

平均値定理について

名大 中井 喜信

И.М. Виноградов の平均値定理 (例えば K. Chandrasekharan "Arithmetical Functions", Springer, die Grundlehren der math. Wissen. in Einzeldarstellungen Bd 167 の第4章)

$$\int_0^1 \int_0^1 d\beta_1 \cdots d\beta_k \left| \sum_{X_0 < x \leq X_0 + N} e\left(\sum_{t=1}^k \beta_t x^t\right) \right|^{2k} \ll_{(k, \epsilon)} N^{2k - \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}k(k+1) \cdot (1 - \frac{1}{k})^k}$$

$$\text{但し } \epsilon \geq \frac{1}{4}k(k+1) + jk$$

の類似として、次に述べる事が成立します。

今 $k \geq 2$ なる整数と固定し、 N, ℓ は自然数とする。記号 (r, s) は $r+s \leq k$, $r \geq 0, s \geq 1$ なる範囲を動く事にします。又 μ, ν はいずれも $\geq k$ なる整数とし、 X_0, Y_0 は任意の整数とします。又 $d\alpha$ は $\prod_{(r,s)} d\alpha_{r,s}$ の意味にとります。この時

$$\text{ここで } e(\alpha) = \sum_{\alpha} e^{2\pi i \alpha} \text{ とします。}$$

$$J_k \left(\begin{smallmatrix} q & \mu \\ N & \nu \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^1 dx \left(\sum_{\gamma_0 < \gamma \leq \gamma_0 + N} \left| \sum_{\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_0 + q} e \left(\sum_{(r,s)} \alpha_{r,s} \gamma^r \lambda^s \right) \right|^{2\mu} \right)^{\nu}$$

と表わす。

[Lemma] $\mu \geq k \geq 2$, $\nu \geq \max \left(k + \sum_{(r,s)} (\lambda r + \lambda' s) \right)$, k^2
 $l = \max_{(r,s)} (\lambda r + \lambda' s)$, (λ, λ') は固定した自然数, 及
 $N \geq p^\lambda$, $q \geq \max(p^k, p^l)$, p は素数で $> k$.
 以上の仮定の λ には

$$J_k \left(\begin{smallmatrix} q & \mu \\ N & \nu \end{smallmatrix} \right) \leq 4^\nu \cdot \nu^{k+1} \cdot (\mu^{2k^3} + k^{\nu(2\mu-1)}) \cdot (N_1 q_1^{2\mu})^k \cdot p^{\nu(\lambda+2\mu\lambda') - \sum_{(r,s)} (\lambda r + \lambda' s)} \\ \times J_k \left(\begin{smallmatrix} q_1 & \mu \\ N_1 & \nu-k \end{smallmatrix} \right)$$

が成立する。但しここに $q_1 = \left\lfloor \frac{q}{p^\lambda} \right\rfloor + 1$, $N_1 = \left\lfloor \frac{N}{p^\lambda} \right\rfloor + 1$.

[定理] $k \geq 2$, $\mu \geq k$, $\nu \geq k(j+2) + \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$,
 $q \geq (2(k+1))^{k(1-\frac{1}{k})^{j+1}}$, j は整数で ≥ 0 , とすると

$$J_k \left(\begin{smallmatrix} q & \mu \\ q & \nu \end{smallmatrix} \right) \leq \left\{ \nu^{2k^2} \cdot (4^{1+3\log 2 \cdot \frac{2\mu+1}{k}} \mu)^\nu \right\}^{(2\mu+1)(j+1)} \\ \times q^{\nu(1+2\mu) - \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)(1-\frac{1}{k})^{j+1}}$$

が成立する。

ここで $\mu, \nu \gg k^4$ なる条件は必要です。証明は引用した Chandrasekharan の本の類似を行えば、得られます。