

マルチバイブレータにおける臨界現象

明治鍼灸短大・物理 森 本 安 夫

(1982年7月19日受理)

要 旨

マルチバイブレータの時定数を決める容量に並行した抵抗, R を接続する。 R に臨界値 R_c があり, $R > R_c$ では非発振, $R < R_c$ では発振状態となり, R_c で発振-非発振の転移を行なう。振巾とデューティ比は R によらず一定であるが, 発振周期, T_p は制御変数, $\beta (= (R - R_c) / R)$ に $\ln \beta$ の形に依存し, 対数発散を示す。又 $\beta < 0.1$ の領域では T_p の揺ぎが観測可能となる。揺ぎの分散に相当すると思われる量は $\beta^{-1.0}$ のようになり, -1 の臨界指数で表現される。各れも回路方程式より現象論的な解釈がなされた。発振器の相転移において周期が秩序変数の役割を果すことは既に指摘されており, この例でもそれが確かめられた。又それが対数的な発散を示すことは始めて観測された例である。

§ 1. 序 論

ウィーンブリッジ発振器のような連続波発振器における相転移現象(発振-非発振転移)の研究は理論的にも実験的にも良く研究されており¹⁻⁶⁾ 確率過程の言葉でもってほぼ説明することができている。それに対して不連続発振器におけるそのような研究は, つい最近著者によって一つの例⁷⁾ が指摘されたのみで, 理論的な研究はもちろん実験的なデータの蓄積もほとんど無いと言ってよからう。

7)で指摘されたように, 不連続波発振器における臨界現象は従来知られているものとは一風変わった性格-秩序変数が時間(周期)である-を有している。このことは, そのような発振器に関して特徴的なのかどうかは実際にあたってみる他ないだろう。そのような観点で各種の不連続波発振器に臨界現象を誘起させ, その挙動を調べてみた。その結果, 発振周期が一般的に秩序変数としての性格を有することがはっきりしてきた。この小論はそのような一連の実験の一部である。7)においてはブロッキング発振器に“無理矢理”に臨界現象を誘起させた。ここでは同じく“強引”な方法でマルチバイブレーターに臨界現象を発生させた。やはり周期が秩序変数として振舞い, その臨界揺動も観測された。解析は回路方程式より現象論的な段階で行なわれており, 不充分

ではあるが予備的な結果と言うことで御了承頂ければ幸いである。次節においては回路の説明と周期の導入を行ない、§3で実験結果を説明する。なおそこでは周期の揺ぎについての定性的な説明が与えられる。§4では本実験で観測された臨界現象の特徴をまとめておく。

§2. 回路とその動作

図1に実験に用いたマルチバイブレータの回路を示す。マルチバイブレータとしては変った回路であるので簡単に動作を説明しておこう。先ず可変抵抗、 R は接続されていない場合について考える。初期状態として C には電荷はないとする。従って反転入力電圧、 $V_- = 0V$ である。 $V_+ = 0V$ であれば何事も起らないが、揺ぎの為わずかに正になったとしよう（負になっても話は全く同等である）。オペアンプ、741の開放利得を ∞ とすると出力電圧 V_0 は飽和出力、 V_S （～電源電圧、15V）となる。この時 $V_+ = R_2 V / (R_1 + R_2)$ となる。 V_- は r を通しての C の充電により $V_- = V_S (1 - e^{-t/Cr})$ に従って上昇を始める。この値が先程の V_+ を越した時点で V_0 は $-V_S$ に反転する。以後同様な経過を繰り返し、発振が持続する。そうなる時間、 t は従って次式で与えられる。

$$V_S (1 - e^{-t/Cr}) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S. \quad (1)$$

発振周期、 T_p は(1)で与えられる t の2倍の値であるから、

$$T_p = 2Cr \ln \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (2)$$

各バイアス、 V_- 、 V_+ 、及び V_0 の時間経過は図2に示してある。次に図1のように R を持続した時のことを考えよう。この際変るのは V_- の時間変化が $R V_S (1 - e^{-t/Cr}) / (R + r)$ になるだけのことであるから、周期を決める(1)式は次のように変形される。

$$\frac{R}{R + r} V_S (1 - e^{-t/Cr}) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S. \quad (3)$$

これより T_p を求めると、

$$T_p = 2Cr \ln \frac{R(R_1 + R_2)}{R R_1 - R_2 r}. \quad (4)$$

$T_p (> 0)$ が存在する為には、 $R(R_1 + R_2) > R R_1 - R_2 r$ 、及び $R R_1 - R_2 r > 0$ なる2つの条件

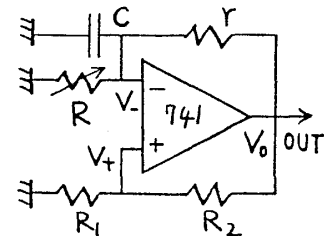


図1. 実験に用いたマルチバイブレータの回路。 $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 75 \text{ k}\Omega$, $r = 51 \text{ k}\Omega$ として $C = 0.1 \mu\text{F}$ 。オペアンプは741である。 R は回路に相転移を起す為に取り付けられた可変抵抗。

の成り立つことが必要である。第1の条件はいつでも成立しているが、第2の条件は R にある臨界値、 R_c のあることを示している。即ち

$$R_c R_1 - R_2 r = 0,$$

あるいは、

$$R_c = \frac{R_2}{R_1} r. \quad (5)$$

即ち $R < R_c$ では T_p は存在せず、この条件では発振を停止するだろう。(5)式を用いて(4)を書き直すと、

$$\begin{aligned} T_p &= 2Cr \ln \frac{R(R_1 + R_2)}{R_1(R - R_c)}, \\ &= 2Cr \ln \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - 2Cr \ln \frac{R - R_c}{R} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで制御変数として $(R - R_c)/R = \beta$ を導入し、更に R_1 、 R_2 、 C 及び r に具体的な値を代入してやると(6)式は次のようになる。

$$T_p = 0.7 - 10 \ln \beta \text{ (msec)}. \quad (7)$$

即ち T_p は β に対して対数的発散を示すことが予想される。又 R_c については $3.83 \text{ k}\Omega$ と求められる。

§ 3. 実験結果

§ 2で解析されたように $R < R_c$ では発振は停止する。但し R_c の値としては予想された値とは異なり、 $3.942 \text{ k}\Omega$ であった。その差は§ 2での計算で無視された部分が効いているのであろう。今後はこの値を R_c とする。発振振巾とデューティ比は 26 V 及び 0.5 であり、 $R_c \sim \infty$ の間でほとんど R によらない。従ってこの場合にも振巾は秩序変数にはなり得ない。7)の場合と同様である。そしてこれも7)の場合と同様、発振周期、 T_p がそのような性格をもつことになる。図3に T_p の β 依存性を示す。 β は先に述べた如く制御変数で $\beta = (R - R_c)/R_c$ である。但しこの制御変数の設定の仕方は7)とは少し異なっている。図3から $T_p = 1.0 - 0.66 \ln \beta \text{ (msec)}$ と求められる。残念ながら§ 2での解析から予想される係数とはかなり異なるが、 β に対して対数発散を示すことは定性的に説明している。 T_p が転移点、 R_c を含む関数で記述されていると言う意味でこれを臨界現象的な振舞いと呼んでいいだろう。発振器での相転移現象で、このよ

マルチバイブレータにおける臨界現象

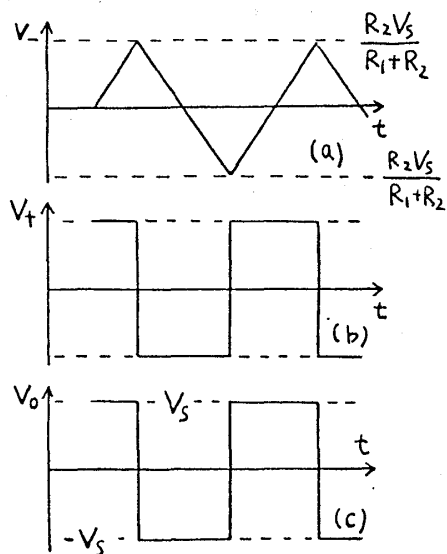


図2. V_- 、 V_+ 及び V_0 の時間変化を(a)、(b)及び(c)の順に示す。発振の原理を説明している。但し $R = \infty$ 。

森本安夫

うな対数的発散が示されたのは、これが初めての例である。

秩序変数の臨界揺動に対応する T_p の揺ぎはこの実験でも観測された。その表われ方や、定義の仕方は7)の場合と同様である。それを δT_p (分散相当量)と名付けよう。 $\beta \leq 0.1$ 付近より観測にかかり始める。 $\delta T_p - \beta$ の関係は図4に示してある。明らかに $\delta T_p \propto \beta^{-1.0}$ であり-1と言う臨界指数で表現されることが解る。 δT_p の β -依存性は現象論的にはあるが次のように説明できる。 C に貯えられた電荷に熱的な揺ぎを考えると、それは V_- に揺ぎを与えることになる(抵抗での熱雑音を考えてもよいが、 V_+ 及び V_- で互いに打ち消す可能性があり、 C 上の電荷の揺ぎの方が妥当であろう)。その分散を ΔV とすれば、 T_p を決定する式(3)は次のように変形される。

$$\frac{R}{R+r} V_S (1 - e^{-\frac{t}{Cr}}) \pm \Delta V = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S. \quad (8)$$

これを解けば2つの T_p の値、 T_{p+} 及び T_{p-} が得られ

る。各々は $+\Delta V$ 及び $-\Delta V$ に揺いだ時の T_p である。 δT_p の定義は $\delta T_p \simeq |T_{p+} - T_{p-}|$ としてよいだろう。(8)より

$$T_{p\pm} = -2Cr \ln \frac{R_2 \beta}{R_1 + R_2} - 2Cr \ln \left\{ 1 \pm \frac{(R+r)(R_1 + R_2)}{R_1 R} \frac{\Delta V}{V_S} \beta^{-1} \right\}. \quad (9)$$

一方揺ぎが観測にかかるのは $\beta < 0.1$ の領域である。 β の定義より $R = R_c / (1 - \beta)$ 。従って $\beta < 0.1$ に対しては $R \simeq R_c$ となる。但し $R - R_c$ の形で残るものは β としてそのまま残しておく。

(9)式より

$$\begin{aligned} \delta T_p &= |T_{p+} - T_{p-}| \\ &= 2Cr \left| \ln \left\{ 1 + \frac{(R_1 + R_2)(R_c + r)}{R_1 R_c} \frac{\Delta V}{V_S} \beta^{-1} \right\} - \ln \left\{ 1 - \frac{(R_1 + R_2)(R_c + r)}{R_1 R_2} \frac{\Delta V}{V_S} \beta^{-1} \right\} \right|. \end{aligned}$$

ΔV は熱的揺ぎであるから充分小さいとして、 $\ln(1+x) \simeq x$, $x \ll 1$ なる近似を用いると、上式は次のようになる。

図3. T_p の β -依存性。

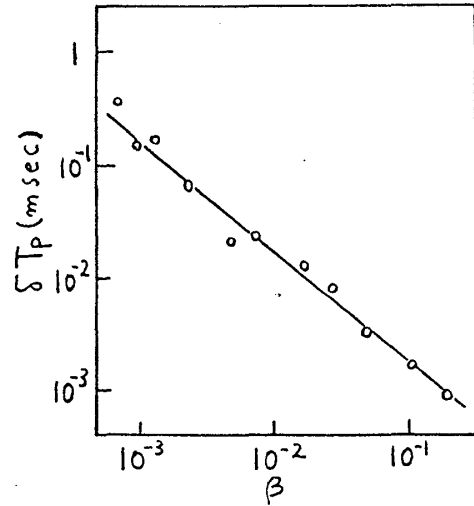


図4. δT_p の β -依存性。

$$\begin{aligned}\delta T_p &\simeq \frac{4Cr}{R_1 R_c} (R_c + r)(R_1 + R_2) \frac{\Delta V}{V_S} \beta^{-1}, \\ &\propto \beta^{-1},\end{aligned}\tag{10}$$

即ち $\delta T_p \propto \beta^{-1.0}$ と言う結果を再現する。

§ 4. 議論とまとめ

以上でみたようにマルチバイブレータにおいても、ブロッキング発振器⁷⁾と同様な方法で発振-非発振転移に伴う臨界現象を誘起することができた。以下で特長的な点を拾い出し、7)の場合と対比させてまとめてみることにする。先ず第1に秩序変数が T_p であること。このことは不連続発振器においては一般的なことではないかと思われる節がある。後に発表する予定の論文についても述べる予定である。第2に秩序変数が対数的発散を示すことである。従来発表された発振器での臨界現象は、すべて臨界指数で表現されており、対数的発散の例が見出されたのはこれが始めてである。第3に7)の例では正常な動作時(揺ぎがほとんどない)の T_p から余分に増加した分、 ΔT_p が秩序変数として表われたが、この場合には T_p そのものが秩序変数になっている。このことと関連するが第4点として7)の例では ΔT_p や δT_p なる臨界現象を示す量が不安定領域で発生したが、この例ではそのような領域はなく、 T_p は全領域 ($R_c \sim \infty$) で対数的依存性を示すことが挙げられる。一方揺ぎ、 δT_p も観測にかかるのは $\beta < 0.1$ の領域ではあるが、それは単に観測にかかる大きさになるのが、そのような β の値であると言うにすぎない。7)では臨界現象がトランジスタの不安定性に由来しているのに対して、この場合にはそのようなアクティブな素子の不安定性によるものではないからである。最後に第5の点として臨界揺動である δT_p が C での電荷の熱的な雑音によるものとして定性的な解析がなされ、実験結果を一応説明することができた。7)での例のように臨界現象がトランジスタ等の不安定性(例えば h -パラメーター等の揺ぎ)に求められない以上、そのような原因にその理由を求めざるを得ないであろう。

この他不連続発振器は T_p に関して種々の臨界現象を示しており、連続波発振器におけるそれよりも豊富な内容を含んでいるようである。今後それらのデータを発表してゆく予定である。理論に関するコメントが頂ければ幸いである。

参 考 文 献

- 1) T. Kawakubo and S. Kabashima, J. Phys. Soc. Jpn. 37 (1974) 1199.
- 2) S. Kabashima, T. Itsumi, T. Kawakubo and T. Nagashima, J. Phys. Soc. Jpn. 39 (1975) 1183.

森本安夫

- 3) P. M. Horn, T. Carruthers and M. T. Long, Phys. Rev. A14 (1976) 833.
- 4) M. Agu and Y. Teramachi, J. Phys. Soc. Jpn. 40 (1976) 636.
- 5) S. Kabashima, S. Kogure, T. Kawakubo and T. Okada, J. Appl. Phys. 50 (1979) 6296.
- 6) K. Harada, S. Kuhara and K. Hirakawa, J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 2450.
- 7) 森本, 物性研究, 38 (1982) No. 4,