

D. P. による最適制御

九大理 北川 敏男

(1968年3月28日)

§1. はしがき⁽¹⁾ R. Bellman [1]~[3]⁽²⁾によって創建された動的計画法 dynamic programming で取扱われているものは、配分過程、選択過程、決定過程等⁽³⁾の名称によられる種々の場合があるが、制御過程もまた重要な研究対象である。制御過程に関しては、^{(2)のほかに} R. Bellman [4]~[5] 及び R. Bellman & N. Dreyfus [6] 以後にわたる多数の論著があるが、他の過程の多くとは異なり、古典的な接近と比較して、その優劣、その特性を検討しうる場面が多くなる。⁽⁴⁾ 標題に限定してみるとき、その多くの問題が残されているように思われる。この報告では、そのような残された問題のいくつかのうち、~~その~~3つを特に取りあげて、いままでのような結果がえられているかを報告する。D. P. の建立者にして、この種の問題の所在が当然気にかけていたわけであるが、なほ未解決なことが多い。

§2. 收束問題

§2. 収束問題 $x, y \in C$ は N 次元ベクトル, y は M 次元ベクトルとする. $x = x(t), y = y(t)$ として $t \rightarrow \infty$ とき

$$(1) \quad J(y) = \int_0^T h(x, y) dt$$

を最大の問題をとり扱う $2^{-1}L$ $2^{-1}L$

(2) (a) $\frac{dx}{dt} = G(x, y), \quad x(0) = c \text{ (fff)}$

$$(b) \quad R_i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, K$$

なる関係があるとする。上生の最大を求めるといふ事は
2のような $y \sim |x|$ である。(5)

2.4.1.3 する 接近法 としては 積分(1)を有限に
おきかえる 近似をもとにして

$$(c) \quad J_1(y) = \sum_{k=0}^n h(x(k), y(k)) \Delta$$

230 (2) 近似するの12

(4) (a) $x(k+1) = x(k) + G(x(k), y(k))\Delta, x(0) = c$
 (b) $R_i(x(k), y(k)) \leq 0 \quad (i=1, 3 \rightarrow \mathbb{Z})$

2 1 2

(5) (a) $\Delta = T/n$

$$(b) \quad x(k) \equiv x(kT/n), \quad y(k) \equiv y(kT/n)$$

を用いる。 $\max_{\{y\}} J_1(y)$, (2.12 $\max_{\{y\}} 1 \neq [y(0), y(1), \dots, y(n)]$)
 に $|z| \leq 2$ があるか) を求め、 $n \rightarrow \infty$ を考える。問題は $\bar{R}, G$
 ないし R_i に関する条件を与えられ、

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\{y\}} J_n(y) = J$$

という極限が存在するか: 元々 $n \rightarrow \infty$ は (止むを得ない) 場合においては、
ある特殊の数列列^{12.12} にとりかきよい。これについては、次

の結果が知られている。 $\Delta = T/n$ として固定におき、

$k=0, 1, 2, \dots, n$ に対して $f_k(c)$ を次のように定義する。

$$(7) \quad f_k(c) = \max_{\{y\}} \left[\Delta \cdot \sum_{j=0}^k h(x(j), y(j)) \right]$$

2.12

$$(8) \quad (a) \quad x(j+1) = x(j) + \Delta \cdot g(x(j), y(j)), \quad x(0) = c$$

$$(b) \quad R_i(x(j), y(j)) \leq 0, \quad (i=1, 2, \dots, E)$$

Maximization は $\{y(0), y(1), \dots, y(k)\}$ について行う。

D. P. 的接近として 最適性原理の適用により得られる

漸化関係は次の通りである

$$(9) \quad f_{k+1}(c) = \max_{y(0)} \left[\Delta \cdot h(c, y(0)) + f_k(c + \Delta \cdot g(c, y(0))) \right]$$

2.12

$$(10) \quad f_0(c) = \max_{y(0)} \Delta \cdot h(c, y(0))$$

2.12

$$(11) \quad R_i(c, y(0)) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, E$$

さて, 2小問について次の結果がある.

定理 (R. Bellman [7]) 次の仮定を設ける.

(a) 定数 m_1, m_2 があって $-\infty < m_1 \leq y \leq m_2 < \infty$

(12) (b)⁽⁶⁾ 正の定数 C_1 があって $-C_1 \leq x \leq C_1, m_1 \leq y \leq m_2$ において, 関数 $F(x, y)$ 及び $G(x, y)$ は (x, y) の関数として連続であり, かつ $(2 \pm a^2 + a) > 1$ をみたすある正数 a について, あるいは

$$|F(x_1, y) - F(x_2, y)| \leq k |x_1 - x_2|^a$$

$$|G(x_1, y) - G(x_2, y)| \leq k |x_1 - x_2|^a$$

(c) $|G(x, y)| \leq a_1 |x| + b_1$ が ~~(b)の~~ 領域で

成立つ. 2.12 a_1, b_1 は (x, y) の ~~無条件~~ 定数 (任意)

2の条件のもとで, (9)に定数 $\{f_n(c)\}$ は, $n=2$ として

$k \rightarrow \infty$ のとき, 充分小さな I に対しては, ある C の区間 $[-C, C]$ において, C の値は ~~ある程度~~ 一般に $f(C, I)$ に収束する. 2.13 $0 < C \leq C_1$ であり, C_2 の値は ~~上述の~~ 定数 m_1, k, a, a_1, b_1 一般に依存する.

2の結果は, the best possible かどうかは判らない. しかるに G の連続性, y の一般有界な解は存在しないかも知れないが, 反例はあげられない. 更に ~~上述の~~ $a^2 + a > 1$ の制約が決定的かどうかは判らない. ($a^2 + a = 1$ の正根は $a = (-1 + \sqrt{5})/2 \cong 0.62$. 右の二点だけは注意する値がある).

第1には, 2の種の discrete version のも近似解としての意味を委しく検討する必要がある。

第2には, あら種の問題には, continuous version 自身の意味が必ずしも明確でないことが, 制御過程には, 支配する。このような場面では, 極限操作で収束が保たてられれば, それ自身が, continuous version の 1つとして見做されることとなるかも知れない。2の点を立入って見る必要があること。

第1の点は §3 のように, 第2の点は §4 のように, ^{それ}より詳しく論究する。

§3. 準線形化の方法 (quasilinearization procedure)

これに関しては, R. Bellman & R. Kalaba [8] がある。その概略を次に紹介しよう。

(19) 現代の電子計算機にとっては, 初期値の complete set が指定された常微分方程式の解を数値的に求めよう問題は, 境界値問題にくらべても, 偏微分方程式, 定差方程式 (その) 等にくらべて, 比較的求めやすい。D.P. の接近では, 新しい状態変数を導入し, 時間・空間・構造等のいずれかにおける semi-group の性質を用いて, 問題をこのような常微分方程式の初期値問題へ還元させる方向をとっていることが多い。

(20) 準線形化法の起源は, D.P. があると Bellman 達はいふ。この方法は, いろいろの考え方の関連があるが関数空間における Newton-Raphson-Kantorovich 近似法があるといえる。その目的は, 次の点にあるといふよう。
(とも関連)

(i) 常微分方程式の初期値の境界値問題に対して、解の存在の一意性に対する定理を、一貫した方法で与えようとする。

(ii) 線形方程式の解を用いて、近似解を与えようとする。

(iii) 微分方程式に与える *descriptive problems* と *variational problems* とは同一の方法で与えようとする。

2.4) 3つの目的がどのように達成されるかを次の紹介する。

(30) 第1章 Riccati 方程式

ここでは Newton-Raphson 方法を $f(x)=0$ の根を求める場合について解説する。 $f(x)$ を x の関数として単調減少、純凸(下)とする。根 r において $f(r)=0$, $f'(r)<0$ のとき

$$(1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

で定義する。

$$(a) \text{ monotonicity: } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < r$$

$$(2) \text{ (b) quadratic convergence: } |x_{n+1} - r| \leq K |x_n - r|^2$$

この方法を Riccati equation に適用する。このための準備となるのは、次の諸項である。

(i) maximum operation の導入 $y = x^2$ に対しての上の $(x_1, y_1) = (x_1, x_1^2)$ が切線をつくると、 $y = x^2$ は凸関数である。切線は下にある。 $x^2 \geq 2x_1x - x_1^2$ である。

$$x^2 = \max_{x_1} [2x_1x - x_1^2]$$

(ii) 微分方程式

$$\frac{dw}{dt} - f(t)w = g(t), \quad w(0) = c$$

解

$$W = C \exp \left\{ \int_0^t f(s) ds \right\} + \exp \left\{ \int_0^t f(s) ds \right\} \int_0^t g(s) \exp \left\{ - \int_0^s f(r) dr \right\} ds$$

$$\equiv T(f, g)$$

かつ $t \geq 0$ とし, $g_1(t) \geq g_2(t) \rightarrow T(f, g_1) \geq T(f, g_2)$

(iii) 微分方程式 $v' = g(v, t)$ に対し 近似方式とい
 v_{n+1} に対し 線形方程式

$$v_{n+1}' = g(v_n, t) + (v_{n+1} - v_n) g_v(v_n, t), \quad v_{n+1}(0) = C$$

を用いる。

2の(i)-(iv)をもとにして 次の結果が得られる。

(a) Riccati 方程式の解

$$\left(\begin{array}{l} \text{比較} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} v' = -v^2 - p(t)v - q(t) \quad (\text{Riccati}) \\ = -\max_u [2uv - u^2] - p(t)v - q(t) \quad (\text{max. of}) \\ = \min_u [u^2 - 2uv - p(t)v - q(t)], \quad v(0) = C \\ w' = u^2 - 2uw - p(t)w - q(t), \quad w(0) = C \end{array} \right.$$

2のとき $w \geq v$ となる。

定理. $0 \leq t \leq t_0$ において

$$(3) \quad v(t) = \min_u T(-2u - p(t), u^2 - q(t))$$

2、 $u(t_0)$ は $v(t)$ の存在区域。

(b) 逐次近似法と準線形化法 $u \geq 0$ に対し

$$(4) \quad v_{n+1}' = v_n^2 - 2v_n v_{n+1} - p(t)v_{n+1} - q(t), \quad v_{n+1}(0) = C$$

2これは Riccati 方程式に対し Newton-Raphson-Kantorovich 近似方式を適用して与えられる。

monotonicity に $|z| \leq 1$ は次のことが見られる。

$$(5) \quad v_{n+1}' \geq v_{n+1}^2 - 2v_{n+1}v_{n+1} - \beta(t)v_{n+1} - g(t)$$

$$(6) \quad v_{n+2}' = v_{n+1}^2 - 2v_{n+2}v_{n+1} - \beta(t)v_{n+2} - g(t), \quad v_{n+2}(0) = C$$

$$(7) \quad v_{n+1} \geq v_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$(8) \quad v_n(t) \geq v(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(40) 第2章 二点境界値問題 z, z' は

$$(9) \quad u'' = g(u, u', t), \quad h_1(u'(0), u(0)) = 0, \quad h_2(u'(1), u(1)) = 0$$

において, quasilinearization の方法の適用による quadratic convergence が論定されている。

(50) 第3章 単調行動と微分不等式 (7) 近似解の単調収束を保証する条件の検討のため 微分不等式

$$(10) \quad u'' + \beta(t)u' + g(t)u \geq 0$$

の検討をする。

(60) 第4章 連立微分方程式系, 情報の蓄積, 微分近似
高階微分方程式及び解開連立方程式系への拡張について
する。階数が高次、連立方程式の本数が増加するにつれて、
数値計算のすめり、ヒューリスティックな蓄積データの検索
しなければならないのではないかという問題がある。

例. 1.
$$\begin{aligned} u'(t) &= g(u(t), u(t-1)) & t \geq 1 \\ u(t) &= u_0(t) & 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

長さ 1 の区間における数列値の蓄積。

$$u_n(t) = u(t+n), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$u_1'(t) = g(u_1(t), u_0(t)), \quad u_1(0) = u_0(1)$$

$$u_2'(t) = g(u_2(t), u_1(t)), \quad u_2(0) = u_1(1)$$

& so on.

$$u_i'(t) = g(u_i(t), u_{i-1}(t)), \quad u_i(0) = u_{i-1}(1)$$

微分近似 (differential approximation)

ある所与の関数 $u(t)$ を, 常微分係数の線形微分方程式

$$(11) \quad v^{(N)} + a_1 v^{(N-1)} + \dots + a_N v = 0, \quad v^{(i)}(0) = c_i \quad (i=0, \dots, N)$$

により近似する方法がある。ただし

$$(12) \quad \int_0^T (v - u)^2 dt$$

を最小にするような $\{a_i\}, \{c_i\}$ を求めるのである。

(70) 第5章 偏微分方程式 非線形方程式

$$(13) \quad u_{xx} + u_{yy} = e^u$$

$$(14) \quad u_t = u_{xx} + f(u)$$

への quasilinearization technique の応用が示されている。

(80) 第6章 物理学, エネルギー生物学への応用

すなわち quasilinearization の方法の応用が示されている。

例. 2. 最適制御 or 最適設計

$$(15) \quad (a) \quad J(y) = \int_0^T g(x, y) dt \text{ の最小値を求めよ。}$$

(b) $\frac{dx}{dt} = h(x, y), \quad x(0) = c$ という制約が与えられているとする。 x : M -dimensional, y : N -dimensional vector. h は y の決定がある。すなわち h は x と y の関数である。

$$(16) \quad (a) \quad J(y, a) = \int_0^T g(x, y, a) dt + \phi(a)$$

$$(b) \quad \frac{dx}{dt} = h(x, y, a), \quad x(0) = c$$

y or K 次元ベクトル a の決定。

quasilinearization の方法とい次のものがある。
初期近似 y_0, a_0 をとり

$$(17) \quad \frac{dx_0}{dt} = h(x_0, y_0, a_0), \quad x_0(0) = c$$

により x_0 を求める。次に x_1, y_1, a_1 を求めるために

$$(18) \quad \frac{dx_1}{dt} = h_1(x_1, y_1, a_1; x_0, y_0, a_0), \quad x_1(0) = c$$

を求め、ここで h_1 は $h(x, y, a)$ を (x_0, y_0, a_0) のまわりへ展開して、一次項までとり、以上を切りすえるもの。さてさて

$$(19) \quad \int_0^T g_2(x_1, y_1, a_1; x_0, y_0, a_0) dt$$

を最小にするよう、 (y_1, a_1) を選ぶことという問題も考える。ここで g_2 は $g(x, y, a)$ を (x_0, y_0, a_0) のまわりへ展開し、二次項までとり、以上を切りすえるもの。以下この方法をくりかえす。

(90) 第7章 動的計画法と準線形化法

以上の記述では、準線形化法と動的計画法との結びつきが特に顕著という感じはしないかも知れないが、後者が実は準線形化法の起原となるといふことは、Bellman の場合は事実であった。動的計画法の接近が、政策決定を目標とする、政策への近似こそ準線形化法の起原となつてゐる。この点、次の例をみて説明しよう。

$$\text{例 3. (20) } f(p) = \max [g(p, q) + f(T(p, q))]$$

いま初期の政策として、 $q_0(p)$ を想定し、これを次のように改良してゆく。まず $f_0(p)$ を次のように定める。

$$(21) \quad f_0(p) = g(p, q_0) + f_0(T(p, q_0))$$

$g_0(p)$ の改良とし, $g(p, g) + f_0(T(p, g))$ を最大にする $g_1(p)$ を求める. そし, $f_1(p)$ を次の差分方程式の解として定める.

$$(22) \quad f_1(p) = g(p, g_1) + f_1(T(p, g_1)), \quad (g_1 = g_1(p))$$

以下同様にして, $f_n(p)$ を求めるべく.

例 4. $u(a) = c$ の条件のもとに

$$(23) \quad J(u) = \int_0^T g(u, u, t) dt$$

の最小を求める問題に対し, 動的計画法の常套手段は

$$(24) \quad \min_u J(u) = f(a, c)$$

に対し, 非線形偏微分方程式を導く.

$$(25) \quad -\frac{\partial f}{\partial a} = \min_v \left[g(v, c, a) + v \frac{\partial f}{\partial c} \right]$$

を初期条件 $f(T, c) = 0$ のもとで解が研求される.

これについて, Bellman は, local quasi-linearization と global dynamic programming との結合を提唱している.

例 5. D. P. の接近により二点境界値問題が回避される例

$$(26) \quad J(u) = \int_0^T [u'^2 + b(t)u^2] dt, \quad u(a) = c$$

の最小値を求める.

Euler 方程式 $u'' - b(t)u = 0, \quad u(a) = c, \quad u'(T) = 0$
 他方 $\min_u J(u) = f(a, c)$ とする

$$-\frac{\partial f}{\partial a} = \min_v [v^2 + b(a)c^2 + v \frac{\partial f}{\partial c}]$$

($f(T, c) = 0$) はこの場合

$$-\frac{\partial f}{\partial a} = b(a)c^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial c} \right)^2$$

u は c に一次的に依存するから、 $f(a, c) = r(a)c^2$ ということがわかる。従って Riccati 方程式 $-r'(a) = b(a) - r(a)$ であり、 $r(T) = 0$, u 帰着する。

(100) 以上を要約すると、D.P. 的接近は最適政策への近似を求めるときと互換とされている。すなわち maximum operation の導入がなければ、多くの重要な場合において、最適政策への単調収束が成立つ。この事実に着目し、線形方程式に maximum operation を導入して非線形方程式の解法をもとめよう、quasi-linearization の根本的な考へ方がある。すなわち monotonicity of convergence をいいうるためには、微分不等式をもつて広義の convexity の概念が必要になった。以上の思想は、常微分方程式の初期値問題において有効であるので、多くの他の型の近似問題を、 u の近似値のありかという方向をとる。このために differential approximation の方法が導入された。

以上の結果は、大綱を示しただけである。しかし D.P. 的接近が具体的な問題の解決に利用されるためには必要な道具が用意されなければならないという意味で注目すべきであろう。R. Bellman [9] は、Chapter 8 において、

$$(29) \quad \begin{cases} J(x, y) = \int_0^T [x, Ax) + (y, y)] dt \text{ の最小化} \\ x' = Bx + y, \quad x(0) = c \quad (\text{121 型方程式}) \\ \int_0^T (x, f_i(t)) dt = a_i \quad (i=1, 2, \dots, K) \text{ (制約)} \end{cases}$$

を論じている。2.12 Riccati 方程式があるから、monotonic convergence in policy space が論じられている。

§4 制御過程への D.P. 的接近と情報問題

制御過程への D.P. 的接近は、古典的接近に伴ういくつかの困難を克服した。変分法的な接近は (1) 数値解法としては、二点境界値問題の微分方程式を解くことになり、困難が多い。(Queenberry rules!) (2) 制約条件が現実的なものになると困難が大きくなる。(3) 確定系でなく、確率変動の加わった系になると、古典的方法の適用は一般に困難を加える。以上 (1) (2) (3) に、D.P. 的接近がより有利であると Bellman は絶えず主張し力説している。

制御過程論の展開には、情報科学的な観念が大切である。制御と情報との関連をあきらかにすることなしに、制御過程論の全体は描き出されない。D.P. については次の特徴に注意する必要がある。

(10) D.P. の方式は、time-oriented でなく、event-oriented である。

(20) D.P. の方式は、システムの常観測手段をもつとき、それによって得られる情報を用いながら制御を行うのに適している。

(30) D.P. の方式は、stochastic formulation の場合にも適用できる。

(40) D.P. の方式は、(a) 制御手段として行が可能なとき、(b) 情報獲得の方法として行が与えられているか、(c) 制約条件として行が課せられているか等々を明確に上記での formulation になっている。

例. 6. $J(u) = \int_0^T g(u, u') dt$ のとき $\min_{u \in U} J(u)$ を求める D.P. 的解法 $u(0) = c$ とする。

$\min_{u \in U} J(u) = f(c, T)$ とおく。policy function

を $v = v(c, T)$ とおく。 $c \rightarrow c + v\Delta$, $T \rightarrow T - \Delta$ の変換を考える。

$$J(u) = \int_c^{c+\Delta} + \int_{T-\Delta}^T$$

から

$$f(c, T) = \min_v [g(c, v)\Delta + f(c+v\Delta, T-\Delta) + O(\Delta^2)]$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(c, T)}{\partial T} = \min_v [g(c, v) + v \frac{\partial f(c, T)}{\partial c}] \\ f(c, 0) = 0 \end{array} \right.$$

この解法は c を知り、 T を与えて policy function $v(c, T)$ を求めることである。(1°), (2°), (7°)

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial f(c, T)}{\partial T} = \min_v \left[g(c, v) + v \frac{\partial f(c, T)}{\partial c} \right] \\ f(c, 0) = 0 \end{cases}$$

$$f(c, 0) = 0$$

その解法は C を知り、 T を与えて $\text{policy function } v(C, T)$ を求めることである。($(10), (20), (70)$)

例 7. Stochastic control process 上巻 (30) に引いて Bellman の定理にいうことは, deterministic control process の場合とアナロジーにおいて, 漸化式 (1) の利用で述べられているようにある。

第 n 時刻における状態を x_n ; y_n を決定変数; r_n を
確率変数とし

$$(29) \quad x_{n+1} = g(x_n, y_n, r_n), \quad x_0 = c.$$

目標回数として

$$(50) \quad H_1 = h(x_1, y_1, v_1) + h(x_2, y_2, v_2) + \dots + h(x_n, y_n, v_n)$$

の期待値をとり、これを最小にする θ を考える。

$$(31) \quad f_N(c) = \min_{\{y_c\}} [\exp H_1]_{\{r_c\}}$$

これについて、次のように漸化式が成立つ

$$(32) \quad (a) \quad f_1(c) = \min_{y_1} [Exp \, h(c, y_1, r)] \\ = \min_{y_1} \left[\int h(c, y_1, r) dG(r) \right]$$

(b) $N \geq 2$ and 12

$$f_N(c) = \min_{y_1} [\text{Exp} [h(x_1, y_1, r_1) + f_{N-1}(g(c, y_1, r_1))]]$$

$$= \min_{y_1} [\int \{ h(x_1, y_1, r_1) + f_{N-1}(g(c, y_1, r_1)) \} dQ_1$$

例 8. 微分と制御の適用との間の時間のおくれ 24 を考慮すると differential-difference equations の方が、現実性を帯びる。

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t-\tau)), \quad x(0) = c$$

$$\tau = \tau(x, y)$$

とわてシステムのモデル化もある。N. N. Oguztoreli [10] に一般論がある。

すいし、これは必ず D.P. 的接近は述べられていない。

例 9. - Large system における control 問題において、次の選択問題に直面する。(例へば "生体モデル等")

- (i) 僅かのデータをもとにして、速かな決定をくだす
- (ii) 充分の観測を行い豊富なデータをもとにして、決定をくだす。このために決定はおくれる。

この種の問題は、A. A. Fel'dbaum [11] において取りあげられている。しかし D.P. 的接近とはかけ離れている。

M. Aoki [12] においては、stochastic system をまともにとりあげられているが、D.P. 的接近からはこれと離れている。

標記の問題に立入るためには、制御の利用される場面を広く見渡し、種々の方法のリストをつくり、いままでいろいろな方面で発展した諸方法を比較し、それらの適用範囲をあきらかにして、そのうえで統合をほかり、新方法を開発することが必要である。これに因して筆者は拙論 [1] において、次の諸項においてこれを論じてきたことがある。

- I. 混沌と設計
- II. 情報と制御
- III. 忘却と進化
- IV. 未解決の諸問題

§5. 結び 2の報告において、次の諸点を論じた。

[1] D.P.的接近には、その数值的な基礎事項の再検討を必要とする2が多い。§2において、一つの積極的な解答を紹介した。このような方法を一般化することが desirable である。と同時に 真の D.P.的接近が必要とする formulation は何かという問題がまだ明らかでないように思われる。

[2] D.P.的接近が実際上有効であるためには、具体的な解へ導く技法が必要である。準線形性はその一つである。これを §3 において紹介した。

[3] 制御と情報との関連について、基本的な検討が必要がある。D.P.的接近の意義もこの点からみなくてはならない。この点からみれば、D.P.への評価は、まだ決定的でないように思われる。たゞいえることは、古典的接近よりは、情報のとり入れが明かである。しかし、この問題については、いままでの D.P.的接近は不満足な方法が導入される必要があるように思われるのである。最適性原理の適用には代数方程式の接近だけが有効になるとは思われない。

引用文献

- [1] R. Bellman: An introduction to the theory of dynamic programming, R-245, Rand Corp. (1953).
- [2] R. Bellman: Dynamic programming of continuous processes, R-271, Rand Corp. (1954)
- [3] R. Bellman: Dynamic programming, Princeton Univ. Press (1957)
- [4] R. Bellman; I. Glicksberg & O. A. Gross: Some aspects of the mathematical theory of control processes, R-313, Rand Corp. (1958)
- [5] R. Bellman: Adaptive control processes: a guided tour, Princeton Univ. Press (1961)
- [6] R. Bellman & S. E. Dreyfus: Applied dynamic programming, Princeton Univ. Press (1962)
- [7] R. Bellman: Functional equations in the theory of dynamic programming - VI, direct convergence proof. Annals of Math. 65 (1957), 215—223.
- [8] R. Bellman and R. Kalaba: Quasilinearization and nonlinear boundary value problems, Amer. Elsevier Publ. Co. (1965)
- [9] R. Bellman: Introduction to the mathematical theory of control processes, I. linear equations and quadratic criteria, Academic Press Inc. (1968)
- [10] N. N. Oguztoreli: Time-lag control systems. Academic Press (1965)

[11] A. A. Fel'dbaum: Optimal control systems, Academic Press (1965)

[12] N. Namik Oğuztöreli: Time-lag control systems, Academic Press (1966)

[13] 北川敏男: 制御理論への情報科学的接近, 計測自動制御学会特別講演 (1967年7月28日)

補註 (1968年3月28日講演日)

(1) 5/から 5/5 まで引用文献は, 1968年3月28日の講演

予稿として用意されたものである。これに対し, 講演において

行った訂正の補遺は, すべて以下の補註にあるのである。

2の報告の追記には, 補註を必ず参照されたい。

(2) 時期は 1953 ~ 1957年

(3) これは, 新しい分野の開拓であり, 比較しようも他の方法はない。

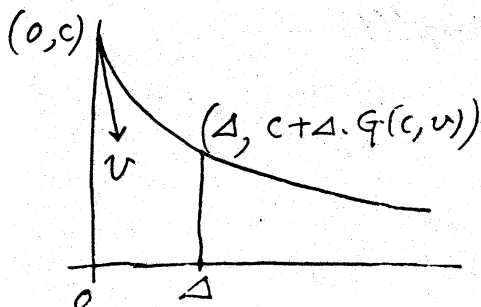
(4) 特に変分法とか *descriptive theory* (*control theory*) に対していう) とかが比較すべき対象になる。

(5) 通常 D.P. 的接近は, 周知のよりに次の推論を述べる:

$$J(y) = \int_0^T h(x, y) dt$$

$$\min_{y \in D} J(y) = f(c, T) \text{ とおく}$$

$$\text{すなわち} \quad \int_0^T h(x, y) dt = \int_0^\Delta + \int_\Delta^T$$



$$f(c, T) = \int_0^\Delta h(x, y) dt$$

$$+ f(c + \Delta G(c, v), T - \Delta) \\ + O(\Delta^2)$$

$$= h(c, v) \Delta + f(c + \Delta G(c, v), T - \Delta) \\ + O(\Delta^2)$$

$$f(c, T) = \max [h(c, v) \Delta + f(c + \Delta G(c, v), T - \Delta)] + O(\Delta^2)$$

$$f(c + \Delta G(c, v), T - \Delta) \\ = f(c, T) + \frac{\partial f}{\partial c} \Delta \cdot G(c, v) - \frac{\partial f}{\partial T} \Delta + O(\Delta^2)$$

2403

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \max_v \left[h(c, v) + \frac{\partial h(c, T)}{\partial c} G(c, v) \right]$$

を導く。2つのような等式法が、成書によらずに用いられるけれども、極め多くの仮定が入り込んでいることは一見してあることがわかる。

(6) 筆者の考えは

$$|G(x_1, y) - G(x_2, y)| \leq k_2 \min(|x_1 - x_2|^q, |x_1 - x_2|)$$

(7) W. Heller: On second order differential operators, Ann. Math. 61 (1955), 90-105.

筆者は、1957年12月~1958年4月 Princeton大学で Heller 教授の講義を受けたが、2つ方向の仕事に密接な関係がある。しかしまたまとめることがない。

(8) G. Polya: Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1922) 原文はいま手許にないが、次のような結果が知られている。

$$\Delta(u) \equiv u^{(N)} + p_1(t) u^{(N-1)} + \dots + p_N(t) u$$

$$W_n(t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv \begin{vmatrix} f_1(t) & f_1'(t) & \dots & f_1^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(t) & f_n'(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(u) = \frac{W_N}{W_{N-1}} \frac{d}{dt} \left(\frac{W_{N-1}^2}{W_{N-2} W_N} \frac{d}{dt} \left(\dots \frac{d}{dt} \left(\frac{W_2^2}{W_1 W_3} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{W_1^2}{W_0 W_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{W_1} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

という表現が同じである。