

プラズマに於る最近の話題

天 野 恒 雄

§ 4. Collisionless ドリフト波と Landau Damping

この節では、温度が十分に高く平均自由行程が長く衝突なしとみなしうるプラズマの場合のドリフト波不安定性について述べよう、出発式は衝突項なしの Boltzmann 方程式と Maxwell 方程式である：

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_j + \frac{e_j}{m_j} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_j = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_j e_j \int f_j d^3v \quad (4.2)$$

$$f_j = f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

ここで、 j は e と i を表わし、 $\mathbf{B}_0$ は静磁場である。静電波近似を用いるので摂動の磁場は零である。この近似の妥当性については後で述べる。 $f = f_0 + f_1$, $f_1 \ll f_0$ とし、 $\mathbf{E}$ は 1 次として線形化しこの結果の方程式を荷電粒子の軌道が $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ で定義されているときこの軌道にそって見た分布関数の時間変化は、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

である。粒子の零次の軌道は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mC} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0. \quad (4.3)$$

で支えられる。従って零次の軌道にそった f_j の時間変化は

$$\left(\frac{df_j}{dt} \right)_0 = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_j}{m_j C} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} \quad (4.4)$$

天野恒雄

(4.1) の零次は

$$\left(\frac{df_{j0}}{dt}\right)_0 = 0$$

である。この解として

$$f_{0j} = n_0 \left(\frac{m_j}{2\pi T_j}\right)^{2/3} \left(1 + \varepsilon \left(x + \frac{v_j}{\Omega_j}\right)\right) \exp\left(-\frac{m_j^2}{2T_j}\right) \quad (4.5)$$

の形にとろう。これが $(df_{j0}/dt)_0 = 0$ をみたすことは、直接代入して確かめられるが、 v^2 , $x + v_y/\Omega$ がそれぞれ、零次の軌道にそった運動の恒量、エネルギー、 y 方向の正準角運動量に比例することからも明らかである。 ε は、 $1/n \, dn/dx$ を表わす

f_{1j} のみたす式は、

$$\left(\frac{df_{1j}}{dt}\right)_0 = -\frac{e_j}{m_j} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{0j}, \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_j e_j \int f_{1j} d^3v. \quad (4.7)$$

ここで、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\nabla \phi(\lambda) e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t}$ とおき、

$$f_{1j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t=0) = \frac{e_j}{m_j} \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega t} \nabla \phi(x') e^{ik_y y' + ik_z z'} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{0j} \quad (4.8)$$

ここで、 t についての積分は、零次の軌道 (4.3) にそった積分である。

この軌道は

$$v'_x = v_{\perp} \cos(\theta - \Omega t), \quad v'_y = v_{\perp} \sin(\theta - \Omega t)$$

$$v'_z = v_z,$$

$$x' = x + [\sin \theta - \sin(\theta - \Omega t)] v_{\perp} / \Omega,$$

$$y' = y - [\cos \theta - \cos(\theta - \Omega t)] v_{\perp} / \Omega,$$

$$z' = z + v_z t,$$

の Larmor 回転で与えられる。ただし、 $v_{\perp} = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$, $\tan \theta =$

$$v_y/v_x,$$

(4.8) の積分の integrand は, $\epsilon \ll 1$ として

$$\nabla \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_{0j} = -\frac{m_j}{T_j} \left\{ \frac{d\phi}{dt} - i\omega \left(1 - \frac{\omega_j^*}{\omega}\right) \phi \right\} f_{0j},$$

ここに, $\omega_j = k_y \epsilon T_j / m_j \Omega_j$ はドリフト周波数である。また,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \frac{d\phi}{dt} - i\omega \phi$$

の關係を用いた。この式を (4.8) にいれて, f_{1j} を求め, Poisson 方程式にいれて,

$$\begin{aligned} - (k_y^2 + k_z^2 - \frac{d^2}{dx^2}) \phi(x) &= \phi(x) \sum_j \frac{4\pi n_0 e_j^i}{T_j} \\ &+ \sum_j \frac{4\pi e_j^2}{T_j} i\omega \left(1 - \frac{\omega_j^*}{\omega}\right) \int d^3v f_{0j} \int_{-\infty}^0 \phi(x') e^{ik_y y' + ik_z z' - i\omega t} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで, $\phi(x') \propto \exp \{ i \int_{x'}^{x''} k_x(x'') \omega dx'' \}$ とおく, これから,

$$\begin{aligned} \phi(x') &= \phi(x) \exp \left\{ i \int_x^{x'} k_x(x'') \omega dx'' \right\} \\ &\approx \phi(x) e^{ik_x(x'-x)} \left(1 + \frac{1}{2} (x'-x)^2 k_x^1(x) + \dots \right) \end{aligned}$$

いま, (4.10) の積分は, Larmor 回転についての積分であるから

$|x'-x| \leq \rho_i$ (ρ_i はイオンの Larmor 半径) である。そこで, 上式の右辺第2項は

$$\rho_i^2 \frac{dk_x}{dx} \ll 1 \quad (4.11)$$

のときに無視できる。次の積分 S を計算する

$$S = \int d^3v f_{0j} \int_{-\infty}^0 dt e^{ik_\lambda(x)(x'-x) + ik_y y' + ik_z z' - i\omega t}$$

x', y', z' に零次の軌道 (4.9) を代入して

$$S = \int d^3 v f_{0j} \int_{-\infty}^0 e^{ik_y y + ik_z z} \cdot e^{-\frac{ik_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \sin(\theta - \sigma - \Omega t) + \frac{ik_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \sin(\theta - \sigma)}$$

$$\sigma = \tan^{-1} k_y / k_x$$

ここで

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}$$

の展開を用い，時間積分を行ったのちに $v_{\perp}$ について積分して

$$S = n_0 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{-b_j} J_{\ell}(b_j) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\frac{mv_z^2}{2T}) dv_z}{i(\omega - \ell \Omega - k_z v_z)}$$

$$b_j = \frac{k_{\perp}^2 T_j}{m_j \Omega_j^2} = \frac{k_{\perp}^2 \rho_j^2}{2}$$

上で

$$\int J_{\ell}^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) e^{-\frac{mv^2}{2T}} v_{\perp} dv_{\perp} = \frac{T}{m} I_{\ell}(b) e^{-b}$$

の積分公式を使った， I_{ℓ} は第一種変形 Bessel 函数である。

$\omega \ll \Omega_i$ (イオンサイクロトロン周波数) の波を考えるとときには， S で $\ell=0$ の項をとれば十分である。分母が零になるところは， $t \rightarrow -\infty$ で $e^{-i\omega t}$ が零になるようにつけ加えた ω の正の infinitesimal の imaginary part で処理することにする。この手続は通常の Landau の解析接続の方法と等価である。プラズマ dispersion function

$$\begin{aligned} Y(z) &= \lim_{\nu \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{z - x + i\nu} \\ &= 2e^{-z^2} \int_0^z e^{-t^2} dt - i\sqrt{\pi} e^{-z^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

を用い, また $k^2 \lambda_D^2 \ll 1$ ($\lambda_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}$; Debye 半径) として最終的な分散式は次のように求められる。

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = \phi(x) \left\{ \sum_j \frac{1}{\lambda_{Dj}^2} + \sum_j \frac{4\pi n_0 e_j^2}{T_j} e^{-b_j} I_0(b_j) \frac{\omega - \omega_j^*}{k_z \bar{v}_z} \right\} \quad (4.13)$$

ここで $\bar{v}$ は熱速度である。この方程式は, $\{ \quad \}$ をポテンシャルとするような $\phi(x)$ に対する波動方程式である。この式を, d^2/dx^2 の項を無視する近似, local approximation で解こう。この場合, 分散式はポテンシャルが turning points をもつ条件を求めることに対応している。このような近似は, 後で述べるような磁場が非一様である場合を除いて十分によい ω の近似を与えることが確かめられている。¹⁴⁾

$T_i = T_e = T$, $b_i \ll 1$ とし, $Y(z)$ に対しては, 次のような近似を用いる。

$$R_e Y(z) \simeq 2z + \dots \quad (z \ll 1)$$

$$R_e Y(z) \simeq \frac{1}{z} + \dots \quad (z \gg 1)$$

$$\text{また } I_0(b) e^{-b} \simeq 1 - b$$

(i) $\bar{v}_i \ll \omega/k_z \ll \bar{v}_e$ の場合, 分散式は次のようになる。

$$1 + k_\perp^2 \rho_i^2 + \frac{\omega^*}{\omega} + i \sqrt{\pi} \sum_j \left\{ \frac{\omega}{k_z \bar{v}_z} \left(1 + \frac{\omega^*}{\omega} \right) \exp \left[- \left(\frac{\omega}{k_z \bar{v}_z} \right)^2 \right] \right\}_j = 0 \quad (4.14)$$

ここに, $\omega^* = \omega_2^* = -\omega_e^*$

天野恒雄

これから, $\omega = \omega_r + i r$ ($r \ll \omega_r$) として

$$\omega_r = -\omega^*/(1+k_{\perp}^2 \rho_i^2) \quad (4.15)$$

$$r = \frac{\sqrt{\pi} \omega^{*2}}{k_z \bar{v}_e} k_{\perp}^2 \rho_i^2 \exp \left[-\left(\frac{\omega_r}{k_z \bar{v}_e} \right)^2 \right] \\ - 2 \frac{\sqrt{\pi} \omega^{*2}}{k_z \bar{v}_i} \exp \left[-\left(\frac{\omega_r}{k_z \bar{v}_i} \right)^2 \right]$$

上の式から明らかなように, 電子の Landau damping は不安定に, イオンの Landau damping は安定に寄与する, $\bar{v}_i \ll \omega_r/k_z \ll \bar{v}_e$ のときには, exponential のファクターで電子の寄与が圧倒的になり, 不安定になる。しかし, $\omega/k_z \sim \bar{v}_i$ のときには, イオンの寄与が電子の寄与をしのいで安定になる。そこで, Drift 不安定を安定化する方法は, k_z を大きくすることである。これは, 後で述べる shear による安定化を導く

(ii) $\omega/k_z \ll \bar{v}_i$ のとき, 容易に判るように, この場合には常に安定になる。

(iii) $\omega/k_z \gg \bar{v}_e$ のとき, この場合, 不安定は, Landau damping に起因するのではなく, 流体的不安定が起る。分散式は,

$$\frac{\omega + \omega^*}{\omega - \omega^*} = \frac{2\omega^2 b}{k_z^2 v_e^2} = \frac{\omega^2}{\omega_z^2} \quad (4.16) \\ \omega_z^2 = \Omega_i \Omega_e \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2}$$

の3次式になる。 $\omega^*/\omega_z > 0.4$ に対して, 複素根が現われ, 対応する成長率は ω^* の程度になる。しかし, 実際的には $\omega/k_z \gg \bar{v}_e$ をみたすような小さな k_z を実現することはむづかしいので, この不安定はあまり問題にならない。

$k \rho_i \ll 1$ でない場合, $\bar{v}_i \ll \omega/k_z \ll \bar{v}_e$ のときには

$$\omega = -\omega^* \frac{\beta_s}{2-\beta_s}, \quad r = 2\sqrt{\pi} \frac{\omega^{2*} \beta_s (1-\beta_s)}{k_z \bar{v}_e (2-\beta_s)^2} \quad (4.17)$$

ここに $\beta_s = e^{-b} I_0(b)$

成長率 r は, $k_z \bar{v}_e \sim \omega^*$, $\beta_s \sim 2/3$ で, ω^* の程度になる。

ここで, いままで使ってきた静電波近似の妥当性について述べよう。よく知られているように, $\omega \ll \omega_{oi}$ の場合のプラズマ中の波としては, 縦波のイオン音波と横波の Alfvén 波, あるいは両者の Couple した波が存在する。静電ドリフト波は, イオン音波の一種である。そこで, 一般には, 純粹の縦波 (静電波) のドリフト波は存在せず, 横波の Alfvén 波の couple した波になる。しかし, $\bar{v}_i \ll \omega/k_z \ll \bar{v}_e$ の波を考える場合には, もし Alfvén 速度 $v_A = B/\sqrt{4\pi n m}$ が, $v_A \gg \bar{v}_e$ をみたすときには, この coupling は無視できて純粹の縦波になる, $v_A \gg \bar{v}_e$ の条件は書きかえると, $\beta = 8\pi\rho/B^2$ (プラズマの圧力と磁気圧の比) $\ll m_e/M_i$ になる, m_e と M_i はそれぞれ, 電子とイオンの質量である。現在のドリフト波の実験では, $\beta \sim 10^{-5}$ 程度である。 $\frac{m}{M} < \beta \ll 1$ の場合のドリフト波不安定性の計算もいくつか行われている。¹²⁾

いままでの計算では温度の勾配 $dT/dx = 0$ とした, dT/dx の効果を計算にいれることはそれほど面倒ではない。¹⁴⁾ 小さな dT/dx の場合には, いままでの結果はほとんど変らない。 $d \ln T / d \ln n > 2$ をみたすような大きな dT/dx があるときは, $\omega/k_z \ll \bar{v}_i$ の波が不安定になることが判っている。この場合, shear によって安定化できない。

§ 5. Normal Mode と Quasi Mode

前節で求めたドリフト波の従う波動方程式は, 一般に

$$d^2 \phi(z) / dz^2 - V(k, \omega, z) \phi(z) = 0 \quad (5.1)$$

の形の微分方程式である。境界条件は, z の実軸にそって $z \rightarrow \pm\infty$ に対して $\phi(z) \rightarrow 0$ ととろう。この方程式は, ポテンシャルの井戸のなかの粒子に対する Schrödinger 方程式と同じ形をしている。もし, $V(z)$ が実の函数で

天野恒雄

あり、 z とともにあまり急速に変化しないときは、よく知られているように次のような方法を用いることができる。いま、 $z_1 < z < z_2$ で $V(z) < 0$ 、外側で $V(z) > 0$ とすると、 z_1 と z_2 の間で振動し、外側では指数的におちる (5.1) の解が次の量子化条件をみたすときに存在する

$$\int_{z_1}^z [-V(z, \omega)]^{1/2} dz = (N + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2}, \quad N=0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

この条件から固有値が定まる。

$V(z)$ が複素函数であるときは、 $V(z)$ の零点は、一般には複素の z_1 , z_2 にある。この z_1 , z_2 に対して、条件 (5.2) がみたされると z_1 , z_2 を結ぶ線上で振動的、外側のある領域内で指数的に減小する解が存在する。しかし、この解を実軸まで解析的につないで実軸上の $z \rightarrow \pm\infty$ で指数的に減小する解を作ることは一般にはできない。なぜなら、いわゆる Stokes phenomena が起ってある境界線をこえると解の漸近的な形が変わるからである。この境界線は、turning point z_1 (or z_2) から出発する次に定義される Anti-Stokes line

$$\int_{z_1 \text{ (or } z_2)}^z [-V(z')]^{1/2} dz' = \text{real quantity} \quad (5.3)$$

で定まる。これは解の漸近形が $e^{\pm i \int \sqrt{-V(z)} dz}$ 書かれることから明らかである。

そこで、(5.1) が z の実軸にそって、 $|z| \rightarrow \infty$, $\phi(z) \rightarrow 0$ の解をもつためには、次の条件が必要である。まず、複素の $V(z)$ が turning points をもって量子化条件 (5.2) をみたし、かつ turning points から出発する Anti-Stokes line が z の実軸を切ることが必要である。さらに系が不安定であるためには、量子化条件から定まる ω の虚数部が正でなければならない。このようにしてえられた系の固有解は Normal modes の解とよばれている。

この方法は、磁場が一様でなく shear がある場合の安定化の作用を調べるために用いられた。いま、次のような磁場を考える。

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{i}_z + B_0 s x \mathbf{i}_y \quad (5.4)$$

ここで, $s x \ll 1$ とする。これは, Fig. 1 のように x とともに磁力線の傾きが変わるような, shear の磁場を表わしている, この shear の効果は, いままでの formulation で k_z を次の $k_{\parallel}$ のようにおきかえてとりいれることができる

$$k_{\parallel} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}}{B} = \frac{k_y B_y(x) + k_z B_z}{B} \simeq k_z + k_y s x \quad (5.5)$$

つまり $k_{\parallel}$ は場所の函数になり x と共に大きくなる。

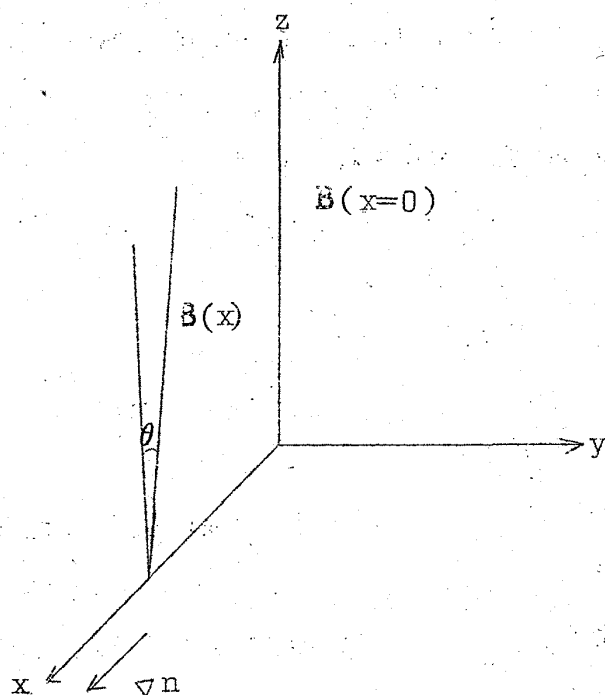


Fig. 1

shear の安定化の作用の一つは, Landau damping によるものである。イオンによる Landau damping は, $\omega/k_{\parallel} \sim \bar{v}_i$ のときに起る, $\omega \sim \omega^* \sim k_y \rho_i \bar{v}_i / a$ ($a = 1/n \cdot dn/dx$) とし, 上の $k_{\parallel}$ をいれると, 安定化の条件は,

$$s x \gtrsim \rho_i / a \quad (5.6)$$

となる。ドリフト波が x 方向にプラズマの半径いっぱい広がっているとす

ると $x \sim a$ そのとき、安定化の条件は、

$$\theta \gtrsim \rho_i / a \quad (\theta \equiv s a) \quad (5.7)$$

Krall, Rosenbluth¹⁴⁾ は、(4.4) のような shear の磁場の場合の normal mode の解の性質を調べ、実際 (5.7) をみたすとき、 ω が damping の根しか与えないことを示した。

shear には、もう一つの安定化の作用がある。それは、shear が (5.1) のポテンシャル V の井戸を浅くして、 $x \rightarrow \pm\infty$ で $\phi(x) \rightarrow 0$ の normal modes^{15), 16)} ができないようにしてしまう作用である。

現在、shear はドリフト波を安定化する最も有力な手段の一つであり、¹⁷⁾ 実験的にもその有効性が示されている。shear のある場合の、normal modes の問題については、ここでは、これ以上立ち回らないが References 14, 15, 16 を参照されたい。

最近、安定性の議論に、normal mode の他に、wave packet の解を考^{18), 19)} えることが必要であることが指摘されている。十分強い shear をかけて、空間的に局在 (localize) した $\text{Im } \omega > 0$ の normal mode が存在しなくなった場合でも、空間的に無限に広がった ($\text{Im } \omega > 0$ の) 平面波解を重ねあわせて空間的に局在した wave packet を作ることができる。もちろん、このようにして作った wave packet は、ある時間たつと phase mixing を起して decay する。しかし、packet ととしての identity を保つ時間が不安定の成長時間にくらべて十分長ければ、この decay は無視できる。この意味で、この wave packet は quasi-mode とよばれている。この quasi-mode の波の成長は次のように推定できる。

いま、 $\theta \gg \rho_i / a$ の shear がかかっているとしよう、このとき、(5.7) によれば、normal mode の解は安定な ω を与える。(5.6) からわかるように、 $x = \rho_i / \theta \ll a$ まで広がっている波は著しい Landau damping をうける。そこで、wave packet を構成する "elementary mode" の波長として、 $k_{\perp} > 1/x \sim \theta / \rho_i$ にとっておこう。波長が短いほど、当然のことながら shear の影響を受けないわけである。このような平面波の elementary modes を重ね合わせて空間的に局在した wave packet を

作れば, $\text{Im } \omega > 0$ の不安定な解がえられる。この packet は, $\partial \omega / \partial k_x$ の群速度で x 方向に伝播する。そこで, はじめ不安定な領域にいた波は, ある時間たつと, 磁力線の傾きが大きく著しく Landau damping の利く安定な領域に移る。この不安な領域に滞在している間に波は, r を不安定の成長率として

$$\int r dt = \int \frac{r(x, \omega)}{\partial \omega / \partial k_x} dt \quad (5.8)$$

だけ, exponentiate する。ここで積分は, $r > 0$ のはんいにとり, 安定化の条件として

$$\int r dt < n_0 \quad (5.9)$$

がとられている。 n_0 は単位時間に許される波の exponent number である。通常 n_0 は $1 \sim 10$ にとられるが別に根拠はない。どの n_0 まで許されるかを評価することは, 非線形理論の重要な課題である。

もう一つの重要な問題は, $D_{\perp} \sim r / k_{\perp}^2$ の拡散係数を与える式で, quasi-mode の場合 $k_{\perp}$ として何をとるかということである。quasi-mode を構成する elementary mode の $k_{\perp}$ は $k_{\perp} > \rho_i / \theta \gg 1/a$ でありこの k をいれると $D_{\perp}$ は, 十分小さくなる。しかし, quasi-mode そのものはプラズマの半径程度広がれるので $k_{\perp} \sim 1/a$ とすると $D_{\perp}$ は大きくなる。この問題はまだ解決していない。

§ 5. モード間結合とランピング

ドリフト波の乱流の大きさを制限する一つの機構は, mode coupling である。 (k, ω) , (k', ω') の波数と振動数をもった二つの波の相互作用によって, 三番目の波 $(k \pm k', \omega \pm \omega')$ が生成される。ドリフト波の場合, (k, ω) , (k, ω') の波がプラズマの natural modes である場合, $(k \pm k', \omega \pm \omega')$ も natural modes として許されるような decay type の分散式になっている。そこで, スペクトラムの不安定な部分にあるモードのエネルギーは, mode coupling によって, 不安定な領域の外側の damping が著しく利いているような波に移ることが可能になる。この結果,

linear growth が非線形の damping とバランスするところで定常状態に達することが期待される。この mode coupling の計算は、Galeev と Rudakov²⁰⁾ によって行われた、その結果は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} &= 2 r_k n_k + St^{(0)}(n_{k'}, n_{k''}) \\ St^{(0)}\{n_{k'}, n_{k''}\} &= 2\pi \sum_{k'+k''=k} \{|V_{kk'k''}|^2 (n_k n_{k''} - n_k n_{k'} - n_{k'} n_{k''}) \\ &\quad \times \delta(\omega_k - \omega_{k''} - \omega_{k'}) + 2 |V_{kk'-k''}|^2 \\ &\quad \times (n_{k'} n_{k''} + n_{k''} n_k - n_k n_{k'}) \delta(\omega_{k''} - \omega_{k'} - \omega_k)\} \\ k' &= -k' \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで、右辺第一項は、linear growth による、モード k の準粒子の数 n_k の増大、 $St^{(0)}$ は、モード $n_{k'}$ 、 $n_{k''}$ との相互作用による n_k の数の変化を表わす。 $V_{kk'k''}$ は、波数 k の波が k' と k'' の波にわかれる decay process の相互作用の matrix element である。和の範囲を定める $k = k' + k''$ と、 $\delta(\omega_k - \omega_{k''} - \omega_{k'})$ の因子は、それぞれ、運動量の保存とエネルギーの保存則を表わす。和は、 $\omega_k, \omega_{k'}, \omega_{k''} > 0$ の振動数についてのみとられる、 $n_k, n_{k'}, n_{k''} \gg 1$ とすると、この式は固体中のフォノンに対する kinetic equation とまったく同じ形をしている。 $St^{(0)}$ の和を評価するのが困難なので、これ以上の計算は半定性的なものにならざるをえない。さらにもう一つの困難は、前節で見たように $r_{\max} \sim \text{Re } \omega$ の程度になりうるので、 n_k に対して準粒子という描像そのものが疑しくなることである。しかし、結果は、order of magnitude の意味はもちうるであろう。計算結果によると波に対するエネルギー方程式は、

$$\frac{d}{dt} |\tilde{V}_E|^2 = r |\tilde{V}_E|^2 - \frac{\delta \omega}{v_d^2} |\tilde{V}_E|^4 \quad (5.2)$$

のように近似的に書ける。ここで、 $\tilde{V}_E = c \tilde{E} \times B / B^2$ は、ゆらぎの電場 $\tilde{E}$ によるドリフト、 r は線形の成長率、 $\delta \omega = k_y v_d - \omega_R$ ($\omega_R = \text{Re } \omega$)

である。 $v_d = \omega^*/k_y$ これから、定常状態での $\tilde{V}_E^2$ の振幅は、 $|\tilde{V}_E|^2 \approx (r/\delta\omega) v_d^2$ になる、この推定を用いて拡散係数を求めよう。

密度 $\tilde{n}$ を slow 及び fast varying part にわけると： $\tilde{n} = \tilde{n}_0 + \tilde{n}_1$ ，ここで、fast varying part $\tilde{n}_1$ は、次の線形の方程式をみたす。

$$-i\omega\tilde{n}_1 - ik_y \frac{\tilde{\phi}}{B} \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial x} = 0 \quad (5.3)$$

ここで、 $\tilde{E} = -\nabla \tilde{\phi}$ 、 $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(x) e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z}$

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \tilde{v}_x \cdot \frac{\partial \tilde{n}}{\partial x} + \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{n} = 0 \quad (5.4)$$

を考えよう。波の位相についての平均をとって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial t} &= -\langle \tilde{v} \cdot \nabla \tilde{n}_1 \rangle = \left\langle \frac{\nabla \tilde{\phi} \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla \frac{k_y \tilde{\phi}}{\omega B} \frac{\partial \tilde{n}_0}{\partial x} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{k_y}{B} \right)^2 \langle |\tilde{\phi}|^2 \rangle \frac{\partial^2 \tilde{n}_0}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

これから、拡散係数が次のように求まる。

$$D_{\perp} \approx \text{Im} \left(\frac{1}{\omega} \right) \langle |\tilde{V}_{EX}|^2 \rangle = \frac{r}{\omega_R^2 + r^2} \langle |\tilde{V}_{EX}|^2 \rangle \quad (5.6)$$

$\langle |\tilde{V}_{EX}|^2 \rangle$ に上の値をいれて

$$D_{\perp} \approx \frac{r}{\omega_R^2 + r^2} \frac{r}{\delta\omega} \frac{v_d^2}{(1 + k_x^2/k_y^2)} \quad (5.7)$$

$\omega_R \approx k_y v_d$ 、 $r \lesssim \omega_R$ として

$$D_{\perp} = \frac{r}{k_x^2 + k_y^2} \frac{r}{\delta\omega} \quad (5.8)$$

$r \sim \delta\omega$ 、(このとき $\tilde{V}_E \sim v_d$) とすれば、familiar な $D_{\perp} \sim r/K_{\perp}^2$ の式になる。

ここで、粒子の波によるトラッピングをドリフト波の振幅の saturation²¹⁾ の原因として考える Dupree の理論を紹介しよう。

電場が turbulent な場合、 $D_{\perp}$ は random walk の式

$$D_{\perp} = \frac{1}{2} (\Delta r_{\perp})^2 / \Delta t \quad (5.9)$$

で与えられる。ここで $\Delta r_{\perp}$ は random walk のステップのサイズ, Δt は各ステップにともなう時間である。ドリフト波の場合, $\Delta r_{\perp}$ は,

$$\Delta r_{\perp} \approx (c \bar{E}_{\perp} / B) \Delta t \quad (5.10)$$

である。 $c \bar{E}_{\perp} / B$ は turbulent な電場によるドリフト ($\bar{E}_{\perp}$ は $E_{\perp}$ の rms), Δt は粒子が見る場のゆらぎの時間である。このゆらぎの時間は Doppler shift した (粒子の見る) 波の auto correlation time で与えられる。この時間たてば, 波の相関はなくなって粒子が異った位相の波を見ることになるからである。もし, $E_{\perp}$ が完全に sinusoidal に $e^{-i\omega t}$ のように振動していれば, 粒子は波のある位相で磁場を横切って x の正方向に動いても次の位相で負の方向に動いてただ振動して net の拡散はない。そこで, この位相の相関を切る時間が random walk の step time Δt になる。auto correlation time は,

$$\Delta t = \frac{\int_0^{\infty} E_{\perp}(\mathbf{r}, \tau) E_{\perp}(\mathbf{r}', \tau+t) dt}{(E_{\perp}(\mathbf{r}, \tau))^2} \quad (5.11)$$

で与えられる。積分は粒子の軌道にそってとられる, Larmor 半径が十分に小さいとすると, 粒子の軌道は零次では $z = v_z t$ の直線運動である。 $E_{\perp}$ を Fourier 展開し, $\mathbf{r}'$ に零次の軌道をいれて,

$$\Delta t = \int_0^{\infty} dt |E_{\perp k}|^2 \exp i(\omega_k - k_z v_z) t \cdot \left(\sum_k |E_{\perp k}|^2 \right)^{-1} \quad (5.12)$$

これを (5.9) に代入し, (5.12) の分母は, E^2 であることに注意すると

$$D_{\perp} = \frac{\pi c^2}{B^2} \sum_k |E_{\perp k}|^2 \delta(\omega_k - k_z v_z) \quad (5.13)$$

ただし, $\text{Im } \omega_k \ll R_e \omega_k$ とし, $\exp i(\omega_k - k_z v_z) t$ の積分を δ 関数で置きかえた。この式は, イオンサイクロトロン波の乱流に関して, Drumond²²⁾ Rosenbluth が準線形理論から求めた結果と同じである。(5.13) の δ

函数の因子は、 $k_z v_z = \omega_k$ 、つまり Doppler shift した波の周波数が零になって電場を直流的に見る共鳴粒子だけが拡散に寄与することを示している。ドリフト波の場合、速度空間の拡散も、 $D_{\perp}$ に利くので実際には $D_{\perp}$ は²³⁾、²⁰⁾ (5.1.3.) より複雑になる。

Dupree は、strong turbulence で $\mathbf{E}$ が十分大きいときには零次の軌道として直線運動（あるいはサイクロトロン運動）をとるような摂動のしかたは必ず発散すると主張する、Larmor 半径が十分小さく、 $\omega \ll \omega_{ci}$ のときの粒子の軌道は

$$[\ddot{\mathbf{r}}]_z = (e/m) E_z \quad (5.14)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{\perp} = c \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 \quad (5.15)$$

で近似的に与えられる。Dupree は、 $\mathbf{E}$ が十分大きいときは、零次の軌道として $\mathbf{E}$ の効果が最初から入っているような軌道をとらなければならないと指摘する。このことは実際上は困難なので、彼は $\mathbf{E}$ が turbulent になっているとき粒子は diffusion 的な運動をするだろうと考えて零次の軌道にこの効果を取り入れた、彼によれば、この効果のうち最も重要なのは (5.15) に従う横方向の粒子のトラッピングである。粒子は $c \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ の速度で磁場を横切るが、波の一波長をこの速度で横切るに要する時間は

$$\Delta t \approx B / k_{\perp} \bar{E}_{\perp} c \quad (5.16)$$

である。もし、この時間が波の振動の時間 $1/\omega$ より短かければ、粒子は $\mathbf{E}$ の向きが変らないうちに、位相の異なる他の波を見ることになる。そこで、上の条件がみたされる場合ゆらぎの時間 Δt として (5.16) をいれて

$$D_{\perp} \approx c \bar{E}_{\perp} / B k_{\perp} \quad (5.17)$$

$\Delta t < \frac{1}{\omega}$ の条件はまた、

$$\frac{k_{\perp} c \bar{E}_{\perp}}{B} > \omega \quad (5.18)$$

と書けば、 $c \bar{E}_{\perp} / B$ のドリフト速度による Doppler shift が ω よりも大

天野恒雄

きいという意味をもっている。この場合、粒子は波を直流的に見ることになり粒子は波にトラップされる。このメカニズムによれば、 $D_{\perp}$ は (5.18) で定まる E_c より大きい $\bar{E}_{\perp} > E_c$ に対して初めて零でなくなる。Dupree のもっと詳しい計算によると、拡散係数は Fig. (2) の実線に示すような $\bar{E}_{\perp}$ 依存性を示す。(5.18) がちょうどみたされる $\bar{E}$ に対して n_1/n_0 を求めよう。

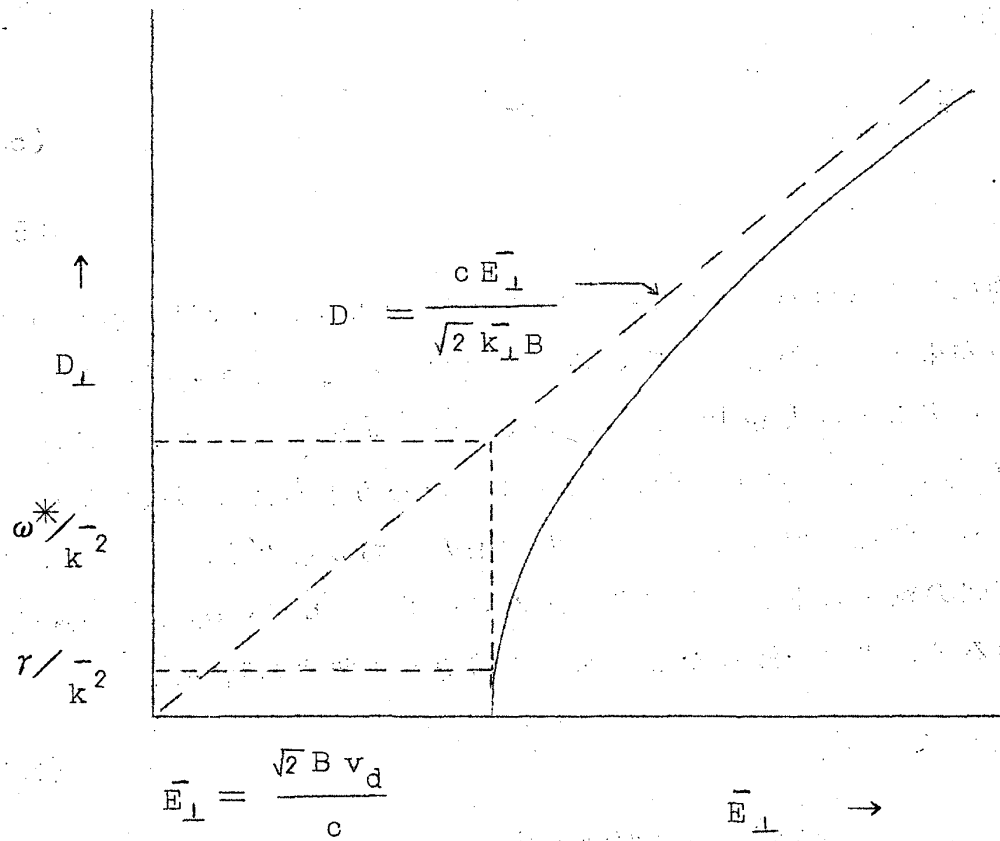


Fig. 2

$$n_1/n_0 \approx e \langle \phi \rangle^{1/2} / T_e = e \bar{E}_{\perp} / T_e k_{\perp} \quad (5.19)$$

に $E_{\perp} = B v_D / c$ をいれて

$$k_{\perp} n_1 \approx \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} n_0 \quad (5.20)$$

この結果は、§ 3で行った推定と同じである。

上の議論は、 $\bar{E}_\perp$ が与えられた場合の拡散係数の話である、 $\bar{E}_\perp$ の大きさを定めるためにはイオンのトラッピングにともなう Landau damping の効果を考慮しなければならない。線形理論では、 $\bar{v}_i \ll \omega/k_z \ll \bar{v}_e$ の場合、波と共鳴するイオンの数が少なくイオンの Landau damping による安定化の効果は無視された。しかし、 $\bar{E}_\perp > E_c$ になってイオンのトラッピングが利き始めるとイオンは電場を直流的に見ることになり著しく強い Landau damping が起る。いいかえると、 $\bar{E}_\perp$ の効果によってイオンの Landau damping の共鳴の幅が著しく広がったわけである。そこで、定常状態では、電子が波にエネルギーを供給するのと同じ割合でイオンの Landau damping が波のエネルギーをイオンの熱エネルギーに変えるであろう。Dupree は、非線形の分散式を解いてどこで系が安定になるかを調べた。この結果は簡単に

$$\omega \approx \omega^* + ir - ik_\perp^2 D_\perp \quad (6.12)$$

と表わされる。右辺の第二項は linear growth rate, 第三項は、イオンが turbulent な $\bar{E}$ によって拡散運動をするための寄与である、波は最初 linear growth rate で増大し、 $\bar{E}_\perp$ が大きくなって $D_\perp$ が

$$D_\perp \approx r/k_\perp^2 \quad (6.22)$$

になったところで成長がとまる、イオンがいったん波にトラップされると急速に Landau damping が利き始めるので、この $D_\perp$ に対応する $\bar{E}_\perp$ の値は、

$\sqrt{2} B v_d/c$ (Fig. 2 を見よ) よりごくわずかに大きい $\bar{E}_\perp$ であると推定される。全てのモードが安定化されるまで定常状態に達しないので $D_\perp$ の大きさは、 $r/k_\perp^2$ の最大値で定まるであろう。

References

- 1) A. Simon, Phys. Rev., 98, 317 (1955)
- 2) D. Bohm et al, The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Field, McGraw-Hill (1949)
- 3) A. Simon, Phys. Rev., 98, 317 (1955)
- 4) B. Lehnert, Proceeding of the Geneva Conference, Vol. 32 (1958) 349
- 5) B. B. Kadotsev and A. V. Nedospasov, J. Nucl. Energy, Part c 1, 230 (1960)
- 6) M. Glicksman, Phys. Rev., 124, 1655 (1961)
- 7) J. B. Taylor, Phys. of Fluids, 4, 1142 (1961)
- 8) N. D'Angelo and N. Rynn, Phys. of Fluids, 4, 275 (1961), 4, 1303 (1961)
- 9) A. S. Bishop et al, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Vol. II. IAEA., Vienna, 1966 673
W. Stodiek et al. ibid., 687.
- 10) B. B. Kadomtsev, Plasma Turbulence, Academic Press 1965, Chapter 4.
- 11) F. F. Chen, Scientific American, 217, 76 (1967)
- 12) B. B. Kadomtsev, Plasma Turbulence, Chap. 4
- 13) T. K. Chu et al, Phys. Rev. Letters, 19, 1110 (1967)
- 14) N. A. Krall and M. N. Rosenbluth, Phys. of Fluids, 8, 1488 (1965)
- 15) A. A. Galeev, JETP., 17, 1292 (1963)
- 16) K. Kitao, Z. Naturforschg., 22a, 1689 (1967)
- 17) F. F. Chen, Phys. Rev. Letters 18, 639 (1967)
- 18) B. Coppi et al, Nucl. Fusion 6, 261 (1966)

- 19) B.H.Rutherford and E.A.Frieman, Phys. of Fluids 10, 1007 (1967)
- 20) A.A.Galeev and L.I.Rudakov, JETP. 18, 444 (1964)
- 21) T.H.Dupree, Phys of Fluids 10, 1049 (1967)
- 22) W.E.Drummond and M.N.Rosenbluth, Phys. Fluids 5, 1507 (1962)
- 23) T.H.Stix, Phys. of Fluids 10, 1601 (1967)