

Asymptotic Hodge structures

満洲 俊樹 (阪大教養)

代数曲面に於ては canonical ring の構造を調べる
 ことが非常に重要な課題のひとつであった。
 また、一般に $\pi: X \rightarrow S$ を代数多様体の smooth
 family とし、 $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X_s, K_{X_s}^{\otimes m})$ の $s \in S$ が動くにつ
 れての変化を調べることも意味があろう。一
 方、川又 - Viehweg らにより ① 小平次元の加法
 性 ② canonical ring の変形 ③ Hodge 構造の変形
 ④ birational Torelli problem などが相互に関係しあ
 っていることが示されている。そこで我々は
 Gauss-Manin connection のある種の一般化によっ
 て Hodge 構造を少し拡張しておいて（それを、
 asymptotic Hodge structure と呼ぼう）、そういっ
 た構造の変形というものを考えてみたい。以
 下、すべての variety は $\mathbb{C}$ 上定義されていると
 する。

§ 1. Absolute case.

n 次元非特異射影多様体 X に対し.

$K := \mathcal{O}(X)$, $K_{ab} := \text{maximal abelian extension of } K$
 $\{K_\lambda; \lambda \in \Lambda\} := \text{the set of all subfields } K_\lambda \text{ of } K_{ab}$
 such that K_λ / K is a finite abelian extension.

$G_\lambda := \text{Gal}(K_\lambda / K)$ ----- とおく。

更に各 $\lambda \in \Lambda$ に対して, K_λ の非特異射影モデル X_λ を

- 1) G_λ acts regularly on X_λ ;
- 2) dominant rational map $\pi_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ induced by $K_\lambda \supset K$ is a morphism.

となるようにとる。今, X 上の hyperplane section に対応する Kähler form $L \in H^{1,1}(X)$ をひと固定し.

$$H_{\text{prim}}^p(X_\lambda; \mathbb{Q}) := \left\{ \varphi \in H^p(X_\lambda; \mathbb{Q}) ; \varphi \cdot (\pi_\lambda^* L)^{n-p+1} = 0 \text{ in } H^{2n-p+2}(X_\lambda; \mathbb{Q}) \right\}$$

とおく。そして $H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \mathcal{O}_X^p)$ (resp. $H_{\text{prim}}^p(X_\lambda; \mathbb{Q})$, etc.) に positive definite Hermitian metric $(\ , \)_\lambda$ (resp. nondegenerate bilinear form $\langle \ , \ \rangle_\lambda$, etc.) を次のように定義する。

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \mathcal{O}_X^p),$$

$$(\omega_1, \omega_2)_\lambda := \frac{(\sqrt{-1})^{p^2}}{\deg \pi_\lambda} \int_{X_\lambda} \omega_1 \wedge \overline{\omega_2} \wedge L^{n-p}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{resp. } \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H_{\text{prim}}^p(X_\lambda; \mathbb{Q}), \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\lambda := \frac{1}{\deg \pi_\lambda} \int_{X_\lambda} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge L^{n-p} \in \mathbb{Q} \end{array} \right).$$

さて各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$E_\lambda := \{x \in X_\lambda; \dim \pi_\lambda^{-1}(x) > 0\}$$

$$\Gamma_\lambda := \{ \gamma \in H_p(X_\lambda; \mathbb{Q}) \mid \pi_{\lambda*}(\gamma) = 0 \text{ and } \gamma \text{ is supported in } E_\lambda \}$$

とおく。そして $H_{\text{prim}}^p(X_\lambda; \mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$ -vector subspace H_λ^p を

$$H_\lambda^p := \{ \varphi \in H_{\text{prim}}^p(X_\lambda; \mathbb{Q}); \varphi[\gamma] = 0 \ \forall \gamma \in \Gamma_\lambda \}$$

で定義する。このとき、 H_λ^p は K_λ の model X_λ のとり方によらず、 ρ と K_λ だけで unique に定まる。さて、もし $K_\mu \supseteq K_\lambda$ だとすれば、これは dominant rational map $\pi_{\lambda\mu}: X_\mu \rightarrow X_\lambda$ を induce する。今、 $H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)$, H_λ^p ($\lambda \in \Lambda$) を問題にするので $\pi_{\lambda\mu}$ が morphism であると仮定する。(そうしてもよいことはあとですぐわかる。) ます。

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda\mu}^* : H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p) &\hookrightarrow H^0(X_\mu, \pi_\mu^* \Omega_X^p) \\ \pi_{\lambda\mu}^* : H_\lambda^p &\hookrightarrow H_\mu^p \end{aligned}$$

が induce されることに注意する。しかも、

$$(\omega_1, \omega_2)_\lambda = (\pi_{\lambda\mu}^*(\omega_1), \pi_{\lambda\mu}^*(\omega_2))_\mu$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\lambda = \langle \pi_{\lambda\mu}^*(\varphi_1), \pi_{\lambda\mu}^*(\varphi_2) \rangle_\mu$$

かつ $\forall \omega_1, \omega_2 \in H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H_\lambda^p$ に対して成り立つ。故に $\{(H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p), (\cdot, \cdot)_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ (resp. $\{(H_\lambda^p, \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$) は inductive system of positive definite Hermitian metrics (resp. inductive system of nondegenerate $\mathbb{Q}$ -bilinear forms) を成す。そこで、

$$H_\infty^{p,0}(X) := \varinjlim H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)$$

$$H_\infty^p(X) := \varinjlim H_\lambda^p$$

とおくと、 $H_\infty^{p,0}(X)$ は natural に $\mathbb{C}$ 上の pre-Hilbert space となっており、この内積を $(\cdot, \cdot)$ と書くことにする。また $H_\infty^p(X)$ 上にも natural に nondegenerate $\mathbb{Q}$ -bilinear form (これを $\langle \cdot, \cdot \rangle$ であらわす) が定義されている。しかも

$$H_\infty^{p,0}(X) \hookrightarrow H_\infty^p(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

かつ $H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p) \subset H_\lambda^p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} (\oplus H^p(X_\lambda, \mathbb{C}) \text{ の Hodge 分解})$ から自然に induce される。

[注意] $\lambda \in \Lambda$ をひとつ fix する。このとき、

$$(1) \quad \forall g \in G_\lambda, \quad (g^* \omega_1, g^* \omega_2) = (\omega_1, \omega_2) \text{ on } H_\infty^{p,0}(X)$$

$$\langle g^* \varphi_1, g^* \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \text{ on } H_\infty^p(X)$$

(i.e., G_λ acts isometrically on $H_\infty^{p,0}(X)$ and $H_\infty^p(X)$.)

(2) G_λ は有限可換群なので $\chi(G_\lambda) := \text{gp. hom}(G_\lambda, \mathbb{C}^*)$ とおき $F_\chi := \{\omega \in H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p); g \cdot \omega = \chi(g)\omega, \forall g \in G_\lambda\}$, $\tilde{F}_\chi := \{\varphi \in H_{\lambda, \mathbb{C}}^p; g \cdot \varphi = \chi(g)\varphi, \forall g \in G_\lambda\}$ とおく。

$$H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p) = \bigoplus_{\chi \in \chi(G_\lambda)} F_\chi, \quad H_{\lambda, \mathbb{C}}^p = \bigoplus_{\chi \in \chi(G_\lambda)} \tilde{F}_\chi,$$

但し $F_\chi = 0$ や $\tilde{F}_\chi = 0$ となる χ もあり得るものとする。

($\left\{ \begin{array}{l} \text{もっと一般に } G = \text{Gal}(K_{ab}/K) = \varprojlim G_\lambda \text{ と} \\ \text{おいたとき } H_\infty^{p,0}(X) = \bigoplus_{\chi \in \chi(G)} F_\chi^\infty, \quad (\dim F_\chi^\infty < +\infty, \forall \chi) \\ \text{where } F_\chi^\infty = \{\omega \in H_\infty^{p,0}(X); g \cdot \omega = \chi(g)\omega, \forall g \in G\} \\ \text{が成り立つ。} \end{array} \right.$)

$$(3) \quad \chi \neq \chi' \Rightarrow F_\chi \perp F_{\chi'}$$

さて $\forall \chi \in \chi(G_\lambda)$ に対し $m_\chi := \min\{m \in \mathbb{Z}; m > 0 \text{ and } \chi^m = 1\}$, $W_\chi := S^{m_\chi}(F_\chi)$, $\tilde{W}_\chi := S^{m_\chi}(\tilde{F}_\chi)$ とおく。そして

$$R_\lambda := \left(\begin{array}{l} \bigoplus_{m \geq 0} S^m(H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)) \text{ の } \mathbb{C}\text{-subalgebra} \\ \text{で } \{W_\chi; \chi \in \chi(G_\lambda)\} \text{ によって生成され} \\ \text{るもの} \end{array} \right)$$

$$\widetilde{R}_\lambda := \left(\begin{array}{l} \bigoplus_{m \geq 0} S^m(H_\lambda^p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \text{ の } \mathbb{C}\text{-subalgebra として} \\ \{ \widetilde{W}_\chi; \chi \in X(G_\lambda) \} \text{ によって生成} \\ \text{されるもの} \end{array} \right)$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{m \geq 0} S^m H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \mathcal{O}_X^p) \right)^{G_\lambda} &\rightarrow \left(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* S^m(\mathcal{O}_X^p)) \right)^{G_\lambda} \\ &\parallel \\ &\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* S^m(\mathcal{O}_X^p))^{G_\lambda} \\ &\parallel \\ &\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, S^m(\mathcal{O}_X^p)) \end{aligned}$$

なる natural map が

$$R_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, S^m(\mathcal{O}_X^p))$$

なる natural $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism を induce する。

$K_\mu \supseteq K_\lambda$ に対しては、

$$\begin{array}{ccc} R_\lambda & \xrightarrow{h_\lambda} & \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, S^m(\mathcal{O}_X^p)) \\ \cap & \searrow & \\ R_\mu & \xrightarrow{h_\mu} & \end{array}$$

なる commutative diagram が成り立つことから、

$$h: \varinjlim_\lambda R_\lambda \rightarrow \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, K_X^{\otimes m})$$

($\mathbb{C}$ -algebra hom) を得る。以下簡単のため $p = n (= \dim X)$ と仮定する。大切な事実は、

Proposition 1:

$$\lim_{\lambda} R_{\lambda} \xrightarrow{h} \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, K_X^{\otimes m}) \quad (\text{surjective}).$$

これは $R_{\lambda} = \bigoplus_{m \geq 0} R_{\lambda}^{(m)}$ (where $R_{\lambda}^{(m)} \subseteq S^m H^0(X_{\lambda}, \pi_{\lambda}^* K_X)$)

$$h_{\lambda}^{(m)} := h_{\lambda} |_{R_{\lambda}^{(m)}} : R_{\lambda}^{(m)} \rightarrow H^0(X, K_X^{\otimes m})$$

とおく。

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists \lambda \in \Lambda \text{ s.t. } h_{\lambda}^{(m)} \text{ is surjective}$$

を意味している。そこで $m \in \mathbb{Z}_+$ をひとつ fix し、 $\lambda \in \Lambda$ を $h_{\lambda}^{(m)}$ が surjective になるようなもの λ としよう。このとき、 $H^0(X_{\lambda}, \pi_{\lambda}^* K_X)$ の natural Hermitian metric $(,)_{\lambda}$ が $S^m H^0(X_{\lambda}, \pi_{\lambda}^* K_X)$ 従って $R_{\lambda}^{(m)}$ の natural Hermitian metric を induce する。従って、 $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ と $(\text{Ker } h_{\lambda}^{(m)})^{\perp}$ を同一視することによって $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ に Hermitian metric (= ねも $(,)_{\lambda}$ で表わすことにする) が定義される。この metric から定義される norm を $\| \cdot \|_{\lambda}$ で表わすと

$$\forall \omega \in H^0(X, K_X^{\otimes m}), \quad \|\omega\|_{\lambda} = \min_{\substack{u \in R_{\lambda}^{(m)}; h_{\lambda}^{(m)}(u) = \omega}} \|u\|_{\lambda}$$

が成り立っている。但し、ここで $\|u\|_{\lambda}$ とは、 u の $R_{\lambda}^{(m)}$ における natural Hermitian norm を意味するものとする。さて ~~次頁~~ で λ を動かして考える。

$R_\infty^{(m)} := \varinjlim_\lambda R_\lambda^{(m)}$, $h^{(m)} := h|_{R_\infty^{(m)}} : R_\infty^{(m)} \rightarrow H^0(X, K_X^{\otimes m})$
 とおき、 $R_\infty^{(m)}$ を completion して得られる Hilbert space
 を $\overline{R_\infty^{(m)}}$ で表わす。 $\text{Ker } h^{(m)}$ の $\overline{R_\infty^{(m)}}$ における閉包
 を $\overline{\text{Ker } h^{(m)}}$ で表わすと、 $\overline{R_\infty^{(m)}} = \overline{\text{Ker } h^{(m)}} \oplus (\overline{\text{Ker } h^{(m)}})^\perp$
 と分解する。そこで $\text{pr}_2 : \overline{R_\infty^{(m)}} \rightarrow (\overline{\text{Ker } h^{(m)}})^\perp$ を
 natural projection とすると、 $\mathbb{C}$ -linear map

$$\begin{array}{ccc}
 \eta_m : H^0(X, K_X^{\otimes m}) & \longrightarrow & (\overline{\text{Ker } h^{(m)}})^\perp \quad (\subseteq \overline{R_\infty^{(m)}}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \omega & \longmapsto & \text{pr}_2(h^{(m)-1}(\omega))
 \end{array}$$

が定義される。 $\forall \omega, \omega_1, \omega_2 \in H^0(X, K_X^{\otimes m})$ に対し、

$$\left. \begin{aligned}
 \|\omega\|_\infty &:= \|\eta_m(\omega)\| \\
 (\omega_1, \omega_2)_\infty &:= (\eta_m(\omega_1), \eta_m(\omega_2))
 \end{aligned} \right\}$$

とおく。このとき

$$\|\omega\|_\infty = \inf_\lambda \|\omega\|_\lambda = \inf_{u \in R_\infty^{(m)}; h^{(m)}(u) = \omega} \|u\|$$

が成り立っている。 ~~==あて==~~

Proposition 2: $\text{Ker } h^{(m)}$ が $R_\infty^{(m)}$ の closed subspace
 ならば (よって $h^{(m)}$ が bounded linear map ならば)
 この条件はみかされているが)、 η_m は単射。
 (よって特に $(\cdot, \cdot)_\infty$ は $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ の positive definite
 Hermitian metric を、 $\text{Ker } h^{(m)}$ の closedness の条件下で、

定義している。)

注意 [1]. $\chi(X) = 0$ ならば $\dim R_\infty^{(m)} = 0$ or 1 なので、 $\text{Ker } h^{(m)} = \{0\}$. 故に $(,)_\infty$ は $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ の positive definite Hermitian metric を定義している。しかし、一般の X に対しては、残念ながら、 $(,)_\infty$ が $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ のどのような Hermitian form を定義しているか、よくわからない。

[2] 以上の議論は、~~K~~ の abelian extension だけに制限する必要はなく、~~K~~ K の Galois 拡大全体をとっても可能である。

[3] 以上の議論は、 X を projective variety に限る必要はなく、たとえば X が open variety や、bounded domain などの場合でも ~~も~~ L^2 -integrable etc. の条件をつけ加えたり、ある程度の修正を施すことによって、かなりの事が ~~も~~ 同様にできる。

§2. Relative case.

X, S を非特異射影多様体とし、 $p: X \rightarrow S$

π surjective morphism with irreducible general fibres と
 する。 $K = \mathbb{C}(X)$, $k = \mathbb{C}(S)$, $n = \dim X - \dim S$ と
 し、 $\{K_\lambda; \lambda \in \Lambda\} :=$ the set of subfields K_λ of K_{ab}
 s.t. K_λ/K is a finite abelian extension とおく。更
 に、各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、 $k_\lambda :=$ (algebraic closure of k
 in K_λ) とすると、 k_λ/k は finite abelian
 extension となっている。 $H_\lambda := \text{Gal}(K_\lambda/K)$,
 $\bar{H}_\lambda := \text{Gal}(k_\lambda/k)$ とし、 K_λ の非特異射影モデル
 X_λ と、 k_λ の非特異射影モデル S_λ を次の様を選ぶ。
 3"。即ち

- ① H_λ (resp. $\bar{H}_\lambda$) acts regularly on X_λ (resp. S_λ);
 ② $\exists$ commutative diagram of surjective morphisms

$$\begin{array}{ccc}
 X_\lambda & \xrightarrow{\pi_\lambda} & X \\
 p_\lambda \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p \\
 S_\lambda & \xrightarrow{\bar{\pi}_\lambda} & S
 \end{array}$$

が成り立つようにする。このとき、

$$\exists \text{ natural homomorphism } \nu: H_\lambda \rightarrow \bar{H}_\lambda$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow \\
 k \longrightarrow k$$

such that

$$\begin{array}{ccc}
 X_\lambda & \xrightarrow{h} & X_\lambda \\
 p_\lambda \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p_\lambda \\
 S_\lambda & \xrightarrow{\bar{h}} & S_\lambda
 \end{array}$$
 commutes for $\forall h \in H_\lambda$

and that $G_\lambda (= \text{Ker } \nu) = \{h \in H_\lambda \mid h \text{ fibrewise acts on } X_\lambda/S_\lambda\}$.

今 $\lambda \in \Lambda$ をひとつ fix する。 S_λ の Zariski open dense subset S_λ^0 を適当にとって

1) p_λ is smooth over S_λ^0 ,

2) $\forall \tilde{s} \in S_\lambda^0, \quad R^n p_{\lambda*}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_\lambda, \tilde{s}}} \mathbb{C} = H^n((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \mathbb{C})$ and
 $p_{\lambda*}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_\lambda, \tilde{s}}} \mathbb{C} = H^0((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \pi_\lambda^* K_{X/S})$
 (where $s = \bar{\pi}_\lambda(\tilde{s})$)

となるようにできる。以下、 $R^n p_{\lambda*}(\mathcal{C})$, $p_{\lambda*}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S})$ などの sheaf は、すべて S_λ^0 の上に制限して考えることにし、しかも S_λ^0 は必要とあらば、適宜小さくとり直すことにする。さて、§1 で $H^n(X_\lambda, \mathbb{C})$ の subspace として $H_\lambda^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ を考えたが、 $\pi_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ のかわりに、 $\tilde{s} \in S_\lambda^0$ を任意にとってきて、

$\pi_\lambda|_{(X_\lambda)_{\tilde{s}}}: (X_\lambda)_{\tilde{s}} \rightarrow X_s$ (where $s = \bar{\pi}_\lambda(\tilde{s})$) を考え、そして $H^n((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \mathbb{C})$ の subspace として、上の $H_\lambda^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ にあたるものを得る。こういった $H^n((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \mathbb{C})$ の subspace を、 $\tilde{s} \in S_\lambda^0$ を動かすことによって S_λ^0 上の sheaf につなげたものを $\mathcal{H}_\lambda^n$ と書くことにする（もちろんこれは $R^n p_{\lambda*}(\mathcal{C})$ の subsheaf となっている）。 $G_\lambda (= \text{Ker } \nu)$ が $\mathcal{H}_\lambda^n$ や $p_{\lambda*}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S})$ などの sheaf に act していることに注意して、§1

と同様の議論によって

$$\mathcal{H}_\lambda^n = \bigoplus_{x \in X(G_\lambda)} \widetilde{\mathcal{F}}_x, \quad \rho_{\lambda*}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S}) = \bigoplus_{x \in X(G_\lambda)} \mathcal{F}_x$$

と分解する。(そして、各 $\tilde{s} \in S_\lambda^0$ 上の fibre 毎に §1 の注意 (2) における $H^0((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \pi_\lambda^* K_{X_s})$ (where $s = \pi_\lambda(\tilde{s})$) 等の分解が対応している。) そこで、

$$\widetilde{w}_x := S^{m_x}(\widetilde{\mathcal{F}}_x), \quad w_x := S^{m_x}(\mathcal{F}_x),$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda := \left(\begin{array}{l} \bigoplus_{m \geq 0} S^m(\mathcal{H}_\lambda^n) \text{ の } \mathcal{O}_{X_\lambda^0}\text{-subalgebra } \tau, \\ \{ \widetilde{w}_x; x \in X(G_\lambda) \} \text{ で生成されるもの} \end{array} \right),$$

$$\mathcal{R}_\lambda := \left(\begin{array}{l} \bigoplus_{m \geq 0} S^m(\rho_{\lambda*}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S})) \text{ の } \mathcal{O}_{X_\lambda^0}\text{-subalgebra } \tau, \\ \{ w_x; x \in X(G_\lambda) \} \text{ で生成されるもの} \end{array} \right),$$

とおく。(但し、 $X_\lambda^0 = \rho_\lambda^{-1}(S_\lambda^0)$ とする)。このとき、§1 の proposition 1 と同様にして、

Proposition 3 :

$$\lim_{\lambda} \mathcal{R}_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{m \geq 0} \overline{\pi}_\lambda^* (P_* (\omega_{X/S}^{\otimes m})) \quad (\text{surjective})$$

(over Zariski open subset of S_λ).

を得る。さて、 $\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda = \bigoplus_{m \geq 0} \widetilde{\mathcal{R}}_\lambda^{(m)}$, $\mathcal{R}_\lambda = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{R}_\lambda^{(m)}$,
(where $\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda^{(m)} \subseteq S^m(\mathcal{H}_\lambda^n)$, $\mathcal{R}_\lambda^{(m)} \subseteq S^m(\rho_{\lambda*}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S}))$) とおく。

このとき proposition 3 は、各 $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し、 $\exists \lambda \in \Lambda$ が存在して、 $\mathcal{R}_\lambda^{(m)} \xrightarrow{h_\lambda^{(m)}} \bar{\pi}_\lambda^*(p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ が surjective になるということも意味している。こういった $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $\bar{\pi}_\lambda^*(p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ によって $p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})$ に Hermitian metric が、 $\bar{\pi}_\lambda^*(p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ と $(\ker h_\lambda^{(m)})^\perp$ の同一視によって、定義される。(これを $(\cdot, \cdot)_\lambda$ で表す)。

Proposition 4: $\tilde{\mathcal{R}}_\lambda$ は natural な Hermitian metric によって flat な vector bundle と思えることができる。しかも $\mathbb{Q}$ -structure をもっている。

即ち $\tilde{\mathcal{R}}_\lambda$ は variation of Hodge structures の total vector bundle H_C と同じようなものになっていることがわかる。更だ。

Theorem: $\forall m \in \mathbb{Z}_+$, K_λ を十分大きくとれば、

$p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})$ が flat over Zariski open dense subset of S (in terms of the metric $(\cdot, \cdot)_\lambda$ defined above)

$\Rightarrow$ Canonical ring $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X_S, K_{X_S}^{\otimes n})$ は $S \in S$ を S の Zariski open set 上で動かしたとき動かない。

定理の statement が非常に不正確なので、説明をつけ加えておく。 $\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda^{(m)} \supset \mathcal{R}_\lambda^{(m)}$ の inclusion によって、Variation of Hodge structures における

$F^0 (= H_{\mathbb{C}}) \supset F^n$ の場合と同様に、 $\mathcal{R}_\lambda^{(m)}$ にある種の semi-positivity が定義される。ところが、prop. 3 により、 $\mathcal{R}_\lambda^{(m)} \xrightarrow{h_\lambda^{(m)}} \pi_\lambda^*(p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ なので、 $\pi_\lambda^*(p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ はさらに増加した semi-positivity をもつ。この場合の semi-positivity の増加分は、canonical ring

$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X_S, K_{X_S}^{\otimes m})$ が $s \in S$ が動くにつれて変化していけばいくほど増える（即ち $\text{Ker } h_\lambda^{(m)}$ が $\mathcal{R}_\lambda^{(m)}$ の中で動きまわればまわるほど増える）わけである。ところが $p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})$ が flat であるから、

$\text{Ker } h_\lambda^{(m)}$ (relation) は constant、即ち $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X_S, K_{X_S}^{\otimes m})$ も $s \in S$ が動いても動かないことがわかる。

注意：各 $s \in S^0$ に対し、 X_s が general type であれば、（但し S^0 は S の Zariski open dense subset）、 $p_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})$ の flatness が X_s が birational には動かないことを imply している（birational Torelli）。以上、詳しいことは "Asymptotic Hodge structures" (準備中の論文) を見て下さい。