

不確定特異点をもつ偏微分作用素の超局所解析

東大理 打越敬祐

$t \in \mathbb{R}$ とし, 常微分作用素

$$L = t^{K(m)} \frac{d^m}{dt^m} + \sum_{j=0}^{m-1} t^{K(j)} a_j(t) \frac{d^j}{dt^j}$$

を考える。ここで, $K(0), \dots, K(m)$ は非負の整数とし, 係数 $a_0(t), \dots, a_{m-1}(t)$ は原点で解析的な函数とし, また

$$a_j(0) \neq 0 \quad 0 \leq j \leq m-1$$

と仮定する。さて, 青木[1]に従って, L の不確定度 $\varepsilon = \varepsilon(L)$ を,

$$(1) \quad \varepsilon(L) = \max \left\{ \max_{0 \leq j \leq m-1} \left(\frac{K(m) - K(j)}{m-j} \right), 1 \right\}$$

によって定義する。容易にわかるように, $\varepsilon = 1$ (resp.

$\varepsilon \neq 1$) のとき L は原点に確定特異点 (resp. 不確定特異点) をもつ。このような常微分作用素については, 青木[3], 柏原[4]により, 次のことが示されている: $\xi^* = (0; \sqrt{-1}) \in \mathbb{R}T^*\mathbb{R}$

において, L は超局所的には標準型 $x_0^{K(m)}$ と同等と考えられ, この点で,

$$\text{Ker}_c L \simeq \bigoplus_{K(m)} \mathbb{C}, \quad \text{Coker}_c L = 0$$

である。

本稿の目的は, この結果を偏微分作用素に拡張することである。 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ とし, M の変数を $x = (x_0, x')$ と書く。 $K(0), \dots, K(m)$ を非負の整数として, 偏微分作用素

$$P = \sum_{|K| \leq m} x_0^{K(0)} a_K(x) \partial_x^K$$

を考える。但し, $a_K(x)$ は $x = 0$ で解析的な函数とし,

$$\begin{cases} a_{(m, 0, \dots, 0)} = 1 \\ a_K(0, x') \neq 0 \end{cases}$$

としておく。このとき, P の不確定度 $\varepsilon = \varepsilon(P)$ を, (1) で定義する。 $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon \neq 1$) のとき, P は超平面 $N = \{x \in M; x_0 = 0\}$ に確定特異点 (resp. 不確定特異点) をもつ, ということにする。

$\varepsilon = 1$ の場合, 常微分作用素と類似の結果は柏原-大島[5]によって得られている。 $x^* = (0; \sqrt{-1}, 0, \dots, 0) \in \sqrt{-1} T^* \mathbb{R}^m$ において, P は超局所的には標準型 $x_0^{K(m)}$ と同等なのである。

2.3.1 の場合については，筆者[8]により初めてこういう結果が得られたので，以下その概要を紹介する。まず主要結果を述べるため，次の定義を与えておく。

定義 2.3.1 とする。 $x^* = (0, \sqrt{1}, 0, \dots, 0) \in \sqrt{1} T^* \mathbb{R}^{n+1}$ における P の特性指数とは，方程式

$$\lambda^{k(m)} + \sum_{\pi(P)} a(j, 0, \dots, 0)(0) \lambda^{k(j)} = 0$$

の根のことである。但し，

$$\pi(P) = \left\{ 0 \leq j \leq m-1; \frac{k(m) - k(j)}{m-j} = 2 \right\}$$

とする。 $\square$

2.3.1 としたので，上の代数的方程式は λ に関する $k(m)$ 次方程式である。その根を，重複度も込めて， $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_{k(m)}$ とする。

主要結果は，次のとおり。

定理 1. 2.3.1 とし， P の特性指数は全て相異なるとする。このとき，

$$Q_1(x, D), \dots, Q_{k(m)}(x, D) \in \mathcal{E}_{x^*}^R$$

が存在して，

$$0 \rightarrow \bigoplus_{k(m)} (\delta(x) \otimes B_N) \xrightarrow{(Q_1, \dots, Q_{k(m)})} \mathcal{E}_M \xrightarrow{P} \mathcal{E}_M \rightarrow 0$$

は x^* で層の意味で完全である。 $\square$

さて, $u, f \in \mathcal{E}_M$ に対して, $K(m)$ -縦ベクトル $\vec{u}, \vec{f}$ を

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & D_0^{1/2} x_0 & & \\ & \ddots & & \\ & & (D_0^{1/2} x_0)^{K(m-1)} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}$$

とする。このとき, $Pu = f$ という方程式は,

$$\{x_0 I_{K(m)} + A(x, D)\} \vec{u} = \vec{f}$$

と書き直せる。但し, $A(x, D)$ は $-\frac{1}{2}$ 階の (分数べき) 擬微分作用素の $K(m) \times K(m)$ 行列である。ところで, 定義から 2 は有理数 ≥ 1 なので, $1 \leq p \leq q$ なる互いに素な整数 p, q が存在し, $2 = q/p$ である。今は $2 \geq 1$ としているので, 更に $p \leq q$ である。そして, $A(x, D)$ の完全表象 $\sigma(A)(x, \xi)$ は, 青木[2]の意味で,

$$\sigma(A)(x, \xi) \sim \sum_{j=-p/q, -(p+1)/q, \dots} A_j(x, \xi)$$

という形に漸近展開される。また, A の主表象 $A_{-p/q}(x, \xi)$ の固有値を, $\mu_j(x, \xi)$, $1 \leq j \leq K(m)$ とすると,

$$-\mu_j(x, \xi) \Big|_{x=0, \xi'=0} = \lambda_j \xi_0^{-p/q} \quad 1 \leq j \leq K(m)$$

となる。従って, x^* の近くでは, これらは全て相異なる, ということが仮定されている。

さて，定理 1 は次のことからたやすく導かれる。

定理 2、上の条件のもとで，作用素として可逆な行列

$$E(x', D), F(x, D) \in M(K(m), \mathcal{E}^R_{x*})$$

が存在して，

$$E(x', D) \{ x_0 I_{K(m)} + A(x, D) \} F(x, D) = x_0 I_{K(m)}$$

を満たす。□

この定理の証明の概略を述べて，本稿を終える。まず，

$$\sigma(W) \sim I_{K(m)} + \sum_{j=-1/2, -3/2, \dots} W_j(x, \xi)$$

という漸近展開が定める分数べき擬微分作用素の $K(m) \times K(m)$ 行列 $W(x, D)$ によって，

$$\{ x_0 I_{K(m)} + A(x, D) \} W(x, D) = x_0 I_{K(m)} + B(x', D)$$

但し，

$$\sigma(B)(x', \xi) \sim \sum_{j=-1/2, -(p+1)/2, \dots} B_j(x', \xi)$$

$$B_{-p/2}(x', \xi) = A_{-p/2}(0, x', \xi)$$

のようにできる (Weierstrass の割算定理)。そこで， $A(x, D)$ の代わりに， $B(x', D)$ を考えればよい。

さて，

$$E(x', D) \{ x_0 I_{K(m)} + B(x', D) \} = x_0 I_{K(m)} E(x', D)$$

なる可逆行列 $E(x', D)$ を見つければ, $F(x, D) = E^{-1}(x', D) W(x, D)$ であるが, $E(x', D)$ の満たすべき方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} \sigma(E)(x', \xi) + \sigma(EB)(x', \xi) \sim 0$$

である。これはおおざっぱに言って, (x', ξ') を *parameter* に持つ, ξ_0 に関する常微分方程式で, $\xi_0 \rightarrow \infty$ での振舞を調べることが重要である。このため, 常微分方程式の古典理論から, *Turnitt* [7] の方法を援用する。

第1段

可逆行列

$$\sigma(T)(x', \xi) = \sum_{j=0, -1/2, \dots, -(8-P)/2} T_j(x', \xi)$$

が存在して,

$$\begin{aligned} T(x', D) \{ x_0 I_{K(m)} + B(x', D) \} T^{-1}(x', D) \\ = x_0 I_{K(m)} + C(x', D) \end{aligned}$$

但し,

$$\sigma(C)(x', \xi) \sim \sum_{j=-P/2, -(8+P)/2, \dots} C_j(x', \xi)$$

で, $C_j(x', \xi)$ は $-P/2 \geq j \geq -1$ のとき対角行列である。

第2段(その1)

$C'(\alpha', D)$ を,

$$\sigma(C')(\alpha', \xi) = \sum_{-1/2 \leq j \leq -1} C_j(\alpha', \xi)$$

で定めると, これは対角行列である。 $x_0 I_{K(m)} + C(\alpha', D)$ を,
 $x_0 I_{K(m)} + C'(\alpha', D)$ に変換する。それとは,

$$\begin{aligned} (2) \quad & \{x_0 I_{K(m)} + C(\alpha', D)\} D_0^{(2-2p)/8} U(\alpha', D) \\ &= D_0^{(6-p)/8} U(\alpha', D) \{x_0 I_{K(m)} + C'(\alpha', D)\} \end{aligned}$$

とすればよい。 U を逐次近似で解く。いま, $U^{(2)}(\alpha', \xi)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ を,

$$\begin{aligned} (3)_i \quad & \frac{\partial}{\partial \xi_0} U^{(i)} + \frac{8-p}{8} \xi_0^{-1} U^{(i)} - \sigma(C') U^{(i)} + U^{(i)} \sigma(C') \\ &= \sum_{(K, S, \tilde{r}') \in \Pi_1(i)} \frac{1}{S!} \partial_{\xi'}^S C_K(\alpha', \xi) \partial_{\alpha'}^S U^{(i-1)}(\alpha', \xi) \\ &\quad - \sum_{(K, S, \tilde{r}') \in \Pi_2(i)} \frac{1}{S!} \partial_{\xi'}^S U^{(i-1)}(\alpha', \xi) \partial_{\alpha'}^S C_K(\alpha', \xi) \end{aligned}$$

とする。但し, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ として,

$$\begin{aligned} (4)_i \quad \Pi_1(i) = \{ & (K, S, \tilde{r}') \in \frac{1}{8} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}_+)^n \times \mathbb{Z}_+; \\ & K - |S| - \frac{\tilde{r}'}{8} = -\frac{7}{8} - 1, \quad |K| + |S| \geq 1 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5)_i \quad \Pi_2(i) = \{ & (K, S, \tilde{r}') \in \frac{1}{8} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}_+)^n \times \mathbb{Z}_+; \\ & K - |S| - \frac{\tilde{r}'}{8} = -\frac{7}{8} - 1, \quad K \geq -1, \quad S \neq 0 \} \end{aligned}$$

ここで, (A)_i と (B)_i から,

$$(A, S, z') \in \pi_1(z) \text{ or } \pi_2(z) \Rightarrow z' \leq z-1$$

となる。従って, (B)_i は z について帰納的に解ける。さて,

$\tau = \xi_0^{-1/\delta}$ として, $U^{(z')}(x', \xi)$ に $\xi_0 = \tau^\delta$ を代入したもの
も同じ記号 $U^{(z')}(x', \tau, \xi')$ で表わすことにすると, (B)_i は,

$$\begin{aligned} (b)_i \quad & \frac{\partial}{\partial \tau} U^{(z')}(x', \tau, \xi') + (\delta - p) \tau^{-1} U^{(z')}(x', \tau, \xi') \\ & - \delta \tau^{\delta-1} \left\{ \sigma(C')(x', \tau, \xi') U^{(z')}(x', \tau, \xi') \right. \\ & \quad \left. - U^{(z')}(x', \tau, \xi') \sigma(C')(x', \tau, \xi') \right\} \\ & = \delta \tau^{\delta-1} \sum_{\pi_1(z)} \frac{1}{\delta!} \partial_{\xi'}^\delta C_A(x', \tau, \xi') \partial_{x'}^\delta U^{(z')}(x', \tau, \xi') \\ & \quad - \delta \tau^{\delta-1} \sum_{\pi_2(z)} \frac{1}{\delta!} \partial_{\xi'}^\delta U^{(z')}(x', \tau, \xi') \partial_{\xi'}^\delta C_A(x', \tau, \xi') \end{aligned}$$

となる。このとき, (b)_i の τ 及び ξ' に関する形式的べき級数
としての形式解

$$(7)_i \quad U^{(z')}(x', \tau, \xi') = \sum_{\substack{\frac{\partial}{\partial} + k_1 \leq -\frac{z'+\delta-p}{\delta} \\ j \in \mathbb{Z}_-, \alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n}} U_{\partial^\alpha}^{(z')}(x') \tau^j \xi'^\alpha$$

が構成されて,

$$(8)_i \quad |U_{\partial^\alpha}^{(z')}(x')| \leq C \cdot \frac{[-\frac{z'}{\delta-p}]! [\frac{z'}{\delta}]!}{[\frac{z'}{\delta-p}]! [\frac{z'}{\delta-p} + k_1]!} \tau^{j-k_1-z'} \quad \text{for } \exists C, \exists r > 0$$

をみたす。これは発散級数だが, 以下のような意味をもつ。

8.

第2段(その2)

ここでは、簡単のため、 $\delta = \alpha + 1$ として説明する。

$C_R(x', \tau, \xi')$ に対し、

$$\begin{cases} D_R = \tau^{\delta-1} C_R & R \leq -P/\delta \\ D_{-P/\delta} = \tau^{\delta-1} (C_{-P/\delta}(x', \tau, \xi') - C_{-P/\delta}(x', \tau, 0)) \end{cases}$$

と置く。また、

$$\overline{C_{-P/\delta}}(x') = \tau^{\delta-1} C_{-P/\delta}(x', \tau, 0)$$

とする。上の D_R ($R \leq -P/\delta$) は、 $\forall (x', \xi') \in \mathbb{C}^n$ を fix するとき、 $\ln \tau = \left(\frac{1}{2R}(1+|\xi'|^2)\right)^{1/\delta}$ ($R > 0$ は小さな数) にとって、 $R \in \mathbb{R}$ の函数とみて $L^2(\mathbb{R})$ に属するので、 $t \in \mathbb{R}$ として、

$$\widehat{D}_R(x', t, \xi') = \int_{\ln t = \left(\frac{1}{2R}(1+|\xi'|^2)\right)^{1/\delta}} e^{-\sqrt{-1}t\tau} D_R(x', \tau, \xi') d\tau$$

が定義できる。ところが実は、

$$\widehat{D}_R(x', t, \xi') = \widetilde{D}_R(x', t, \xi') / (t)$$

であって、ここで $\widetilde{D}_R(x', t, \xi')$ は $(x', t, \xi') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$; $|x'| < \varepsilon$ で正則で、 $\exists a, \exists R > 0$ が存在して、

$$(9) \quad \left| \partial_{\xi'}^s \widetilde{D}_R(x', t, \xi') \right| \leq a \exp \left(R^{-1} (1+|\xi'|^2)^{1/\delta} |t| \right) \times \frac{[|\alpha|+|\delta|]! R^{|\alpha|+|\delta|} \frac{|x'|^{2|\alpha|+2|\delta|-\delta}}{(\delta|\alpha|+\delta|\delta|-\delta)!}}{}$$

及び、 $\alpha \geq -1$ のときは、

$$(10) \quad |\hat{D}_R(x', t, \xi')| \leq C \cdot (1+|\xi'|)^{(2-\delta)/2} \exp(R^{-1}(1+|\xi'|)^{1/2}|t|)$$

をみたす。さて、形式べき級数 $\hat{U}^{(2)}(x', t, \xi')$ の形式的な

Laplace変数 $\hat{U}^{(2)}(x', t, \xi')$ を、 $t \in \mathbb{R}$ として、

$$\begin{cases} \hat{U}^{(2)}(x', t, \xi') = -2\pi\sqrt{-1} \hat{U}^{(2)}(x', t, \xi') \gamma(t) \\ \hat{U}^{(2)}(x', t, \xi') = \sum_{\frac{\delta}{2} + |\alpha| \leq -\frac{\delta+1}{2}} U_{j\alpha}^{(2)}(x') \frac{(-\sqrt{-1}t)^{-j-1}}{(-j-1)!} \xi'^{-\alpha} \end{cases}$$

とする。このとき、(8)より、 $k=1/2$ で $\hat{U}^{(2)}$ は収束し、

$$(11)_i \quad |\partial_{\xi'}^{\delta} \hat{U}^{(2)}(x', t, \xi')| \leq C \cdot \frac{[\frac{\delta}{2} + |\delta|]! \cdot r^{-\delta+|\delta|}}{(2+\delta|\delta|)!} |t|^{2+\delta|\delta|} \times \exp(R^{-1}(1+|\xi'|)^{1/2}|t|)$$

をみたす。そして、 $-0 \leq t \leq +r/2$ で、 $\hat{U}^{(2)}$ は式(6)_iを変換した式

$$(12)_i \quad \sqrt{-1} t \hat{U}^{(2)}(x', t, \xi') + \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^t \hat{U}^{(2)}(x', s, \xi') ds$$

$$= \delta(\bar{D}_{-p\delta}(x') \hat{U}^{(2)}(x', t, \xi') - \hat{U}^{(2)}(x', t, \xi') \bar{D}_{-p\delta}(x'))$$

$$= \frac{\delta}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^t \{ \hat{D}'(x', s, \xi') \hat{U}^{(2)}(x', t-s, \xi') - \hat{U}^{(2)}(x', t-s, \xi') \hat{D}'(x', s, \xi') \} ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\pi_3(\delta)} \frac{1}{\delta!} \partial_{\xi'}^{\delta} U^{(2)}(x', t, \xi') \partial_{x'}^{\delta} \bar{D}_{-p\delta}(x') + (\text{続く})$$

$$\begin{aligned}
 & (\text{続き}) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\pi_k(z)} \frac{1}{s!} \int_0^t \partial_{\xi'}^s \widehat{D}_k(x', s, \xi') \partial_{x'}^s \widehat{U}^{(2)}(x', t-s, \xi') ds \\
 & - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\pi_k(z)} \frac{1}{s!} \int_0^t \partial_{\xi'}^s \widehat{U}^{(2)}(x', t-s, \xi') \partial_{x'}^s D_k(x', s, \xi') ds
 \end{aligned}$$

の真の解である。但し,

$$\widehat{D}' = \sum_{-p_k \geq k \geq -1} \widehat{D}_k$$

及び

$$\pi_3(z) = \{(z', s) \in \mathbb{Z}_+ \times (\mathbb{Z}_+)^n; z' + s|s| - 1 = z'\}$$

とした。

以下、簡単のため、^{対角化} $\overline{D}_{p/q}(x')$ の (μ, μ) 成分 $\overline{D}_{p/q, (\mu)}(x')$ は、

$$\mu \neq \nu \Rightarrow \arg(\overline{D}_{p/q, (\mu)}(x') - \overline{D}_{p/q, (\nu)}(x')) \neq \frac{\pi}{2}$$

とする。このとき、 $(z', s) \in \pi_3(z)$ でも $z' \leq z - 1$ なので、 $\widehat{U}^{(2)}$ に関する第3種 Volterra 型積分方程式 $(2)_i$ は、 z' について帰納的に、 $t \in \mathbb{R}$ 全体において解ける。更に、(9)、(10)を用いて、 $t \in \mathbb{R}$ のとき、(11)_i と類似の評価

$$(13)_i \quad |\widehat{U}^{(2)}(x', t, \xi')| \leq c \cdot r^{-z} \exp(r^{-1}(|t| + |\xi'|)^{\frac{1}{p}} |t|) \frac{[\frac{z}{2}]! |t|^z}{z!}$$

を得る。そこで、

$$\widehat{U}^{(2)}(x', t, \xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{U}^{(2)}(x', t, \xi') e^{i\pi t \tau} d\tau$$

は, $\lim_{\tau \geq 2r^{-1}(1+|\xi|)} \tau^{-2} \text{ well-defined } \tau$, (6) の真の解であって,

$$|v^{(2)}| \leq C, r^{-2} \varepsilon^{-2} \left[\frac{2}{\tau}\right]! |\tau|^{-2+\frac{1}{2}}$$

$\tau = \xi_0^{1/2}$ から,

$$|v^{(2)}(x', \xi)| \leq C (r\varepsilon)^{-2} \left[\frac{2}{\tau}\right]! |\xi_0|^{-2+\frac{1}{2}}$$

$$\text{on } \Omega = \{ (x', \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n+1};$$

$$|x'| \leq \varepsilon, \frac{2}{3}\pi < \arg \xi_0 < \frac{2\pi}{3},$$

$$|\xi_0| > \left(\frac{2r\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^2 (1+|\xi|) \}$$

となり,

$$\sigma(v) \sim \sum_{i=0}^{\infty} v^{(i)}$$

は 0 階の擬微分作用素を定め, (4) を満たす. 更に,

$$v^{(0)} = \xi_0^{-1/2}$$

であり, $i=1, 2$ のときは, $v^{(i)}$ が (7) の形の漸近展開をもつことから $|v^{(i)}| \leq \exists C, \xi_0^{-1/2-i/2}$ を得る. よって, $v(x', 0)$ は可逆な作用素である。

ここまでの議論は 0 階の作用素しか使わないことを注意しておく。 δ, α が一般のときも本質的には同様である。

第3段

対角行列 $x_0 I_{K(m)} + C'(x', D)$ を $x_0 I_{K(m)}$ に変換する。この際, 無限階作用素を用いる。一般に, 無限階作用素の計算

12.

は困難であるが、いまは対角行列を扱うので、計算が可能になる。まず、 $X(x', D_0) \in M(K(m); \mathcal{E}^R)$ を、

$$\sigma(X)(x', \xi_0) = \sum_{j=1-\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{q}, \dots, \frac{1}{q}} X_j(x') \xi_0^j + X_0(x') \log \xi_0$$

とする。但し、 $X_j(x')$ は適当な対角行列とする。このとき、 $X(x', D_0)$ は無限階作用素であるが、可逆な行列で、

$$X^{-1}(x', D_0) \{ x_0 I_{K(m)} + C'(x', D) \} X(x', D_0)$$

は、0階の作用素になってしまう。更に、これは詳しく調べることができて、 $X_j(x')$ を適当に決めてやれば、

$$\begin{aligned} & X^{-1}(x', D_0) \{ x_0 I_{K(m)} + C'(x', D) \} X(x', D_0) \\ &= x_0 I_{K(m)} + C''(x', D) \end{aligned}$$

但し、

$$\sigma(C'') = \sum_{j=-\frac{2}{p}, -\frac{2+1}{p}, \dots, -1} C''_j(x', \xi) + C'''(x', \xi)$$

しかも C''_j は ξ について j 次齊次で、

$$C''_j(x', \xi_0, 0) = 0,$$

また

$$|C'''(x', \xi)| \leq \text{const. } |\xi_0|^{-1-\frac{1}{q}}$$

とできる。まとめて、

$$(14) \quad |\sigma(C'')(x', \xi)| \leq \text{const. } |\xi_0|^{-1-\frac{1}{q}} (1+|\xi|).$$

そこで、 $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して、 $Z^{(j)}(x', \xi)$ を次のよう

に決めてやる:

$$Z^{(0)} = I_{K(m)}$$

$$Z^{(j)}(x', \xi) = \sum_{\substack{j+|\delta|+1=2 \\ j' \in \mathbb{Z}_+ \\ \delta \in (\mathbb{Z}_+)^n}} \frac{1}{\delta!} \int_{\xi_0}^{\xi} \partial_{\xi'}^{\delta} \sigma(C'')(x', \xi) \partial_{x'}^{\delta} Z^{(j')}(x', \xi) d\xi_0$$

すると, $\exists C, \exists r > 0$ が存在して, ε を十分小さくするとき,

$$|Z^{(j)}(x', \xi)| \leq C \cdot r^{-2} |\xi_0|^{-2} \geq! \exp(|\xi_0|^{1-\frac{1}{r}})$$

$$\text{on } \{(x', \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n+1}; |x'| < \varepsilon, |\xi'| < \varepsilon |\xi_0|$$

$$|R \xi_0| < \varepsilon \ln \xi_0, \varepsilon |\xi| > 1\}$$

が成立する。従って,

$$\sigma(Z)(x', \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} Z^{(j)}(x', \xi)$$

なる $Z(x', D) \in M(K(m), \mathcal{E}^R)$ が存在して,

$$\{\chi_0 I_{K(m)} + C''(x', D)\} Z(x', D) = Z(x', D) \chi_0 I_{K(m)}.$$

Z の逆作用素は,

$$\tilde{Z}(x', D) \{\chi_0 I_{K(m)} + C''(x', D)\} = \chi_0 I_{K(m)} \tilde{Z}(x', D)$$

なる $\tilde{Z}$ も同様に構成することができて,

$$Z \tilde{Z} = \tilde{Z} Z = I_{K(m)}$$

となる。

これで, 定理 2 が示された。

この論説の詳細は, 打越[8] に発表される。なお, 打越[7]

の中で, Theorem 7. として, 本稿の 定理 1. が述べられているが, 完全図式が

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{k(m)} (\delta(x_0) \otimes \mathcal{A}_N) \xrightarrow{(Q_1, \dots, Q_{k(m)})} \mathcal{C}_M \xrightarrow{P} \mathcal{C}_M \longrightarrow 0$$

となっている。 $\mathcal{A}_N$ は $\mathcal{A}_n$ の誤りなので, この場をお借りして訂正したい。

文献

- [1] 青木貴史: Growth order of microdifferential operators of infinite order. (to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA.)
- [2] 青木貴史: Invertibility for microdifferential operators of infinite order (to appear in Publ. RIMS)
- [3] 青木貴史: An invariant measuring the irregularity of a differential operator and a microdifferential operator (to appear in J. Math. Pures Appl.)
- [4] 柏原正樹: Systèmes d'équations microdifférentielles, (Univ. Paris-Nord におけ 3 1976-1977 の講義)
- [5] 柏原正樹-大島利雄: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems (Ann. of Math., 106 145-200, 1977)
- [6] H. L. Turrittin: Convergent solutions of ordinary linear differential equations in a neighborhood of an irregular singular point, (Acta Math. 93, 28-66, 1955).

- [7] 打越敬祐: Microlocal analysis of partial differential operators with irregular singularities, (Proc. Japan Acad. 57, Ser A. No. 70, 485-487, 1981)
- [8] 打越敬祐: Microlocal analysis of partial differential operators with irregular singularities, (to appear.)