

対称群のスピンの表現に対する Kerov 多項式

鹿児島大学大学院理工学研究科 松本 詔*¹

Sho Matsumoto

Graduate School of Science and Engineering,
Kagoshima University

RIMS 共同研究 (公開型) 「組合せ論的表現論の諸相」平成 30 年 10 月 9 日 ～ 10 月 12 日

1 Introduction

Biane [1] は, 対称群の漸近的表現論において, Young 図形の自由キュムラントと呼ばれる量 $\{R_j(\lambda)\}_{j=2,3,\dots}$ が重要であることを指摘した. その後 Kerov は, 対称群の既約指標を正規化して定まる関数 Ch_k ($k = 1, 2, \dots$) が, 自由キュムラントを変数とする多項式として表されることを見抜いた (Biane の論文 [2] で初めて出版された). それは現在 **Kerov 多項式**と呼ばれており, 例 1.1 のようになる. その係数は非負整数となり, 組合せ解釈をもつことが知られている ([3], 後述の §4.2 も参照).

例 1.1 (Kerov 多項式 [2]).

$$\text{Ch}_1 = R_2,$$

$$\text{Ch}_2 = R_3,$$

$$\text{Ch}_3 = R_4 + R_2,$$

$$\text{Ch}_4 = R_5 + 5R_3,$$

$$\text{Ch}_5 = R_6 + 15R_4 + 5R_2^2 + 8R_2,$$

$$\text{Ch}_6 = R_7 + 35R_5 + 35R_3R_2 + 84R_3,$$

$$\text{Ch}_7 = R_8 + 70R_6 + 84R_4R_2 + 56R_3^2 + 14R_2^3 + 469R_4 + 224R_2^2 + 180R_2,$$

$$\text{Ch}_8 = (\text{省略}),$$

$$\begin{aligned} \text{Ch}_9 = & R_{10} + 210R_8 + 300R_6R_2 + 480R_5R_3 + 270R_4^2 + 360R_3^2R_2 + 270R_4R_2^2 + 30R_2^4 \\ & + 5985R_6 + 10548R_4R_2 + 6714R_3^2 + 2400R_2^3 + 26060R_4 + 14580R_2^2 \\ & + 8064R_2. \end{aligned}$$

本稿の目的は Kerov 多項式の「スピン版」を導入することである. 対称群のスピンの既約指標から定まる関数 $\text{Ch}_k^{\text{spin}}$ ($k = 1, 3, 5, \dots$) が, $\{R_j\}$ を変形した量 $\{\mathfrak{R}_j\}_{j=2,4,\dots}$ を用い

*¹ shom@sci.kagoshima-u.ac.jp 本研究は基盤研究 (C) No.17K05281 の助成を受けたものです.

て多項式で表せることを示す. この多項式を**スピン Kerov 多項式**と名付ける.

例 1.2 (スピン Kerov 多項式).

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Ch}_1^{\operatorname{spin}} &= \mathfrak{R}_2, \\
 2 \operatorname{Ch}_3^{\operatorname{spin}} &= \mathfrak{R}_4 + \mathfrak{R}_2, \\
 2 \operatorname{Ch}_5^{\operatorname{spin}} &= \mathfrak{R}_6 + 15\mathfrak{R}_4 + 5\mathfrak{R}_2^2 + 8\mathfrak{R}_2, \\
 2 \operatorname{Ch}_7^{\operatorname{spin}} &= \mathfrak{R}_8 + 70\mathfrak{R}_6 + 84\mathfrak{R}_4\mathfrak{R}_2 + 14\mathfrak{R}_2^3 + 469\mathfrak{R}_4 + 280\mathfrak{R}_2^2 + 180\mathfrak{R}_2, \\
 2 \operatorname{Ch}_9^{\operatorname{spin}} &= \mathfrak{R}_{10} + 210\mathfrak{R}_8 + 300\mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_2 + 270\mathfrak{R}_4^2 + 270\mathfrak{R}_4\mathfrak{R}_2^2 + 30\mathfrak{R}_2^4 \\
 &\quad + 5985\mathfrak{R}_6 + 11508\mathfrak{R}_4\mathfrak{R}_2 + 2280\mathfrak{R}_2^3 + 26060\mathfrak{R}_4 + 20814\mathfrak{R}_2^2 + 8064\mathfrak{R}_2.
 \end{aligned}$$

これらの具体例から, Kerov 多項式とスピン Kerov 多項式はとても似た形であることが観察できる. 実際いくつかの係数も一致している.

本稿の内容は以下のようなものである. 第 2 章で Ch_k と自由キュムラント R_j の定義を述べ, Kerov 多項式の復習をする. 第 3 章で $\operatorname{Ch}_{2k-1}^{\operatorname{spin}}$ と自由キュムラント $\mathfrak{R}_{2j}$ の定義を述べ, スピン Kerov 多項式を定める. 最後に, 第 4 章で関連する研究について補足をする.

注意 1.3. 本稿は [11] の解説であるが, 記号を一部変更した. [11] で $\mathfrak{p}_\nu$ と書いたものは, スピン既約指標であることを強調するために本稿では $\operatorname{Ch}_\nu^{\operatorname{spin}}$ と表した. また [11] と本稿では記号 $\mathfrak{R}_{2k}$ の定義が少し異なり, [11] のものは本稿のものの $\frac{1}{2}$ 倍である (この修正は P. Śniady からの指摘 (2018 年 5 月) を反映させた). この影響で, スピン Kerov 多項式の定義および例 1.2 の式が [11] と若干異なっている.

2 Kerov 多項式

この章では Kerov 多項式について解説する. 洞による著書 [13] がより詳しい.

2.1 対称群の既約指標

非負整数 n の整数分割全体を $\mathcal{P}_n$ で表し, $\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ とおく. よく知られているように, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現は $\mathcal{P}_n$ でパラメトライズされる. 分割 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約指標を χ^λ で表す. また $\mathfrak{S}_n$ の共役類も $\mathcal{P}_n$ でパラメトライズされる. 既約指標 χ^λ の, $\nu \in \mathcal{P}_n$ に対応する共役類での値を χ_ν^λ で表す. このようにしていわゆる指標表 $[\chi_\nu^\lambda]_{\nu \in \mathcal{P}_n}^{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ が定まる.

指標表は対称関数を用いて抽出することもできる. べき和対称関数 p_ν を Schur 関数 s_λ で展開したときの係数として現れる ([10, Chapter I, (7.8)]) :

$$(2.1) \quad p_\nu = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \chi_\nu^\lambda s_\lambda \quad (\nu \in \mathcal{P}_n).$$

定義 2.1. k を非負整数とし, $\nu \in \mathcal{P}_k$ とする. 次で定まる関数 $\text{Ch}_\nu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ を**正規化された指標**という :

- $n \geq k$ で $\lambda \in \mathcal{P}_n$ のとき,

$$\text{Ch}_\nu(\lambda) = n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{\chi_{\nu \cup (1^{n-k})}^\lambda}{\chi_{(1^n)}^\lambda}$$

とおく. ここで $\nu \cup (1^{n-k})$ は, 分割 ν に成分 1 を $n-k$ 個付け加えてできる n の分割である.

- $n < k$ で $\lambda \in \mathcal{P}_n$ のとき, $\text{Ch}_\nu(\lambda) = 0$ とおく.

ν が一行分割 $\nu = (k)$ のとき, $\text{Ch}_k := \text{Ch}_{(k)}$ と書く.

注意 2.2. 通常の対称群の表現論では, 指標は χ_ν^λ は表現 λ を固定して共役類 ν を変数として扱う. 一方, $\text{Ch}_\nu(\lambda)$ は共役類 ν を固定して表現 λ を変数と見るので, いわば逆の見方 (dual approach) をしている. このような考え方は漸近的表現論において基本かつ重要で, λ のサイズが大きいとき (つまり $|\lambda| \rightarrow \infty$ とする) 際に有用なのである.

2.2 Kerov 推移測度

分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対して, Kerov 推移測度と呼ばれる $\mathbb{R}$ 上の確率測度 $\mathbf{m}_\lambda$ が定まる. これを構成しよう.

まず λ の Young 図形を図 1 のようにロシア式で描く. このとき Young 図形の境界は折れ線グラフになるが, この境界の定める関数 $Y = \omega_\lambda(X)$ が極小, 極大をとる点を, 図のように x_i, y_j で表す. Young 図形の箱の一辺を長さ $\sqrt{2}$ にすることで, x_i, y_j は整数値をとる. このようにして定まる列

$$(2.2) \quad x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r$$

を, **Kerov's interlacing coordinates** という. 図 1 の例では, $\lambda = (8, 7, 6, 6, 4, 2, 1)$ に

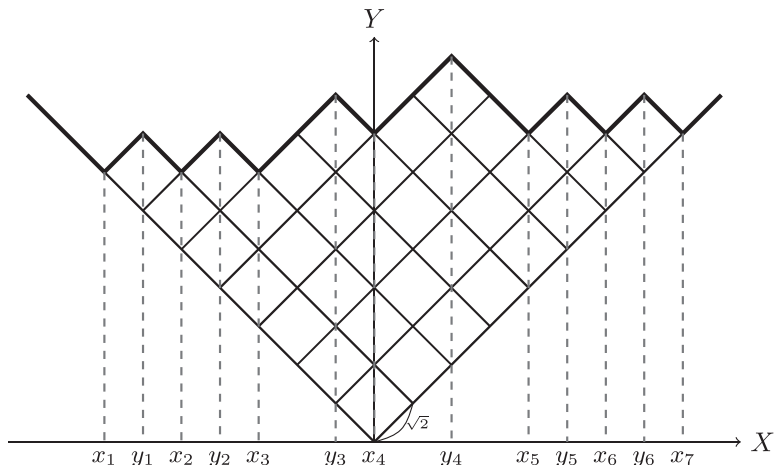


図 1 分割 $\lambda = (8, 7, 6, 6, 4, 2, 1)$ の Young 図形 (ロシア式) と Kerov's interlacing coordinates.

対し,

$$\begin{aligned} x_1 = -7, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 4, \quad x_6 = 6, \quad x_7 = 8, \\ y_1 = -6, \quad y_2 = -4, \quad y_3 = -1, \quad y_4 = 2, \quad y_5 = 5, \quad y_6 = 7, \end{aligned}$$

となる.

定義 2.3. $\lambda \in \mathcal{P}$ の Kerov's interlacing coordinates が (2.2) で与えられているとする. このとき,

$$(2.3) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} m_{\lambda}(dx) = \frac{\prod_{j=1}^{r-1} (z-y_j)}{\prod_{i=1}^r (z-x_i)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

で特徴付けられる $\mathbb{R}$ 上の確率測度 m_{λ} を **Kerov 推移測度** という. (一般に (2.3) の左辺の積分を, 確率測度 m_{λ} の Cauchy 変換という.)

注意 2.4. Kerov 推移測度 m_{λ} は次のような形をしている:

$$m_{\lambda} = \sum_{i=1}^r \mu_i \delta_{x_i}, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = 1.$$

ここで δ_{x_i} は点 x_i に mass をもつ Dirac 測度である. ランダム Young 図形 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ が対称群の Plancherel 測度にしたがって与えられたとき, Young 図形に箱 $\square$ を 1 個増やす操作

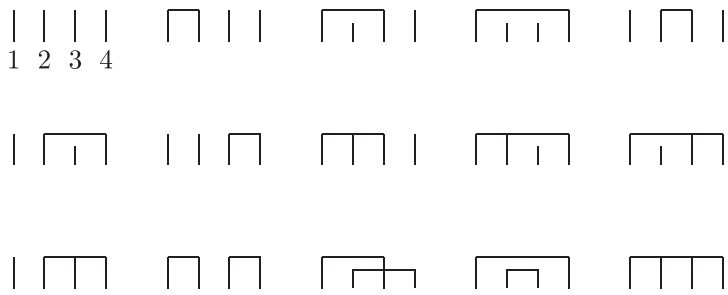


図 2 $P(4)$ は 15 個の元からなる. 最上段左の図は $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ を表し, その横の図は $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ である.

は, x_i の位置に $\square$ を置くことを意味する. x_i の位置に箱が増える確率が μ_i である. [13, 注意 6.17]

2.3 自由キウムラントの組合せ的定義

例 1.1 に登場する R_j は $\mathcal{P}$ 上の関数であり, $R_j(\lambda)$ ($\lambda \in \mathcal{P}$) は「Kerov 推移測度 $\mathbf{m}_\lambda$ の j 番目の自由キウムラント $R_j[\mathbf{m}_\lambda]$ 」として定まる. まずは一般の $\mathbb{R}$ 上の確率測度 $\mathbf{m}$ の自由キウムラントを復習する. 自由キウムラントというのは自由確率論の用語である.

$P(n)$ で, $\{1, 2, \dots, n\}$ の集合分割全体とする. すなわち,

$$\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_r\}, \quad \pi_i \neq \emptyset, \quad \pi_1 \sqcup \pi_2 \sqcup \dots \sqcup \pi_r = \{1, 2, \dots, n\}$$

となるような π たちである. 例えば $P(4)$ は図 2 のように与えられる.

集合分割 $\pi \in P(n)$ の二つのブロック π_i, π_j は, π_i に属する元 a, b と π_j に属する元 c, d で $a < c < b < d$ を満たすものが存在するとき, 交差するという. 集合分割 $\pi \in P(n)$ が**非交差** (non-crossing) であるとは, π のどの異なる二つのブロックも交差しないときをいう. これは図 2 のような図を考えると, 線が交わらない (ように描ける) ことを意味する. $P(n)$ の中の非交差分割全体を $\text{NC}(n)$ で表す. 例えば $P(4)$ においては, $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ (図 2 下段, 右から 3 番目) を除く全てが非交差であり, $|\text{NC}(4)| = 14$ となる. 一般に $|\text{NC}(n)|$ は Catalan 数 $\text{Cat}(n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ に等しいことがよく知られている.

さて, $\mathbf{m}$ をコンパクトな台をもつ $\mathbb{R}$ 上の確率測度とする. 確率測度 $\mathbf{m}$ のモーメントは

$$M_k[\mathbf{m}] = \int_{\mathbb{R}} x^k \mathbf{m}(dx), \quad k = 1, 2, \dots$$

で定まる. このとき, $\mathbf{m}$ の自由キウムラント $R_k[\mathbf{m}]$ ($k = 1, 2, \dots$) は, 以下の**自由キウム**

ラント・モーメント公式によって帰納的に定義される.

$$(2.4) \quad M_n = \sum_{\pi=\{\pi_1, \dots, \pi_r\} \in \text{NC}(n)} R_{|\pi_1|} R_{|\pi_2|} \cdots R_{|\pi_r|}.$$

ここで, $|\pi_i|$ は各ブロック π_i の元の個数を表す. 例えば,

$$\begin{aligned} M_1 &= R_1, \\ M_2 &= R_2 + R_1^2, \\ M_3 &= R_3 + 3R_2R_1 + R_1^3, \\ M_4 &= R_4 + 4R_3R_1 + 2R_2^2 + 6R_2R_1^2 + R_1^4 \end{aligned}$$

となる. M_4 の式は図 2 を参照せよ (ただし $\{\{1, 3\}\{2, 4\}\}$ は除く). これを逆に解くと,

$$\begin{aligned} R_1 &= M_1, \\ R_2 &= M_2 - M_1^2, \\ R_3 &= M_3 - 3M_2M_1 + 2M_1^3 \end{aligned}$$

となる. 特に R_2 は分散に他ならない. さらに簡単のために $R_1 = 0$ とすると, R_4 は

$$R_4 = M_4 - 2M_2^2$$

と与えられる.

一般に自由キュムラントは, (2.4) の双対な式

$$R_n = \sum_{\pi=\{\pi_1, \dots, \pi_r\} \in \text{NC}(n)} \text{Moeb}_{\text{NC}(n)}(\pi) M_{|\pi_1|} M_{|\pi_2|} \cdots M_{|\pi_r|}.$$

で表される. ここで $\text{Moeb}_{\text{NC}(n)}$ はポセツト $\text{NC}(n)$ の Möbius 関数と呼ばれるものである.

注意 2.5. 自由キュムラントは次のように定義することもできる:

$$R_k[\mathbf{m}] = -\frac{1}{k-1} [z^{-1}] \frac{1}{G_{\mathbf{m}}(z)^{k-1}}.$$

ここで, $G_{\mathbf{m}}(z)$ は $\mathbf{m}$ の Cauchy 変換 $G_{\mathbf{m}}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} \mathbf{m}(dx)$ であり, $[z^{-1}]L(z)$ は Laurent 級数 $L(z)$ の $z=0$ における留数を表す.

2.4 Kerov 多項式の定義

定義 2.6. $k = 1, 2, \dots$ とする. 関数 $R_k : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ を

$$R_k(\lambda) = R_k[\mathbf{m}_\lambda]$$

で定義する. (同じ記号 R_k を用いる.) すなわち $R_k(\lambda)$ は Kerov 推移測度 $\mathbf{m}_\lambda$ の k 番目の自由キュムラントである.

$R_1(\lambda) = M_1[\mathbf{m}_\lambda] = 0$ であることは容易に分かる. Kerov は次のことを示した.

定理 2.7 (Kerov). $\nu \in \mathcal{P}$ とする. このとき Ch_ν は $R_2, R_3, \dots, R_{|\nu|+1}$ の整数係数多項式として一意的に表すことができる.

特に $\nu = (k)$ のときに注目する.

定義 2.8. Ch_k を $R_2, R_3, \dots, R_{k+1}$ の多項式で表す:

$$\text{Ch}_k = K_k(R_2, R_3, \dots, R_{k+1}).$$

この k 変数多項式 K_k を **Kerov 多項式** という.

具体的な形は既に例 1.1 で見た. Kerov は, Kerov 多項式の係数がすべて非負であることを予想した (Kerov's positivity conjecture). この予想は Féray によって肯定的に解決された.

定理 2.9 (Féray [5]). Kerov 多項式の係数はすべて非負整数である.

注意 2.10. 一般の分割 ν に対し, Ch_ν は $R_2, \dots, R_{|\nu|+1}$ の整数多項式として表されるが, 係数は負の値を取りうる. 例えば

$$\text{Ch}_{(2,2)} = R_3^2 - 4R_4 - 2R_2^2 - 2R_2$$

となる. しかし, Ch_ν たちを用い, ある決まった規則で定まる関数 Ch'_ρ は, やはり非負整数係数の多項式となることが知られている [5].

Kerov 多項式は対称群の漸近的表現論で重要な役割を果たす. 大雑把に言うと, $\text{Ch}_k(\lambda)$ の $|\lambda| \rightarrow \infty$ での挙動は,

$$\text{Ch}_k(\lambda) \approx R_{k+1}(\lambda)$$

となるのである．これにより指標 Ch_k の漸近挙動を調べることは，自由キュムラント R_{k+1} を調べることに繋がり，（自由）確率論の様々な手法が適用できる．詳しくは [13, 第 7 章] などを参照されたい．

3 スピン Kerov 多項式

この章では本稿のメインを展開する．Kerov 多項式のスピン版を定義する．

3.1 対称群のスピン既約指標

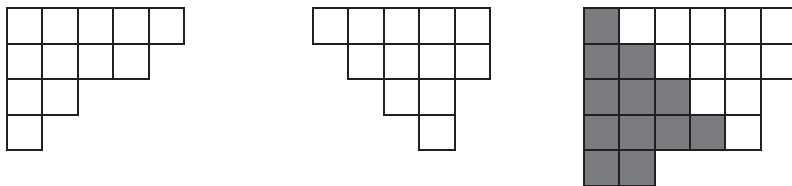
まずは既約指標 χ_ν^λ のスピン版を考える．

整数分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ は通常，正の整数の有限減少列として表す：

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0.$$

この列が狭義減少であるとき，すなわち $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l$ であるとき，分割 λ は**ストリクト** (strict) であるという． $\mathcal{P}_n$ 内のストリクトな分割全体を $\mathcal{SP}_n$ で表し， $\mathcal{SP} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{SP}_n$ とおく．

次の 3 つの図のうち，左は分割 $(5, 4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_{12}$ の Young 図形（イギリス式）である．ストリクトな分割の場合は，通常の Young 図形の行をシフトして定まるシフト図形を好んで用いる（図の真ん中）．またシフト図形とそれを折り返したものを貼り合わせてできる，図の右のものを， λ のダブル図形という．



ストリクトな分割 λ に対し， λ のダブル図形を（元の）Young 図形とする分割 μ のことを λ の**ダブル** (double) といい， $D(\lambda) = \mu$ で表す．例えば上の分割 $\lambda = (5, 4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_{12}$ に対し， $D(\lambda) = (6, 6, 5, 5, 2) \in \mathcal{P}_{24}$ である．

分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathcal{P}$ は，全ての成分 λ_i が奇数であるとき，**奇数分割** であるという． $\mathcal{P}_n$ 内の奇数分割全体を $\mathcal{OP}_n$ で表し， $\mathcal{OP} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{OP}_n$ とおく．一般に

$$|\mathcal{SP}_n| = |\mathcal{OP}_n|$$

となることがよく知られている．

$\lambda \in \mathcal{SP}_n$ と $\nu \in \mathcal{OP}_n$ に対し, 有理数 X_ν^λ を以下の式で定義する:

$$(3.1) \quad p_\nu = \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}_n} X_\nu^\lambda P_\lambda \quad (\nu \in \mathcal{OP}_n).$$

ここで p_ν はべき和対称関数であり, P_λ は Schur の P 関数である ([10, III-8]). 式 (3.1) は (2.1) のスピン類似と見なされる. 実際, 対称群のスピン表現 (射影表現) の既約指標値は, X_ν^λ に適当に 2 のべきを掛けた値に等しいことが知られている. ここでは表現論には立ち入らずに, 単に X_ν^λ を **スピン既約指標 (値)** と呼ぶことにする. 対称群のスピン表現の現代的理論については, 例えば [12] を参照されたい.

定義 2.1 のスピン対応物は次のように定義される. 基本的には χ_ν^λ を X_ν^λ に置き換えるだけである.

定義 3.1 (Ivanov [7]). k を非負整数とし, $\nu \in \mathcal{OP}_k$ とする. 次で定まる関数 $\text{Ch}_\nu^{\text{spin}} : \mathcal{SP} \rightarrow \mathbb{Q}$ を **正規化されたスピン指標** という:

- $n \geq k$ で $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ のとき,

$$\text{Ch}_\nu^{\text{spin}}(\lambda) = n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{X_{\nu \cup (1^{n-k})}^\lambda}{X_{(1^n)}^\lambda}$$

とおく.

- $n < k$ で $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ のとき, $\text{Ch}_\nu^{\text{spin}}(\lambda) = 0$ とおく.

ν が一行奇数分割 $\nu = (2k-1)$ のとき, $\text{Ch}_{2k-1}^{\text{spin}} := \text{Ch}_{(2k-1)}^{\text{spin}}$ と書く.

3.2 スピン Kerov 多項式の定義

Kerov 多項式は Ch_k を自由キウムラント R_j を用いて表す多項式である. そのスピン対応物は, $\text{Ch}_k^{\text{spin}}$ を《自由キウムラントの類似物》で表す多項式であろう. では, 《自由キウムラントの類似物》としてどのようなものを考えれば良いだろうか. 我々は次を提案する.

定義 3.2. $j = 2, 3, \dots$ とする. 関数 $\mathfrak{R}_j : \mathcal{SP} \rightarrow \mathbb{Q}$ を

$$\mathfrak{R}_j(\lambda) = R_j(D(\lambda))$$

で定義する. すなわち $\mathfrak{R}_j(\lambda)$ は, λ のダブル $D(\lambda)$ に対応する Kerov 推移測度 $\mathbf{m}_{D(\lambda)}$ の j 番目の自由キウムラントである.

スピン Kerov 多項式に用いるものは偶数番目の自由キウムラント $\{\mathfrak{R}_{2k}\}_{k=1,2,\dots}$ である。

定理 3.3 (主定理 1). $\nu \in \mathcal{OP}$ とする. このとき $\text{Ch}_\nu^{\text{spin}}$ は $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4, \dots$ の有理数係数多項式として一意的に表すことができる.

定義 3.4. $2\text{Ch}_{2k-1}^{\text{spin}} (k = 1, 2, \dots)$ を $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4, \dots, \mathfrak{R}_{2k}$ の多項式で表す:

$$2\text{Ch}_{2k-1}^{\text{spin}} = K_{2k-1}^{\text{spin}}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4, \dots, \mathfrak{R}_{2k}).$$

この k 変数多項式 K_{2k-1}^{spin} を**スピン Kerov 多項式**という.

定理 3.5 (主定理 2). スピン Kerov 多項式 $K_{2k-1}^{\text{spin}}(\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4, \dots, \mathfrak{R}_{2k})$ は

$$\mathfrak{R}_{2k} + (\text{a polynomial in } \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4, \dots, \mathfrak{R}_{2k-2} \text{ of degree } < 2k - 1)$$

の形をしている. (次数 (degree) については後述.)

具体的な形は既に例 1.2 で見たように, Kerov 多項式と似た形をしていることが観察される. 例えば

$$\begin{aligned} K_7 &= R_8 + 70R_6 + 84R_4R_2 + 56R_3^2 + 14R_2^3 + 469R_4 + 224R_2^2 + 180R_2, \\ K_7^{\text{spin}} &= \mathfrak{R}_8 + 70\mathfrak{R}_6 + 84\mathfrak{R}_4\mathfrak{R}_2 + 14\mathfrak{R}_2^3 + 469\mathfrak{R}_4 + 280\mathfrak{R}_2^2 + 180\mathfrak{R}_2, \end{aligned}$$

である. Kerov 多項式と同様に次が期待できるだろう.

予想 3.6 (spin Kerov 予想). スピン Kerov 多項式の係数はすべて非負整数である.

現状, 係数は有理数であることしか示せていない. 整数であること, さらに非負であることが予想である.

3.3 定理 3.3, 定理 3.5 の証明

定理 3.3 と定理 3.5 の証明は対称関数の理論から得られる. ここでは概略を述べる. 詳細は [11] を参照されたい.

3.3.1 対称関数部分環 Γ

べき和対称関数 $p_k(x_1, x_2, \dots) = x_1^k + x_2^k + \dots$ ($k = 1, 2, \dots$) は対称関数環 Λ を生成する: $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, p_3, \dots]$. 代数 Λ には標準的に $\deg p_k = k$ により次数が定まる. こ

の部分代数 $\Gamma = \mathbb{Q}[p_1, p_3, p_5, \dots]$ を考える. 代数 Γ は Schur の P -関数, Q -関数が住むところであり, 対称群のスピン表現論で重要である.

対称関数 $f \in \Gamma$ に対し, $\mathcal{SP}$ 上の関数 $\bar{f}$ を

$$\bar{f}(\lambda) = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l, 0, 0, \dots), \quad \lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l > 0) \in \mathcal{SP}$$

によって定義する. 例えば $\bar{p}_1(\lambda) = \lambda_1 + \dots + \lambda_l = |\lambda|$ である. $f, g \in \Gamma$ に対し, $\bar{f}(\lambda) = \bar{g}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathcal{SP}$) となるのは $f = g$ のときに限られる ([7, Proposition 6.2]) . このことに注意して, 以下 $\bar{f}$ を単に f と表すことにする. すなわち Γ は, 関数

$$\mathcal{SP} \ni \lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l > 0) \mapsto p_{2k-1}(\lambda) = \sum_{i=1}^l \lambda_i^{2k-1}$$

($k = 1, 2, \dots$) で生成される代数と自然にみなす.

3.3.2 正規化されたスピン指標

次が成り立つ.

命題 3.7 (Ivanov [7]). 任意の $\nu \in \mathcal{OP}$ に対し, $\text{Ch}_\nu^{\text{spin}} \in \Gamma$ が成り立つ. さらに, $k = 1, 2, \dots$ に対し

$$\text{Ch}_{2k-1}^{\text{spin}} = p_{2k-1} + (\text{a function in } \Gamma \text{ of degree } < 2k-1)$$

の形をしている.

例 3.8.

$$\text{Ch}_1^{\text{spin}} = p_1,$$

$$\text{Ch}_3^{\text{spin}} = p_3 - 3p_1^2 + 2p_1,$$

$$\text{Ch}_5^{\text{spin}} = p_5 - 10p_3p_1 + \frac{55}{3}p_3 + \frac{50}{3}p_1^3 - 50p_1^2 + 24p_1.$$

3.3.3 スピン Kerov 多項式の存在

次の主張が定理 3.3 の鍵となる. 定義 3.2 で定めた $\mathfrak{R}_j$ について, 次が言える.

命題 3.9. $j = 2, 3, \dots$ に対し, $\mathfrak{R}_j \in \Gamma$ が成り立つ. さらに各 $k = 1, 2, \dots$ に対し,

$$\mathfrak{R}_{2k} = 2p_{2k-1} + (\text{a function in } \Gamma \text{ of degree } < 2k-1),$$

$$\mathfrak{R}_{2k+1} = 2kp_{2k-1} + (\text{a function in } \Gamma \text{ of degree } < 2k-1),$$

の形をしている. 特に $\{\mathfrak{R}_{2k}\}_{k=1,2,\dots}$ (または $\{\mathfrak{R}_{2k+1}\}_{k=1,2,\dots}$) は代数的に独立で, Γ を生成する.

例 3.10.

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_2 &= 2p_1, \\ \mathfrak{R}_3 &= 2p_1, \\ \mathfrak{R}_4 &= 2p_3 - 6p_1^2 + 2p_1, \\ \mathfrak{R}_5 &= 4p_3 - 16p_1^2 + 2p_1, \\ \mathfrak{R}_6 &= 2p_5 - 20p_3p_1 + \frac{20}{3}p_3 + \frac{100}{3}p_1^3 - 30p_1^2 + 2p_1.\end{aligned}$$

定理 3.3 の証明. 命題 3.7 と命題 3.9 から直ちにしたがう. $\square$

定理 3.5 の証明. $k = 1, 2, \dots$ を固定し,

$$H = 2 \operatorname{Ch}_{2k-1}^{\operatorname{spin}} - \mathfrak{R}_{2k}, \quad H_1 = 2 \operatorname{Ch}_{2k-1}^{\operatorname{spin}} - 2p_{2k-1}, \quad H_2 = \mathfrak{R}_{2k} - 2p_{2k-1}$$

とおく. すでに見たようにこれらは Γ に属す. $H = H_1 - H_2$ である. 命題 3.7 の後半の主張より $\deg H_1 < 2k - 1$ であって, また命題 3.9 より $\deg H_2 < 2k - 1$ である. よって $\deg H < 2k - 1$ が成り立ち, 特に H は $p_1, p_3, \dots, p_{2k-3}$ の多項式として表される. 命題 3.9 より $\deg R_{2j} = 2j - 1$ であることに注意すると, H は $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4, \dots, \mathfrak{R}_{2k-2}$ の多項式として表される. $\square$

3.4 スピン Kerov 多項式の具体的表示の求め方

$\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l > 0) \in S\mathcal{P}$ に対し

$$\Phi(z; \lambda) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{z + \lambda_i}{z - \lambda_i}, \quad |z| \gg 1$$

とおく. このとき

$$\Phi(z; \lambda) = \exp \left(2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_{2j-1}(\lambda)}{2j-1} z^{-(2j-1)} \right)$$

となることは容易に分かる.

命題 3.11. 次が成り立つ.

(i) [8, Proposition 3.3] $k = 1, 2, \dots$ に対し, 次が成り立つ.

$$\text{Ch}_{2k-1}^{\text{spin}}(\lambda) = -\frac{1}{4(2k-1)}[z^{-1}] \left\{ (2z-2k+1) \prod_{j=1}^{2k-2} (z-j) \cdot \frac{\Phi(z; \lambda)}{\Phi(z-2k+1; \lambda)} \right\}.$$

(ii) [11, Proposition 3.9] $k = 1, 2, \dots$ に対し, 次が成り立つ.

$$\mathfrak{R}_{2k}(\lambda) = -\frac{1}{2k-1}[z^{-2k}] \left(\frac{\Phi(z; \lambda)}{\Phi(z-1; \lambda)} \right)^{2k-1}.$$

この命題とコンピューターを用いることで, $\text{Ch}_{2k-1}^{\text{spin}}$ や $\mathfrak{R}_{2k}$ を p_{2j-1} たちの多項式としてそれぞれ表すことができる (例 3.8 および例 3.10). それらを比較することで, 例 1.2 の式が求められる. ただし定理 3.5 の次数に関する評価は, 命題 3.11 から現状得ることはできない.

4 議論

4.1 Kerov 多項式とスピン Kerov 多項式の類似性

例 1.1 と例 1.2 を眺めていると気付くように, Kerov 多項式とスピン Kerov 多項式の係数は, いくつかの場合に一致している. この現象に関する報告は別の機会に譲ろう.

4.2 Kerov 多項式の係数の組合せ的解釈

置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対し $C(\sigma)$ で σ のサイクル全体とする. 例えば $\sigma = (1\ 4\ 3)(2\ 6)(5) \in \mathfrak{S}_6$ とサイクル分解されるとき, $C(\sigma) = \{(1\ 4\ 3), (2\ 6), (5)\}$ である. Kerov 多項式の係数 K_k の係数は次のような組合せ解釈を持つ.

定理 4.1 (Dołęga–Féray–Śniady [3]). $k \geq 1$ とし, $s_2, s_3, \dots$ を非負整数の列で $\sum_{j \geq 2} j s_j \leq k+1$ を満たすとする. このとき, Kerov 多項式 K_k における項 $R_2^{s_2} R_3^{s_3} \dots$ の係数は, 次の条件 (i) – (v) を満たす三つ組 (σ_1, σ_2, q) の個数に等しい:

- (i) $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k$ で, $\sigma_1 \sigma_2 = (1\ 2 \cdots k)$ (長さ k のサイクル) となる.
- (ii) $|C(\sigma_2)| = s_2 + s_3 + \dots$.
- (iii) $|C(\sigma_1)| + |C(\sigma_2)| = \sum_{j \geq 2} j s_j$.
- (iv) 写像 $q: C(\sigma_2) \rightarrow \{2, 3, \dots\}$ は, $|q^{-1}(i)| = s_i$ ($i \geq 2$) を満たす.

(v) $\emptyset \subsetneq G \subsetneq C(\sigma_2)$ となる任意の集合 G に対し, 次の不等式が成立する:

$$\left| \left\{ b \in C(\sigma_1) \mid b \cap \left(\bigcup G \right) \neq \emptyset \right\} \right| > \sum_{g \in G} (q(g) - 1).$$

スピン Kerov 多項式に対しても類似した解釈が期待されるが, 現状では定式化もできていない.

4.3 Plancherel 測度

漸近的表現論において, 対称群の Plancherel 測度は基本的なランダム Young 図形モデルである. そのスピン類似, すなわちストリクトな分割の上の確率測度は, **shifted Plancherel 測度**と呼ばれ, 次のように定義される:

$$\mathbb{P}_n^{\text{shift}}(\{\lambda\}) = \frac{2^{n-\ell(\lambda)} (X_{(1^n)}^\lambda)^2}{n!}, \quad \lambda \in \mathcal{SP}_n$$

(strict Plancherel measure, もしくは Plancherel measure on $\mathcal{SP}_n$ などとも呼ばれる). 例えば講究録 [14] を参考にされたい. スピン Kerov 多項式と shifted Plancherel 測度の関連についても, 別の機会に報告したい.

4.4 奇数次の自由キュムラントによる展開

スピン Kerov 多項式は, 正規化されたスピン指標 $\text{Ch}_{2k-1}^{\text{spin}}$ を偶数番目の自由キュムラント $\mathfrak{R}_{2j}$ たちを用いて表している. 一方命題 3.9 によれば, 奇数番目の自由キュムラント $\mathfrak{R}_{2j+1}$ たちの多項式として一意的に表すこともできる. 例えば

$$12 \text{Ch}_5^{\text{spin}} = 2\mathfrak{R}_7 + 3\mathfrak{R}_5\mathfrak{R}_3 + 50\mathfrak{R}_5 + \mathfrak{R}_3^3 + 71\mathfrak{R}_3^2 + 92\mathfrak{R}_3$$

と書ける. この例での係数も非負値となっているが一般的には分からない. (現状では) 我々は元の Kerov 多項式との類似性を鑑みて, 定義 3.4 をスピン Kerov 多項式として採用している.

4.5 その他の Kerov 多項式の変種

対称群の (スピン) 表現論を考えると, Kerov 多項式・スピン Kerov 多項式はそれぞれ対称関数の Schur 関数・Schur の Q -関数を考えることに相当する. それ以外の対称関数に対応する Kerov 多項式も Dołęga, Féray, Śniady らを中心に研究が進んでいる.

Zonal polynomials に対応する Kerov 多項式は [6] で研究された. いわば「zonal Kerov 多項式」「symplectic zonal Kerov 多項式」であり, 定理 4.1 の類似の結果が得られている.

Jack 関数 $J_\lambda^{(\alpha)}$ に対応する Kerov 多項式, いわば「Jack-Kerov 多項式」は, Lassalle [9] により導入された. Jack parameter α を含み, $\alpha = 1$ のときが元の Kerov 多項式であり, $\alpha = 2, \frac{1}{2}$ のときがそれぞれ zonal Kerov 多項式, symplectic zonal Kerov 多項式である. Jack 多項式に関連する表現論が乏しいこともあり, Jack-Kerov 多項式の詳しい研究は難しく, 部分的な結果が例えば [4] で得られている. Jack-Kerov 多項式の今後の研究では, Jack 多項式の組合せ的構造のより深い理解が必要であろう.

参考文献

- [1] Philippe Biane. Representations of symmetric groups and free probability. *Adv. Math.*, Vol. 138, No. 1, pp. 126–181, 1998.
- [2] Philippe Biane. Characters of symmetric groups and free cumulants. In *Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics (St. Petersburg, 2001)*, Vol. 1815 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 185–200. Springer, Berlin, 2003.
- [3] Maciej Dołęga, Valentin Féray, and Piotr Śniady. Explicit combinatorial interpretation of Kerov character polynomials as numbers of permutation factorizations. *Adv. Math.*, Vol. 225, No. 1, pp. 81–120, 2010.
- [4] Maciej Dołęga, Valentin Féray, and Piotr Śniady. Jack polynomials and orientability generating series of maps. *Sém. Lothar. Combin.*, Vol. 70, No. B70j, 2014. 50 pages.
- [5] Valentin Féray. Combinatorial interpretation and positivity of Kerov’s character polynomials. *J. Algebraic Combin.*, Vol. 29, No. 4, pp. 473–507, 2009.
- [6] Valentin Féray and Piotr Śniady. Zonal polynomials via Stanley’s coordinates and free cumulants. *J. Algebra*, Vol. 334, pp. 338–373, 2011.
- [7] 洞彰人. 対称群の表現とヤング図形集団の解析学 — 漸近的表現論への序説. 数学の杜 4. 数学書房, 2017.
- [8] V. N. Ivanov. The Gaussian limit for projective characters of large symmetric groups. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, Vol. 283, No. Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 6, pp. 73–97, 2001. Translation in *J. Math. Sci. (N. Y.)* 121 (2004), no. 3, 2330–2344.
- [9] Vladimir Ivanov. Plancherel measure on shifted Young diagrams. In *Representa-*

- tion theory, dynamical systems, and asymptotic combinatorics*, Vol. 217 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pp. 73–86. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [10] Michel Lassalle. Jack polynomials and free cumulants. *Adv. Math.*, Vol. 222, No. 6, pp. 2227–2269, 2009.
- [11] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1995.
- [12] 松本詔. Polynomiality of plancherel averages on strict partitions. リー型の組合せ論, 数理解析研究所講究録, 第 2039 巻, pp. 59–78. 京都大学, 2017. Japanese.
- [13] Sho Matsumoto. A spin analogue of Kerov polynomials. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, Vol. 14, No. 053, 2018. 13 pages.
- [14] Jinkui Wan and Weiqiang Wang. Lectures on spin representation theory of symmetric groups. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, Vol. 7, No. 1, pp. 91–164, 2012.