

## TASOEV型連分数の有理近似

弘前大学・理工学部 小松 尚夫 (TAKAO KOMATSU)  
FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,  
HIROSAKI UNIVERSITY

### 1. 序論

Hurwitz連分数は

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, \overline{Q_1(k), \dots, Q_p(k)}]_{k=1}^{\infty} \\ = [a_0; a_1, \dots, a_n, Q_1(1), \dots, Q_p(1), Q_1(2), \dots, Q_p(2), Q_1(3), \dots]$$

という形をしている擬似周期的単純連分数である. ここで  $a_0$  は整数,  $a_1, \dots, a_n$  は正整数,  $Q_1, \dots, Q_p$  は有理係数多項式で,  $k = 1, 2, \dots$  に対して正整数値を取り, 少なくとも一つは定数ではない.

Tasoev連分数 ([8], [10]) も擬似周期的ではあるが,  $Q_j(k)$  が多項式ではなく  $k$  の指数である点で異なる. 筆者は[2]で, Tasoevが提唱したが間違いを含んでいた  $[0; \overbrace{a^k, \dots, a^k}]_{k=1}^{\infty}$  という連分数の閉じた形を正しく求め, また[3]においてある種の拡張形を見出した. すなわち,

$$[0; \overline{ua^k}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}},$$

$$[0; ua - 1, 1, \overline{ua^{k+1} - 2}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-2n-1} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-2n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}},$$

$$[0; \overline{ua^k, va^k}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}},$$

$$[0; ua - 1, 1, va - 2, 1, \overline{ua^{k+1} - 2, 1, va^{k+1} - 2}]_{k=1}^{\infty} \\ = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}$$

などを得た.

[4] では, ある種の周期3のTasoev 連分数が得られた. すなわち,

$$[0; \overline{ua^{2k-1} - 1, 1, va^{2k} - 1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - (-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - (-1)^i)^{-1}},$$

本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究(C)(2) 15540021の補助を受けた。

$$[0; \overline{ua^k - 1, 1, va^k - 1}]_{k=1}^\infty = \frac{\sum_{n=0}^\infty u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - (-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^\infty (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - (-1)^i)^{-1}}$$

などである.

[5] では, 別の種類の周期3のTasoev連分数が得られた. すなわち,

$$[0; \overline{ua^k - 1, 1, v - 1}]_{k=1}^\infty = \frac{\sum_{n=0}^\infty u^{-2n-1} v^{-2n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^\infty ((uv)^{-2n} a^{-n^2} - (uv)^{-2n-1} a^{-(n+1)^2}) \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}},$$

$$[0; \overline{v - 1, 1, ua^k - 1}]_{k=1}^\infty = \frac{\sum_{n=0}^\infty (u^{-2n} v^{-2n-1} a^{-n^2} + u^{-2n-1} v^{-2n-2} a^{-(n+1)^2}) \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^\infty (uv)^{-2n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}$$

などである. これらは $e$ のタイプのHurwitz連分数に対応するものと考えられる.

様々なHurwitz連分数の有理近似が多く著者によって考えられてきた. より一般のHurwitz連分数に対する結果として, Tasoev [10]は特に次の結果を得た.  $\alpha = [a_0; \overline{a_1, \dots, a_s, c_1 + kd_1, \dots, c_m + kd_m}]_{k=1}^\infty$  とする, ここで $a_0$ は整数で, それ以外の部分商はみな正整数値をとるものとする.  $\Omega(>0)$ を0でない $d_i$ の個数とし,  $d = \max_{1 \leq i \leq m} d_i$ とおく. このとき,  $C = \Omega/d$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon) \frac{\log \log q}{q^2 \log q}$$

が無限個の $p, q$ について成り立ち, 一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon) \frac{\log \log q}{q^2 \log q}$$

であるような正定数 $q_0$ が存在する.

Tasoevは指数の場合の結果も与えている. 整数 $a_0, a > 1, m > 1$ に対して  $\alpha = [a_0; \underbrace{a^k, \dots, a^k}_{m}]_{k=1}^\infty$  とおく. すると $C = 1/\sqrt{a}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / (m \log q)}}$$

が無限個の $p, q$ について成り立ち, 一方すべての整数 $p, q (\geq q_0)$ について

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / (m \log q)}}$$

であるような $a, m, \epsilon$ に依存する正定数 $q_0$ が存在する. 似たような結果は[9]にも見られるが, 残念ながら誤りも多く, 重要な結果とは思えない.

[4]で見られるように, Tasoev連分数のうちのあるタイプのは Rogers-Ramanujan連分数のうちのあるタイプのも的一致する. この観点から, Rogers-Ramanujan連分数の有理近似を考えてみることは有益であるが, 知られている結果は極めて少ない. 塩川[7]の有理近似の結果は希少価値がある.  $f(\alpha, x)$  を  $f(\alpha, x) = 1 + \frac{\alpha x}{1} + \frac{\alpha x^2}{1} + \frac{\alpha x^3}{1} + \dots$  によって定義される Rogers-Ramanujan連分数とする.  $a(\geq 2)$ ,  $b, d$  を  $\gcd(b, d) = 1$  である正整数とし,  $d$  は  $a$  を割り切るものとする. また,  $(d/b)^2 > a$  のとき  $C = \sqrt{b/d}$ , それ以外のとき  $C = \sqrt{d/(ab)}$  とおく. このとき, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して

$$\left| f\left(\frac{d}{b}, \frac{1}{a}\right) - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon)q^{-2-\sqrt{\log a/\log q}}$$

が無限個の  $p, q$  について成り立ち, 一方すべての整数  $p, q(\geq q_0)$  について

$$\left| f\left(\frac{d}{b}, \frac{1}{a}\right) - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon)q^{-2-\sqrt{\log a/\log q}}$$

であるような正整数  $q_0 = q_0(a, b, d, \epsilon)$  が存在する.  $f(d/b, 1/a) = [1; \overline{ba^k/d, a^k}]_{k=1}^\infty$  となつて, この Rogers-Ramanujan連分数は Tasoev 型の連分数に一致することに注意する.

この原稿では

$$\alpha = [b_0; b_1, \dots, b_s, \overline{u_1 a_1^k + v_1, \dots, u_m a_m^k + v_m}]_{k=1}^\infty$$

というタイプの一般的な Tasoev 型の連分数の有理近似を与える. ここで,  $b_0$  は整数,  $b_1, \dots, b_s$  は正整数,  $u_j a_j^k + v_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) は  $k = 1, 2, \dots$  に対して正整数値を取り,  $u_j$  のうち少なくとも一つは 0 でない.

## 2. 主結果

上述の実数  $\alpha$  は一般的な形をしてはいるが, 非循環部を取り除き,  $u_j = 0$  となる部分をまとめて

$$\alpha = [0; \overline{u_1 a_1^k + v_1, \dots, u_r a_r^k + v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+l}}]_{k=1}^\infty$$

という場合を考えれば十分である. ここで  $u_j > 0$  ( $1 \leq j \leq r$ ) で  $r+l = m$  である.

定理 1.  $A = a_1 \dots a_r$ ,  $U = \prod_{j=1}^r u_j$ ,  $V = \prod_{\nu=1}^l v_{r+\nu}$  とおく. このとき任意の  $\epsilon > 0$  に対して,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (1 + \epsilon)q^{-2-C^*}$$

が無限個の整数  $p, q$  について成り立ち, 一方すべての整数  $p, q(\geq q_0)$  について

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > (1 - \epsilon)q^{-2-C^*}$$

であるような  $a_j, u_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ),  $v_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ),  $\epsilon$  に依存する正定数  $q_0$  が存在する, ここで

$$C^* = \max_{1 \leq j \leq r} \left( \left( \log(u_j \sqrt{a_j}) - \frac{\log a_j \log(a_1 \dots a_{j-1} UV)}{\log A} \right) \frac{1}{\log q} + \frac{\sqrt{2} \log a_j}{\sqrt{\log A \cdot \log q}} \right).$$

注. (1) もし  $r = m$ ,  $u_j = 1$ ,  $a_j = a$ ,  $v_j = 0$  ( $1 \leq j \leq m$ ) ならば, 定理 1 は上記の Tasoev の近似の結果と一致する.

(2) もし  $r = m = 2$ ,  $u_1 = b/d$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ,  $v_1 = v_2 = 0$  ならば, 定理 1 は上記の 塩川 の近似の結果と一致する.

定理 1 は一見するとかなり複雑な形をしているが, 今までに知られている Tasoev 連分数に応用してみると割とすっきりした結果に落ち着く. 例として幾つか挙げよう.

例 1.

$$\alpha = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - (-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - (-1)^i)^{-1}} \\ = [0; ua^{2k-1} - 1, 1, va^{2k} - 1]_{k=1}^{\infty}$$

という Tasoev 連分数を考える. 定理 1 で  $r = 2$ ,  $l = 1$ ,  $a_1 = a_2 = a^2$ ,  $u_1 = u/a$ ,  $u_2 = v$ ,  $v_1 = v_2 = -1$ ,  $v_3 = 1$  とおく. また

$$C = \begin{cases} \sqrt{v/(ua)} & (u \geq v \text{ のとき}) \\ \sqrt{u/(va)} & (u < v \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする. このとき, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / \log q}}$$

が無数個の整数  $p, q$  について成り立ち, 一方すべての整数  $p, q (\geq q_0)$  について

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / \log q}}$$

であるような正定数  $q_0 = q_0(a, u, v, \epsilon)$  が存在する.

例 2.

$$\beta = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} v^{-2n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} ((uv)^{-2n} a^{-n^2} - (uv)^{-2n-1} a^{-(n+1)^2}) \prod_{i=1}^n (a^{2i} - 1)^{-1}} \\ = [0; ua^k - 1, 1, v - 1]_{k=1}^{\infty}$$

という Tasoev 連分数を考える. 定理 1 で  $r = 1$ ,  $l = 2$ ,  $a_1 = a$ ,  $u_1 = u$ ,  $v_1 = -1$ ,  $v_2 = 1$ ,  $v_3 = v - 1$  とおく. このとき, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| < \left( \frac{v-1}{\sqrt{a}} + \epsilon \right) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / \log q}}$$

が無数個の整数  $p, q$  について成り立ち, 一方すべての整数  $p, q (\geq q_0)$  について

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| > \left( \frac{v-1}{\sqrt{a}} - \epsilon \right) q^{-2 - \sqrt{2 \log a / \log q}}$$

であるような正定数  $q_0 = q_0(a, u, v, \epsilon)$  が存在する.

例 3.

$$\begin{aligned}\gamma &= [0; \overline{ua^k, va^k}]_{k=1}^\infty \\ &= \frac{\sum_{n=0}^\infty u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}{\sum_{n=0}^\infty u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^n (a^i - 1)^{-1}}\end{aligned}$$

というTasoev連分数を考える. 定理 1 で  $r = 2$ ,  $l = 0$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$  とおく. また

$$C = \begin{cases} \sqrt{v/(ua)} & (v/u \leq \sqrt{a} \text{ のとき}) \\ \sqrt{u/v} & (v/u > \sqrt{a} \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする. このとき, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| < (C + \epsilon) q^{-2 - \sqrt{\log a / \log q}}$$

が無限個の整数  $p, q$  について成り立ち, 一方すべての整数  $p, q (\geq q_0)$  について

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| > (C - \epsilon) q^{-2 - \sqrt{\log a / \log q}}$$

であるような正定数  $q_0 = q_0(a, u, v, \epsilon)$  が存在する.

$\gamma$  の代わりに,  $[0; ua - 1, 1, va - 2, 1, \overline{ua^{k+1} - 2, 1, va^{k+1} - 2}]_{k=1}^\infty$  や  $[0; \overline{ua^k - 1, 1, va^k - 1}]_{k=1}^\infty$  などのTasoev型連分数を考えても, これと同じ結果となる.

### 3. 定理 1 の証明

定理の証明には次が必要である.

**補題 1.**  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  をある連分数, その近似分数を  $p_n/q_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) とする. もし  $\sum_{n=1}^\infty (a_n a_{n+1})^{-1} < \infty$  ならば,  $q_n / (a_1 a_2 \cdots a_n)$  は  $n \rightarrow \infty$  で, ある有限な 0 でない極限に収束する.

**証明** ([6], Lemma 1). 定義により

$$q_1 = a_1, \quad q_2 = a_1 a_2 \left( 1 + \frac{1}{a_1 a_2} \right),$$

$$\begin{aligned}q_3 &= a_1 a_2 a_3 \left( 1 + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( 1 + \frac{1}{a_2 a_3} \left( 1 + \frac{1}{a_1 a_2} \right)^{-1} \right) \\ &= a_1 a_2 a_3 \left( 1 + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( 1 + \frac{t_2}{a_2 a_3} \right)\end{aligned}$$

が  $1/2 \leq t_2 < 1$  である  $t_2$  について成り立つ. 同様に

$$q_n = a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{t_j}{a_j a_{j+1}} \right)$$

が  $1/2 < t_j < 1$  である  $t_j$  ( $3 \leq j \leq n-1$ ) について成り立つ. よって,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n a_{n+1})^{-1} < \infty$  ならば,  $q_n/(a_1 a_2 \cdots a_n)$  は  $n \rightarrow \infty$  で, ある有限な 0 でない極限に収束する.

定理 1 の証明.  $n = (k-1)m$  のとき,  $a_{n+1} = u_1 a_1^k + v_1$  かつ

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^r (u_j a_j^i + v_j) \cdot \prod_{\nu=1}^l v_{r+\nu}^{k-1}$$

を得る. 補題 1 より

$$\begin{aligned} \log q_n &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^r \log(u_j a_j^i + v_j) + \sum_{\nu=1}^l \log v_{r+\nu}^{k-1} + O(1) \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \log A + (k-1) \log(UV) + O(1) \\ &= \left(k - \frac{1}{2} + \frac{\log(UV)}{\log A}\right)^2 \frac{\log A}{2} + O(1) \end{aligned}$$

であるから,

$$k \sim \frac{1}{2} - \frac{\log(UV)}{\log A} + \sqrt{\frac{2 \log q_n}{\log A}}$$

となる. よく知られているように,

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})q_n} < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$$

である, ここで  $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \dots]$ . 従って,

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| &\sim \frac{1}{u_1 q_n^{k \log a_1 / \log q_n} q_n^2} \\ &\sim q_n^{-2 - \left( \log(u_1 \sqrt{a_1}) - \frac{\log a_1 \log(UV)}{\log A} \right) \frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2} \log a_1}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}} \end{aligned}$$

を得る.  $n = (k-1)m + 1$  のとき,  $a_{n+1} = u_2 a_2^k + v_2$  かつ

$$a_1 a_2 \cdots a_n = (u_1 a_1^k + v_1) \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^r (u_j a_j^i + v_j) \cdot \prod_{\nu=1}^l v_{r+\nu}^{k-1}$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned} \log q_n &= \log(u_1 a_1^k + v_1) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^r \log(u_j a_j^i + v_j) + \sum_{\nu=1}^l \log v_{r+\nu}^{k-1} + O(1) \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \log A + (k-1) \log(UV) + k \log a_1 + \log u_1 + O(1) \\ &= \left(k - \frac{1}{2} + \frac{\log(a_1 UV)}{\log A}\right)^2 \frac{\log A}{2} + O(1) \end{aligned}$$

であるから,

$$k \sim \frac{1}{2} - \frac{\log(a_1 UV)}{\log A} + \sqrt{\frac{2 \log q_n}{\log A}}$$

が得られる. 従って,

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| &\sim \frac{1}{u_2 q_n^{k \log a_2 / \log q_n} q_n^2} \\ &\sim q_n^{-2 - \left( \log(u_2 \sqrt{a_2}) - \frac{\log a_2 \log(a_1 UV)}{\log A} \right) \frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2} \log a_2}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}} \end{aligned}$$

を得る. 同様に,  $n = (k-1)m + (j-1)$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ )のとき,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \sim q_n^{-2 - \left( \log(u_j \sqrt{a_j}) - \frac{\log a_j \log(a_1 \dots a_{j-1} UV)}{\log A} \right) \frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2} \log a_j}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}}$$

を得る. 他方,  $n = (k-1)m + (r-1+\nu)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, l$ )のとき,

$$\frac{1}{(v_{r+\nu} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{v_{r+\nu}q_n^2}$$

を得る.

## REFERENCES

- [1] W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued Fractions: Analytic theory and applications*, (Encyclopedia of mathematics and its applications; vol. 11), Addison-Wesley, Reading, 1980.
- [2] T. Komatsu, *On Tasoiev's continued fractions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **134** (2003), 1-12.
- [3] T. Komatsu, *On Hurwitzian and Tasoiev's continued fractions*, Acta Arith. **107** (2003), 161-177.
- [4] T. Komatsu, *Tasoiev's continued fractions and Rogers-Ramanujan continued fractions*, J. Number Theory **109** (2004), 27-40.
- [5] T. Komatsu, *Hurwitz and Tasoiev continued fractions*, Monatsh. Math. (2004), DOI 10.1007/s00605-004-0281-0 (online).
- [6] I. Shiokawa, *Rational approximations to the values of certain hypergeometric functions*, Number Theory and Combinatorics, Japan 1984 (J. Akiyama et. al., eds.), World Sci. Publ. Co., Singapore, 1985, pp. 353-367.
- [7] I. Shiokawa, *Rational approximations to the Rogers-Ramanujan continued fraction*, Acta Arith. **50** (1988), 23-30.
- [8] B. G. Tasoiev, *Certain problems in the theory of continued fractions*, Trudy Tbiliss. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **16/17** (1984), 53-83. (Russian)
- [9] B. G. Tasoiev, *Rational approximations to some infinite continued fractions*, Trudy Tbiliss. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **24** (1988), 104-138. (Russian)
- [10] B. G. Tasoiev, *Rational approximations to certain numbers*, Mat. Zametki **67** (2000), 931-937; English transl. in Math. Notes **67** (2000), 786-791.

TAKAO KOMATSU  
FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY  
HIROSAKI UNIVERSITY  
HIROSAKI, 036-8561  
JAPAN  
komatsu@cc.hirosaki-u.ac.jp