 \text{ 個} \end{array} \right\} \therefore 12 \text{ 個}$$

3.4.10 No.52 $D_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle S + 2T, Q + L \rangle$



(4) $\langle S + 2T, Q + L \rangle$



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x^2(x - a^2y + 2az) \\ C' : h(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \end{cases}$$

Kodaira fiber	
$I_1^* \cdots t = 0$	
$I_2 \cdots t = \infty$	
$I_2 \cdots t = \frac{a^4}{a^2 - 1}$	
$I_1 \cdots t = 4$	

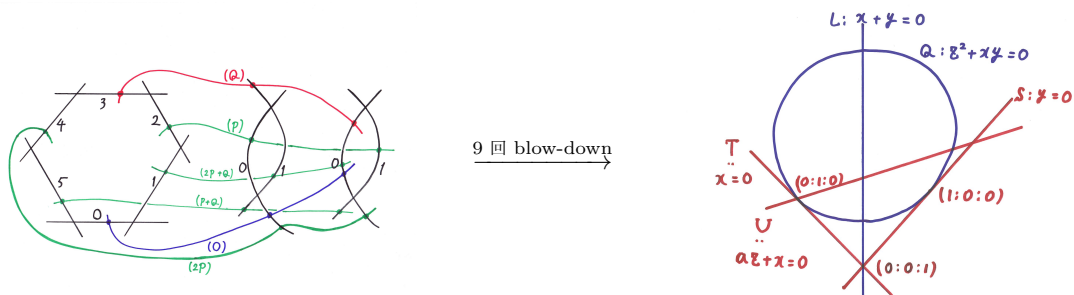
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + t(2t - a^2)x^2 + t^3(t - a^2 + 1)x + t^4(t - a^2)$

(5)

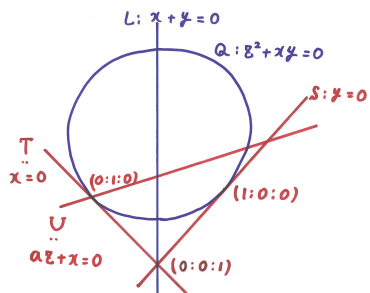
$$\left. \begin{array}{l} \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 9 \text{ 個} \\ \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 3 \text{ 個} \end{array} \right\} \therefore 12 \text{ 個}$$

3.4.11 No.53 $A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$

$$(2) \quad \Phi^{-1}(A_7) \ni \langle Q + L, S + T + U \rangle$$



$$(4) \quad \langle Q + L, S + T + U \rangle$$



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = xy(az + x) \end{cases}$$

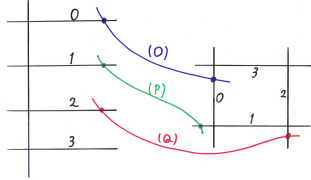
Kodaira fiber	$I_6 \cdots t = \infty$ $2I_2 \cdots t = 0, -1$ $2I_1 \cdots t = \frac{4a+4}{a^2}, -\frac{4a-4}{a^2}$
---------------	---

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (a^2t^2 - 4t + 4)x^2 + 8t(a^2t - 2)x + 16t^2$

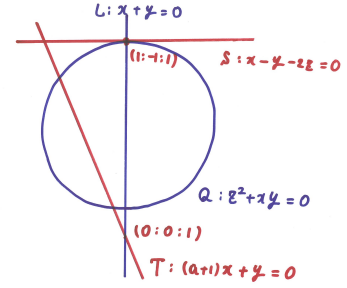
(5) $\left. \begin{array}{l} \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 11 \text{ 個} \\ \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 3 \text{ 個} \end{array} \right\} \therefore 14 \text{ 個}$

3.4.12 No.54 $D_4 \oplus A_3$

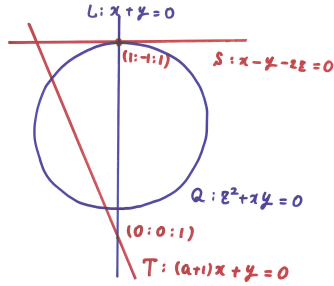
(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle S + 2T, Q + L \rangle$



9 回 blow-down



(4) $\langle S + 2T, Q + L \rangle$



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = ((a+1)x + y)^2(x - y - 2z) \\ C' : h(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_0^* \cdots t = 0$
	$I_4 \cdots t = \infty$
	$2I_1 \cdots t = 4a, 4a^2 + 4a$

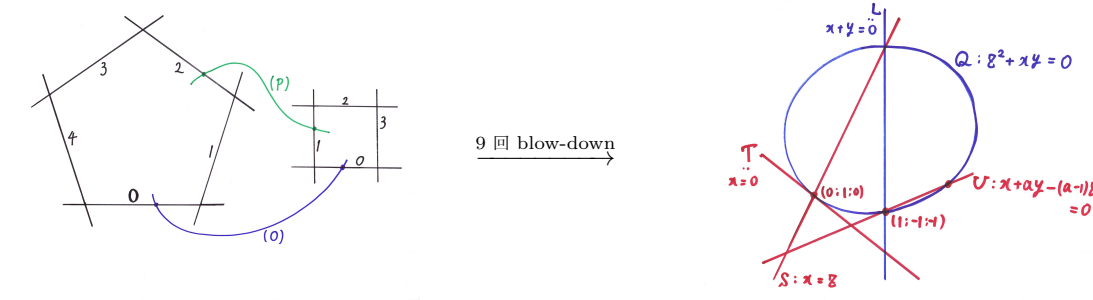
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + t(t + a^2 - 4a)x^2 + 2a^2t^2(t - 4a)x + a^4t^3(t - 4a)$

(5)

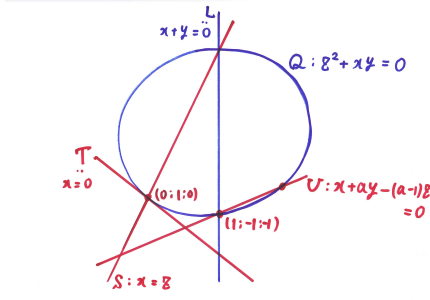
$$\left. \begin{array}{l} \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 9 \text{ 個} \\ \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 2 \text{ 個} \end{array} \right\} \therefore 11 \text{ 個}$$

3.4.13 No.55 $A_4 \oplus A_3$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle Q + L, S + T + U \rangle$



(4) $\langle Q + L, S + T + U \rangle$

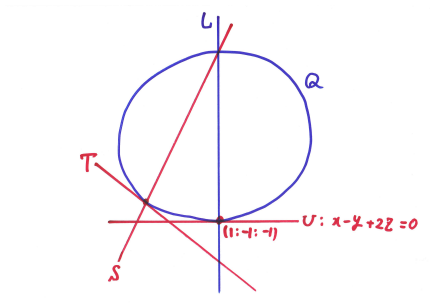


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = x(x - z)(x + ay - (a - 1)z) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_5 \cdots t = \infty$
	$I_4 \cdots t = 0$
	$3I_1 \cdots t^3 - \frac{14a-8}{a^2}t^2 - \frac{12a^2-8a-16}{a^4}t - \frac{4a+4}{a^4} = 0$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + \{a^2t^2 + 4(a-2)t + 4\}x^2 + 8(a-1)t^2(a^2t-2)x + 16a^2(a-1)^2t^4$

特に $a = -1$ のとき, 直線 U は点 $(1 : -1 : -1)$ において Q に接し, このとき $A_4^{\oplus 2}$ (No.67) を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \\ C' : h(x, y, z) = x(x - z)(x - y + 2z) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$2I_5 \cdots t = 0, \infty$
	$2I_1 \cdots t^2 + 22t - 4 = 0$

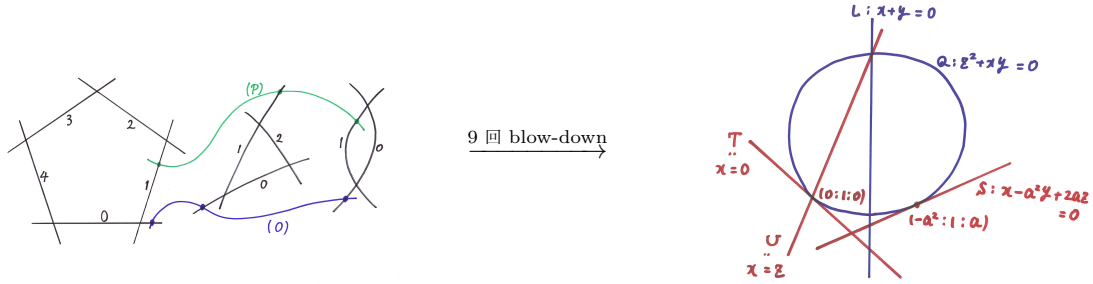
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (t^2 - 12t + 4)x^2 - 16(t-2)t^2x + 64t^4$

(5)

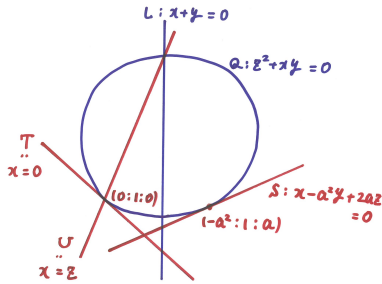
- (O) と交わらない (-1) -curve の個数 $\cdots 10$ 個
 - (O) と交わる (-2) -curve の個数 $\cdots 2$ 個
- $\therefore 12$ 個

3.4.14 No.56 $A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle S + T + U, Q + L \rangle$



(4) $\langle S + T + U, Q + L \rangle$



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x(x - z)(x - a^2y + 2az) \\ C' : h(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_5 \cdots t = 0$ $I_3 \cdots t = \infty$ $I_2 \cdots t = \frac{a^3}{a-1}$ $2I_1 \cdots t^2 + \frac{a^2 - 18a - 27}{8}t - \frac{a^3}{4} = 0$
---------------	--

Weierstrass equation :

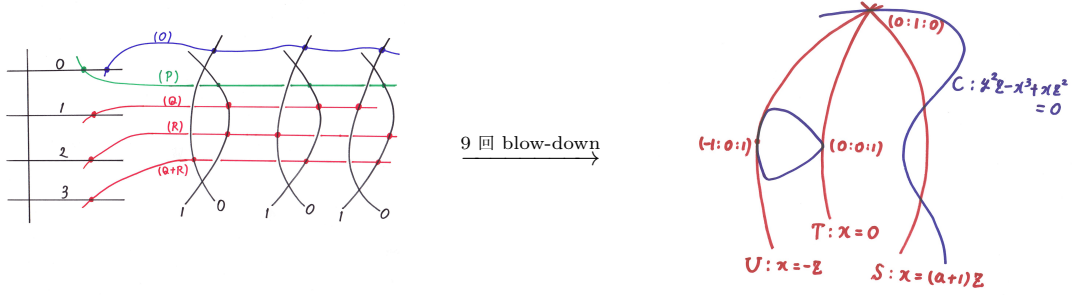
$$y^2 = x^3 + \{-8t^2 + (4a^2 + 8a)t + a^4\}x^2 + 8t^2\{2t^2 - 2(a^2 + 2a - 1)t + 2a^2(a + 1)\}x - 16t^4\{4t - (2a + 1)^2\}$$

(5)

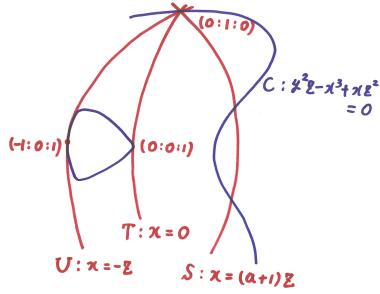
- (O) と交わらない (-1) -curve の個数 $\cdots 12$ 個
 - (O) と交わる (-2) -curve の個数 $\cdots 3$ 個
- } $\therefore 15$ 個

3.4.15 No.57 $D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle C, S+T+U \rangle$



(4) $\langle C, S+T+U \rangle$

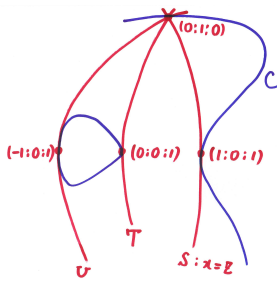


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x(x+z)(x-(a+1)z) \\ C' : h(x, y, z) = y^2z - x^3 + xz^2 + x(x+z)(x-(a+1)z) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_0^* \cdots t = 0$
	$I_1 \cdots t = \infty$
	$2I_1 \cdots t = -\frac{a+2}{a}, -\frac{a+1}{a}$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + at(t+1)x^2 - t^2(at+a+1)x$

特に $a=0$ のとき, 直線 S は点 $(1:0:1)$ において C に接し, このとき $D_4^{\oplus 2}$ (No.73) を得る.



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x(x+z)(x-z) \\ C' : h(x, y, z) = y^2z - x^3 + xz^2 + x(x+z)(x-z) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_0^* \cdots t = 0, \infty$
---------------	------------------------------

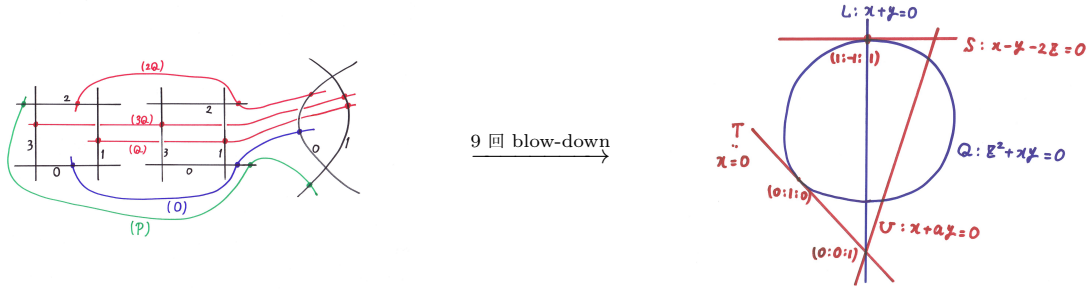
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 - t^2x$

(5)

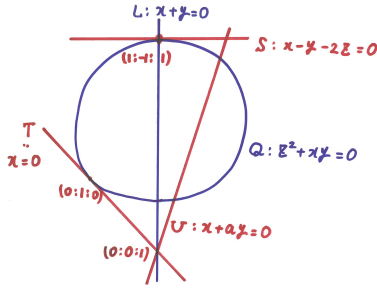
- (O) と交わらない (-1) -curve の個数 $\cdots 13$ 個
 - (O) と交わる (-2) -curve の個数 $\cdots 4$ 個
- $\therefore 17$ 個

3.4.16 No.58 $A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle S + T + U, Q + L \rangle$



(4) $\langle S + T + U, Q + L \rangle$

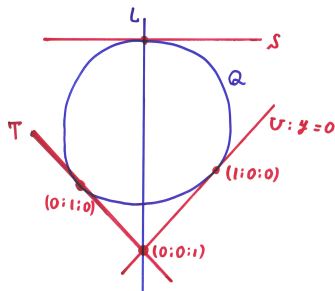


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x(x + ay)(x - y - 2z) \\ C' : h(x, y, z) = (x + y)(z^2 + y) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$2I_4 \cdots t = 0, \infty$
	$I_2 \cdots t = 1$
	$2I_1 \cdots t^2 + \frac{2a-4}{a}t + 1 = 0$

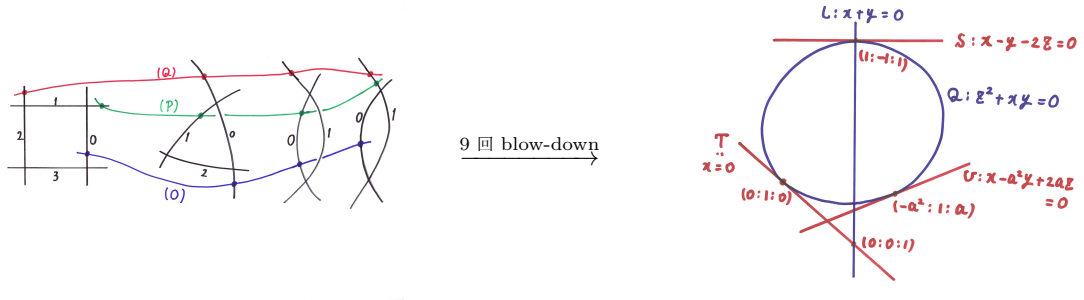
Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + (2at^2 - t - a)x^2 + a(t-1)t(at^2 + at - 2)x + a(t-1)^2t^2(at-1)$

特に $a = \infty$ のとき, 直線 U は点 $(1 : 0 : 0)$ において Q に接し, このとき $(A_3 \oplus A_1)^{\oplus 2}$ (No.74) を得る.

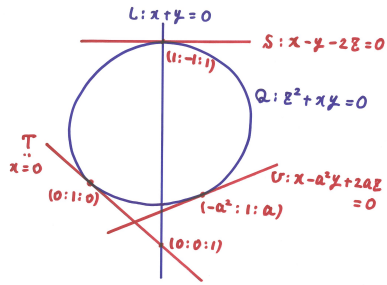


3.4.17 No.59 $A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle S+T+U, Q+L \rangle$



(4) $\langle S+T+U, Q+L \rangle$



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = x(x - a^2y + 2az)(x - y - 2z) \\ C' : h(x, y, z) = (x + y)(z^2 + xy) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$I_4 \cdots t = \infty$
	$I_3 \cdots t = 0$
	$3I_2 \cdots t = -a^2, \frac{a(a+1)}{a-1}$
	$I_1 \cdots t = 4a+4$

Weierstrass equation :

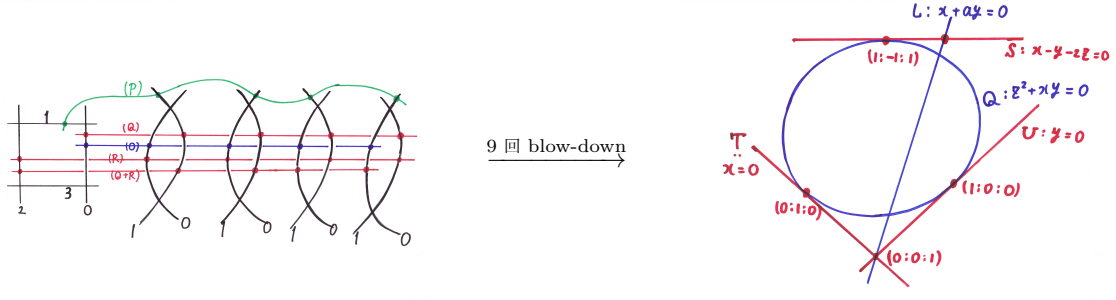
$$y^2 = x^3 + \{2t^2 - (4a+1)t - a^2(a+1)^2\}x^2 + t(t+a^2)\{t^2 - a(a+4)t + 2a(a+1)^2\}x + t^2(t+a^2)^2\{t - (a+1)^2\}$$

(5)

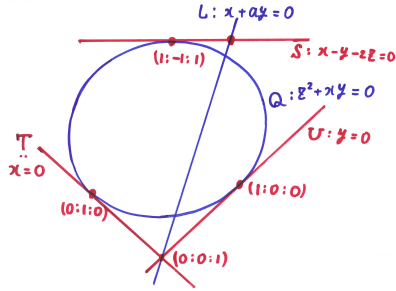
- (O) と交わらない (-1) -curve の個数 $\cdots 17$ 個
 - (O) と交わる (-2) -curve の個数 $\cdots 4$ 個
- $\therefore 21$ 個

3.4.18 No.60 $A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$

(2) $\Phi^{-1}(A_7) \ni \langle Q + L, S + T + U \rangle$



(4) $\langle Q + L, S + T + U \rangle$



$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = (x + ay)(z^2 + xy) - xy(x - y - 2z) \\ C' : h(x, y, z) = xy(x - y - 2z) \end{cases}$$

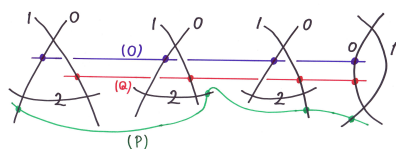
Kodaira fiber	$I_4 \cdots t = 0$
	$4I_2 \cdots t = 0, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a+1}$

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + \{at^2 + (a+1)t - 1\}x^2 + \{at^2((a+1)t - 1)\}x$

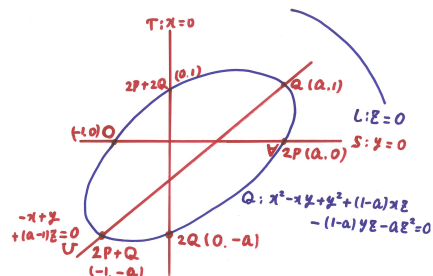
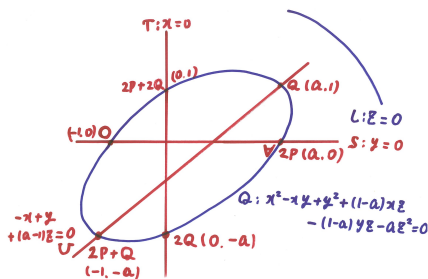
(5)

- (O) と交わらない (-1) -curve の個数 $\cdots 19$ 個
 - (O) と交わる (-2) -curve の個数 $\cdots 5$ 個
- } $\therefore 24$ 個

3.4.19 No.61 $A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$

$$(2) \quad \Phi^{-1}(A_7) \ni \langle S + T + U, Q + L \rangle^{*36}$$


9 回 blow-down


$$(4) \quad \langle S + T + U, Q + L \rangle$$


$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = xy(-x + y + (a - 1)z) \\ C' : h(x, y, z) = z(x^2 - xy + y^2 + (1 - a)xz - (1 - a)yz - az^2) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$3I_3 \cdots t = 0, 1, -a$ $I_2 \cdots t = \infty$ $I_1 \cdots t = -\frac{(a-1)^3}{9(a^2+a+1)}$
---------------	---

Weierstrass equation : $y^2 = x^3 + c_2(a, t)x^2 + c_4(a, t)x + c_6(a, t)$

ここで、

$$\begin{cases} c_2(a, t) = 3(4a^2 + 3a + 3)t^2 + 6(a - 1)(2a^2 + a + 1)t - (11a^3 + a^2 + a - 1) \\ c_4(a, t) = 24(a^2 + a + 1)(2a^2 + a + 1)t^4 + 8(a - 1)(12a^4 + 15a^3 + 19a^2 + 8a + 4)t^3 \\ \quad + 8(6a^6 - 17a^5 - 9a^4 - 19a^3 - a^2 - 3a + 1)t^2 - 8a(a - 1)(11a^4 + 7a^3 + 8a^2 + a + 1)t \\ \quad + 8a^3(5a^3 + a^2 + a - 1) \\ c_6(a, t) = 16(a^2 + a + 1)^2(4a^2 + a + 1)t^6 + 32(a - 1)(a^2 + a + 1)(6a^4 + 6a^3 + 7a^2 + 2a + 1)t^5 \\ \quad + 16(12a^8 - 14a^7 - 18a^6 - 51a^5 - 23a^4 - 20a^3 + 2a^2 - a + 1)t^4 \\ \quad + 32a(a - 1)(2a^7 - 12a^6 - 16a^5 - 27a^4 - 15a^3 - 11a^2 - 2a - 1)t^3 \\ \quad - 16a^2(11a^7 - 19a^6 - 9a^5 - 31a^4 - 4a^3 - 10a^2 + a - 1)t^2 \\ \quad + 32a^4(a - 1)(5a^4 + 4a^3 + 5a^2 + a + 1)t - 16a^6(3a^3 + a^2 + a - 1) \end{cases}$$

多項式の形が複雑であるので, この形の elliptic surface が $A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$ 型であることを確かめておく.

```
> Q1 := RationalField();
> Q2<a,b,c,d,e,f,g,u> :=FunctionField(Q1,8);
> R<t> := FunctionField(Q2);
```

*36 この cubic pencil になる理由を次節に与えた.

```

> E := EllipticCurve([0,3*(4*a^2+3*a+3)*t^2 +6*(a-1)*(2*a^2+a+1)*t
-(11*a^3+a^2+a-1),0,24*(a^2+a+1)*(2*a^2+a+1)*t^4
+8*(a-1)*(12*a^4+15*a^3+19*a^2+8*a+4)*t^3
+8*(6*a^6-17*a^5-9*a^4-19*a^3-a^2-3*a+1)*t^2
-8*a*(a-1)*(11*a^4+7*a^3+8*a^2+a+1)*t+8*a^3*(5*a^3+a^2+a-1),
16*(a^2+a+1)^2*(4*a^2+a+1)*t^6
+32*(a-1)*(a^2+a+1)*(6*a^4+6*a^3+7*a^2+2*a+1)*t^5
+16*(12*a^8-14*a^7-18*a^6-51*a^5-23*a^4-20*a^3+2*a^2-a+1)*t^4
+32*a*(a-1)*(2*a^7-12*a^6-16*a^5-27*a^4-15*a^3-11*a^2-2*a-1)*t^3
-16*a^2*(11*a^7-19*a^6-9*a^5-31*a^4-4*a^3-10*a^2+a-1)*t^2
+32*a^4*(a-1)*(5*a^4+4*a^3+5*a^2+a+1)*t-16*a^6*(3*a^3+a^2+a-1)]);
> E ;
> KodairaSymbols(E);
> BadPlaces(E);

```

%%%%%%%%%%%%%% 出力結果 %%%%%%%%%%%%%%%

```

Elliptic Curve defined by y^2 = x^3 + ((12*a^2 + 9*a + 9)*t^2 + (12*a^3 - 6*a^2
- 6)*t - 11*a^3 - a^2 - a + 1)*x^2 + ((48*a^4 + 72*a^3 + 96*a^2 + 48*a +
24)*t^4 + (96*a^5 + 24*a^4 + 32*a^3 - 88*a^2 - 32*a - 32)*t^3 + (48*a^6 -
136*a^5 - 72*a^4 - 152*a^3 - 8*a^2 - 24*a + 8)*t^2 + (-88*a^6 + 32*a^5 -
8*a^4 + 56*a^3 + 8*a)*t + (40*a^6 + 8*a^5 + 8*a^4 - 8*a^3))*x + ((64*a^6 +
144*a^5 + 240*a^4 + 208*a^3 + 144*a^2 + 48*a + 16)*t^6 + (192*a^7 + 192*a^6
+ 224*a^5 - 128*a^4 - 160*a^3 - 224*a^2 - 64*a - 32)*t^5 + (192*a^8 -
224*a^7 - 288*a^6 - 816*a^5 - 368*a^4 - 320*a^3 + 32*a^2 - 16*a + 16)*t^4 +
(64*a^9 - 448*a^8 - 128*a^7 - 352*a^6 + 384*a^5 + 128*a^4 + 288*a^3 + 32*a^2
+ 32*a)*t^3 + (-176*a^9 + 304*a^8 + 144*a^7 + 496*a^6 + 64*a^5 + 160*a^4 -
16*a^3 + 16*a^2)*t^2 + (160*a^9 - 32*a^8 + 32*a^7 - 128*a^6 - 32*a^4)*t -
48*a^9 - 16*a^8 - 16*a^7 + 16*a^6) over Univariate rational function field
over Multivariate rational function field of rank 8 over Rational Field
[ <I1, 1>, <I2, 1>, <I3, 1>, <I3, 1>, <I3, 1> ]
[
  t + (1/9*a^3 - 1/3*a^2 + 1/3*a - 1/9)/(a^2 + a + 1),
  1/t,
  t + a,
  t,
  t - 1
]

```

従って、これは $A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$ 型.

特に $a = \omega$ のとき, 円 Q が退化して 2 直線となり, このとき $A_2^{\oplus 4}$ (No.68) を得る.

$$\begin{cases} C : g(x, y, z) = xy(-x + y + (\omega - 1)z) \\ C' : h(x, y, z) = z(x^2 - xy + y^2 + (1 - \omega)xz - (1 - \omega)yz - \omega z^2) \end{cases}$$

Kodaira fiber	$4I_3 \cdots t = 0, 1, -\omega, \infty$
---------------	---

Weierstrass equation : $y^2 + c_1(a, t)xy + c_3(a, t)y = x^3 + c_2(a, t)x^2 + c_4(a, t)x + c_6(a, t)$

ここで,

$$\begin{cases} c_1(a, t) = \frac{t^3 + (\omega - 1)t^2}{(t - 1)(t + \omega)} \\ c_3(a, t) = \frac{(-\omega + 1)t^6}{(t - 1)^2(t^2 + 2\omega t - \omega - 1)} \\ c_2(a, t) = \frac{-t^6 - 2(\omega - 1)t^5 + 3\omega t^4}{(t - 1)^2(t^2 + 2\omega t - \omega - 1)} \\ c_4(a, t) = \frac{(\omega - 1)t^9 - 3\omega t^8}{(t - 1)^3(t^3 + 3\omega t^2 - 3(\omega + 1)t + 1)} \\ c_6(a, t) = \frac{\omega t^{12}}{(t - 1)^4(t^4 + 4\omega t^3 - 6(\omega + 1)t^2 + 4t + \omega)} \end{cases}$$

(5)

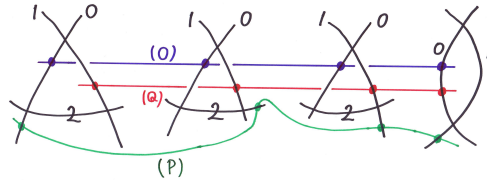
$$\left. \begin{array}{l} \bullet (O) \text{ と交わらない } (-1)\text{-curve の個数} \cdots 19 \text{ 個} \\ \bullet (O) \text{ と交わる } (-2)\text{-curve の個数} \cdots 4 \text{ 個} \end{array} \right\} \therefore 23 \text{ 個}$$

以上より, 定理 3.1 の主張も確かめられた.

実際, $r = 0$ と $r = 1$ の場合の関係は以下の通り. (上で与えた一例であり, 他の $r = 1$ の場合の特殊化で $r = 0$ の場合を得ることもできる.)

$r = 0$		$r = 1$	
No.62	E_8	No.43	E_7
No.63	A_8	No.45	A_7
No.64	D_8	No.46	D_7
No.65	$E_7 \oplus A_1$	No.43	E_7
No.66	$A_5 \oplus A_2 \oplus A_1$	No.51	$A_5 \oplus A_2$
No.67	$A_4^{\oplus 2}$	No.55	$A_4 \oplus A_3$
No.68	$A_2^{\oplus 4}$	No.61	$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$
No.69	$E_6 \oplus A_2$	No.49	$E_6 \oplus A_1$
No.70	$A_7 \oplus A_1$	No.44	A_7
No.71	$D_6 \oplus A_1^{\oplus 2}$	No.48	$D_6 \oplus A_1$
No.72	$D_5 \oplus A_3$	No.50	$D_5 \oplus A_2$
No.73	$D_4^{\oplus 2}$	No.57	$D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$
No.74	$(A_3 \oplus A_1)^{\oplus 2}$	No.58	$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$

3.4.20 No.61 $A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$ に対応する cubic pencil について



2.3.19 節の結果より, 互いに交わらない section の集合の 1 つは以下の通り.

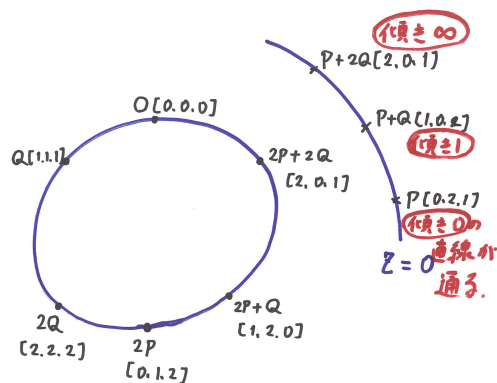
$$\mathfrak{S}' = \left\{ \begin{array}{lll} O = [0, 0, 0, 0] & P = [0, 2, 1, 1] & 2P = [0, 1, 2, 0] \\ Q = [1, 1, 1, 0] & P + Q = [1, 0, 2, 1] & 2P + Q = [1, 2, 0, 0] \\ 2Q = [2, 2, 2, 0] & P + 2Q = [2, 1, 0, 1] & 2P + 2Q = [2, 0, 1, 0] \end{array} \right\}$$

この 9 本をつぶした図を書きたい.

それぞれ section $(mP + nQ)$ をつぶしてできた base point を $mP + nQ \in \mathbb{P}^2$ と表すこととする.

9 個の base point は以下を満たす.

- ・ 9 個の内, 6 個は同一 conic 上^{*37}にあり, 残りの 3 個は同一直線上^{*38}にある. この直線が $\mathbb{P}^2$ の無限遠直線となるように $\mathbb{P}^2$ の座標を取る. (この 3 点については図にあるように $(0 : 1 : 0), (1 : 1 : 0), (1 : 0 : 0)$ と定める.)
- ・ $\mathbb{A}_k^2$ に存在する 6 点について, 以下のような状況となっている.



^{*37} singular fiber における A_1 の既約成分 0 に対応. これは 6 回 blow-down されるので自己交点数は 4 となる. つまり conic.

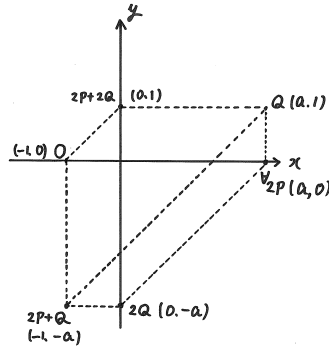
^{*38} singular fiber における A_1 の既約成分 1 に対応. これは 3 回 blow-down されるので自己交点数は 1 となる. つまり line.

ここで, i_j 座標どうしが等しい 3 点は同一直線上にあることに注意.
(例えば, 3 点 $O, P, 2P$ は全て i_1 座標が 0 なので, これらの base point は同一直線上^{*39}にある.)

点 O を $\mathbb{A}_k^2$ 上に任意にとるとき,

$$\begin{cases} \text{点 } 2P \text{ は点 } O \text{ を通り, 傾き } 0 \text{ の直線上にあり,} \\ \text{点 } 2P + 2Q \text{ は点 } O \text{ を通り, 傾き } 1 \text{ の直線上にあり,} \\ \text{点 } 2P + Q \text{ は点 } O \text{ を通り, 傾き } \infty \text{ の直線上にある.} \end{cases}$$

よって, $O = (-1, 0)$, $2P + 2Q = (0, 1)$ となるように $\mathbb{A}_k^2$ の座標を取る. (これで $\mathbb{P}^2$ の座標が決定された.)
今 $r = 1$ の場合を考えており, 自由度が 1 つあることを考慮して, $2P = (a, 0)$ (a : パラメータ) と表そう.



このとき, 点 Q は,

$$\begin{cases} \text{点 } 2P \text{ を通り, 傾き } \infty \text{ の直線上にあり,} \\ \text{点 } 2P + 2Q \text{ を通り, 傾き } 0 \text{ の直線上にあるので, 上図の通り.} \end{cases}$$

点 $2Q$ は,

$$\begin{cases} \text{点 } 2P \text{ を通り, 傾き } 1 \text{ の直線上にあり,} \\ \text{点 } 2P + 2Q \text{ を通り, 傾き } \infty \text{ の直線上にあるので, 上図の通り.} \end{cases}$$

点 $2P + Q$ は,

$$\begin{cases} \text{点 } Q \text{ を通り, 傾き } 1 \text{ の直線上にあり,} \\ \text{点 } O \text{ を通り, 傾き } \infty \text{ の直線上にあり,} \\ \text{点 } 2Q \text{ を通り, 傾き } 0 \text{ の直線上にあるので, 上図の通り.} \end{cases}$$

以上より base point 9 点の配置は決定された.

あとは A_2 に対応する 3 つの直線の方程式を求めていく.

1 つ目の A_2 に対応する 3 つの直線の方程式: $xy\{x - y - (a - 1)\} = 0$

$$\begin{cases} \overline{O, 2P}: y = 0 \\ \overline{Q, 2P+Q}: y = x - a + 1 \\ \overline{2Q, 2P+2Q}: x = 0 \end{cases}$$

^{*39} singular fiber における 1 番左の A_2 の既約成分 0 に対応. これは 3 回 blow-down されるので自己交点数は 1 となる. つまり line.

2 つ目の A_2 に対応する 3 つの直線の方程式 : $(x - y + 1)(x - a)(y + a) = 0$

$$\begin{cases} \overline{O, 2P + 2Q} : y = x + 1 \\ \overline{Q, 2P} : x = a \\ \overline{2Q, 2P + Q} : y = -a \end{cases}$$

1 つ目の A_2 に対応する 3 つの直線の方程式 : $(x + 1)(y - 1)(x - y - a) = 0$

$$\begin{cases} \overline{O, 2P + Q} : x = -1 \\ \overline{Q, 2P + 2Q} : y = 1 \\ \overline{2Q, 2P} : y = x - a \end{cases}$$

以上より, cubic pencil の各元に座標を与えることができた.

$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$ が退化して $A_2^{\oplus 4}$ となるパラメータ a を求めよう.

1 つ目の方程式と 3 つ目の方程式の差をとって,

$$x^2 - xy + y^2 + (1 - a)x - (1 - a)y - a = 0$$

これは円の方程式であるので, base point の内, 6 点は同一円周上にあることがわかる. ここで,

$$\begin{aligned} A_2^{\oplus 3} \oplus A_1 \text{ が退化して } A_2^{\oplus 4} \text{ となる} &\iff \text{円が退化して 2 直線に分かれる} \\ &\iff x^2 - xy + y^2 + (1 - a)x - (1 - a)y - a = 0 \text{ が} \\ &\quad x, y \text{ の 1 次式の積に分解} \\ &\iff x \text{ の多項式としてみた判別式} \\ &\quad D_1 = -3y^2 - 2(a - 1)y + (a + 1)^2 \text{ が} \\ &\quad y \text{ の多項式とみて重解を持つ} \\ &\iff D_1 = 0 \text{ の判別式} \\ &\quad D_2 = (a - 1)^2 + 3(a + 1)^2 = 0 \text{ が成り立つ.} \\ &\iff a^2 + a + 1 = 0 \\ &\iff a = \omega, \omega^2 \text{ (ここで } \omega \text{ は 1 の原始 3 乗根)} \end{aligned}$$

従って, 求めるパラメータは $a = \omega, \omega^2$ となる.

以上より前節の結果が確かめられた.

3.5 一般の Rational elliptic surfaces の場合

今までは全て $r = 0, 1$ の場合を考えてきたが, $r \geq 2$ の場合においても $r = 1$ の場合と全く同様にして, 2, 3 章で述べたことを全て調べることができる. ここでは分類結果を各々図示することはしないが, その結果導かれるものを紹介する.

定理 2.1. [再掲]

singular fiber と **section** からなる **dual graph** は各 T に対して一意的に存在する.

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導を頂いた修士論文指導教員の京都大学数理解析研究所 向井茂教授に感謝致します。特に 3.4.20 節における semi-Hesse pencil に関する idea を頂きました。また、京都大学数理解析研究所 中山昇准教授をはじめ、京都大学数理解析研究所代数幾何セミナーの諸先生方には、毎週のセミナーにおいて多くの知識や示唆を頂きました。感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Bosma, W., Cannon, J., and Playoust, C.; The Magma algebra system. I. The user language, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.
- [2] Kodaira, K.; On compact analytic surfaces II, III Ann. of Math. **77** (1963), 563-626; **78** (1963), 1-40.
- [3] Miranda, R.; On the stability of pencils of cubic curves, Amer J. Math. **102** (1980), 1177-1202.
- [4] Naruki, I.; Configurations related to maximal rational elliptic surfaces, Adv. Studies in Pure Math. **8** (1986), 314-340.
- [5] Oguiso, K. and Shioda, T.; The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface, Comment. Math. Univ. St. Pauli. **40** (1991), 83-99.
- [6] Persson, U.; Configurations of Kodaira fibers on rational elliptic surfaces, Math. Z. **205** (1990), 1-47.
- [7] Silverman, J.H.; Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves, Graduate Texts in Math. Springer Verlag, (1994).
- [8] 塩田徹治; Mordell-Weil Lattice の理論とその応用, 東京大学数理科学セミナーノート (1993).
- [9] Shioda, T.; Existence of rational elliptic surface with a given Mordell-Weil lattice, Proc. Japan Acad. **68** (1992), 251-255.