

せん断時の土の応力-ひずみ関係について

松 岡 元

THE STRESS-STRAIN RELATION OF SOILS UNDER SHEARING
DERIVED FROM A MICROSCOPIC CONSIDERATION

By Hajime MATSUOKA

Synopsis

The shearing mechanism of soils has been studied from the microscopic point of view in order to analyze their macroscopic stress-strain relation. Special shearing tests were carried out using aluminium rods and similar rods made of a photoelastic material to simulate granular mass in two-dimensional state. The concept of the frequency distribution of the contact angle between particles θ and its variation during shear was introduced to represent the shearing resistance and dilatancy character. The basic relation of stress ratio (τ/σ_N) $\sim$ the mean value of θ ($\bar{\theta}$) and that of normal strain caused by dilatancy (ϵ_N) $\sim \bar{\theta}$ are derived as follows;

$$\tau/\sigma_N = \lambda \cdot \bar{\theta} + \mu, \quad \epsilon_N = (\cos \bar{\theta} - \cos \bar{\theta}_0) / \cos \bar{\theta}_0$$

where $\lambda = 1.4 \sim 1.5$ (const.), μ ; the coefficient of friction between particles, $\bar{\theta}_0$; $\bar{\theta}$ immediately after the beginning of shearing. From these microscopic consideration, the stress-strain relation of soils under shearing which can be applied to sands and clays has been derived as follows;

$$\tau/\sigma_N = (\mu' - \mu) \cdot \ln(\gamma/\gamma_0) + \mu$$

$$\epsilon_N = \frac{(\mu - \mu')}{\lambda} \cdot \gamma \cdot \{\ln(\gamma/\gamma_0) - 1\}$$

where $\mu' = \lambda \cdot \bar{\theta}_0 + \mu$, γ_0 ; γ at the maximum compression point of ϵ_N .

1. 緒 言

砂は明らかに粒子の集合体であって、個々の粒子の挙動を反映してその力学特性は規定されるものと考えられる。また砂だけでなく、微細な粒子からなる粘土にもダイレイタンスーなどの粒状性を示さずる現象がみられる。ここでは土の応力-ひずみ特性の根源をその粒状性に着目して微視的な観点から説明することを試みた。そのため、土の2次元モデルとしてアルミ棒および光弾性材料の棒の積層体を用いてせん断試験を行ない、粒子間力、粒子間摩擦、粒子接点角などを微視的な要因として考察した。特に、せん断にともなうて変化する潜在すべり面上の粒子接点角 θ の変化状況を θ の度数分布形の変化として表現し、さらに θ の分布の平均値 $\bar{\theta}$ によって評価することを試みた。このような考察から、砂、粘土を問わず成立するせん断時の土の応力-ひずみ関係式を誘導したので、その理論の骨子と実測データとの対比を以下に述べる。

2. 微視的観点から誘導した土の応力-ひずみ関係式^{1),2)}

まず砂質土のせん断抵抗とダイレイタンスー量をその粒状性に着目して微視的な立場から評価することを試みる。Fig. 1 に示すように潜在すべり面上で相対的に滑動している個々の粒子接点に着目して、 i 番目の接点の粒子間力を f_i 、粒子接点角を θ_i とし、粒子間摩擦角が各粒子接点で完全にモービライズ (mobilize) されて一定値 ϕ_n であるとするれば、せん断抵抗 (τ/σ_N) は一般に次のように表わされる。

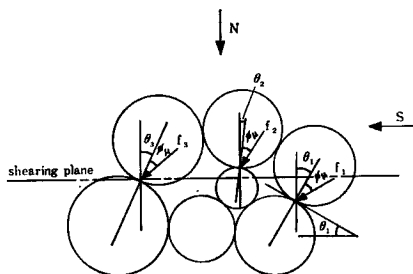


Fig. 1 The contact angle between particles θ_i , the interparticle force f_i and the frictional angle between particles.

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{S}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot \sin(\theta_i + \phi_n)}{\sum_{i=1}^n f_i \cdot \cos(\theta_i + \phi_n)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに n はせん断面上の滑動粒子の接点数であり、 S はせん断力、 N は垂直力である。次に粒子接点角 θ の全範囲 ($-90^\circ \sim +90^\circ$) をある間隔 $\Delta\theta$ の変域 (その中央値を θ_j とする) に区分し、 θ_j 変域内の粒子間力 f_i の和として $F_j [= \sum f_i (\theta_j - \Delta\theta/2 < \theta < \theta_j + \Delta\theta/2)]$ を導入すれば (1) 式は次式に換できる。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\sum_{j=1}^m F_j \cdot \sin(\theta_j + \phi_n)}{\sum_{j=1}^m F_j \cdot \cos(\theta_j + \phi_n)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに m は θ の分割変域の数である。各 θ_j 変域 ($j=1 \sim m$) 内の粒子接点数 (θ の度数 (frequency) と総称する) を N_j とすれば、

$$F_j = \sum f_i (\theta_j - \Delta\theta/2 < \theta < \theta_j + \Delta\theta/2) = \frac{\sum f_i}{N_j} \cdot N_j = \bar{f}_j \cdot N_j \quad \dots\dots\dots (3)$$

であるから、 F_j は θ_j 変域内の平均粒子間力 $\bar{f}_j$ と粒子接点数 N_j との積の形で表わされることになる。そこで光弾性材料の丸棒 ($\phi 6.2 \text{ mm}$, $\phi 10 \text{ mm}$) の積層体を用いて光弾性実験による一面せん断試験を行ない、 F_j と N_j の間の関係を調べた。その結果の一例を Fig. 2 に示す。この図より、せん断前およびせん断中の $F_j \sim N_j$ 関係の第 1 次近似として次式を仮定する。

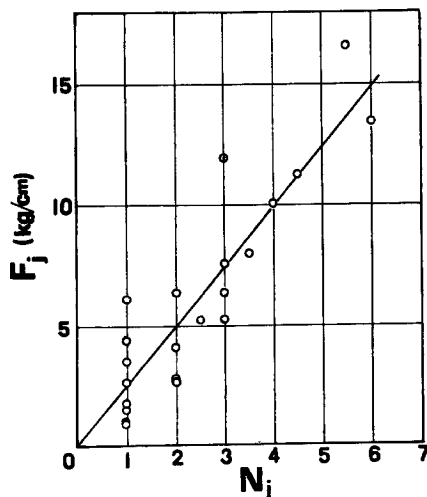


Fig. 2 Relationship between F_j (per unit length) and N_j .

$$F_j \cong C \cdot N_j \quad (C: \text{const.}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

(3) 式と (4) 式の比較より明らかなように、これは各変域内の平均粒子間力 $\bar{f}_j$ の大きさが θ_j の値にかかわらずほぼ一定であることを意味している。さて (4) 式を (2) 式へ代入すれば次式を得る。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\sum_{j=1}^m N_j \cdot \sin(\theta_j + \phi_u)}{\sum_{j=1}^m N_j \cdot \cos(\theta_j + \phi_u)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで離散関数 (discrete function) N_j を連続関数 (continuous function) $N(\theta)$ に近似して (5) 式を積分形で記述すれば、

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cdot \sin(\theta + \phi_u) \cdot d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cdot \cos(\theta + \phi_u) \cdot d\theta} \quad \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式より $N(\theta)$ の関数形さえ与えられれば、積分を遂行することによってせん断抵抗 (τ/σ_N) は直ちに算定される。

θ の度数分布 $N(\theta)$ のせん断にともなう変化の状況については、各種径のアルミ棒および光弾性材料の丸棒の積層体、各種径の鋼球の集合体、粒径の大きい実際の砂礫などを試料として多くのせん断試験を行ない潜在すべり面上の粒子接点角を測定した結果、一貫してほぼ Fig. 3 のような傾向を示すようである。なお、鋼球および砂礫の場合には、透明な側板をもつせん断箱の透明板近傍の粒子接点角が近似的に全体の傾向を代表するものとして調べた。

Fig. 3 より、 $N(\theta)$ に対して Fig. 4 に示すような台形分布と三角形分布を近似的に仮定すれば、せん断

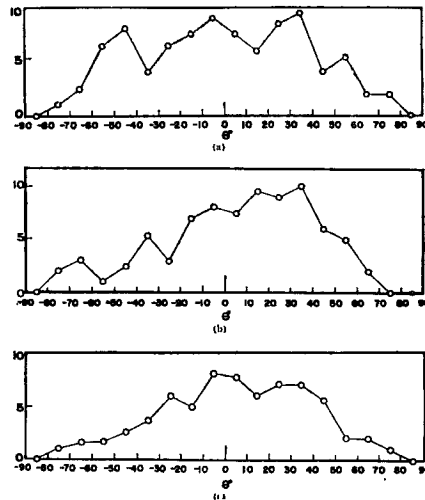


Fig. 3 Frequency distribution of θ of aluminium rods mass.

- (a) before shear
- (b) at the peak strength
- (c) at the residual strength

抵抗 (τ/σ_N) は次のように計算される。なお、台形分布の場合は両肩の θ_p と θ_q 、三角形分布の場合は頂点の θ_p をそれぞれ変数として、せん断にともなう分布形の変化が表現されるわけである。台形分布のときは、

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{(\pi/2 - \theta_p) \cdot \sin(\theta_q + \phi_u) + (\pi/2 + \theta_q) \cdot \sin(\theta_p + \phi_u) - (\theta_p + \theta_q) \cdot \cos \phi_u}{(\pi/2 - \theta_p) \cdot \cos(\theta_q + \phi_u) + (\pi/2 + \theta_q) \cdot \cos(\theta_p + \phi_u) + (\theta_p + \theta_q) \cdot \sin \phi_u} \quad \dots\dots\dots (7)$$

三角形分布 ($\theta_p = \theta_q$) のときは,

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \frac{\pi \cdot \sin(\theta_p + \phi_n) - 2\theta_p \cdot \cos \phi_n}{\pi \cdot \cos(\theta_p + \phi_n) + 2\theta_p \cdot \sin \phi_n} \quad (8)$$

ここで θ_q の値が $-\pi/2$ にあまり近くない場合には, 台形分布としても三角形分布としても τ/σ_N の値にはさほど敏感には反映されないので, より簡単な三角形分布を採用する。このとき θ の平均値 $\bar{\theta}$ は,

$$\bar{\theta} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cdot \theta \cdot d\theta / \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\theta) \cdot d\theta = \theta_p / 3$$

であることを考慮して, (8) 式より τ/σ_N を $\bar{\theta}$ に対して計算した。この計算結果を Fig. 5 に示す。この図

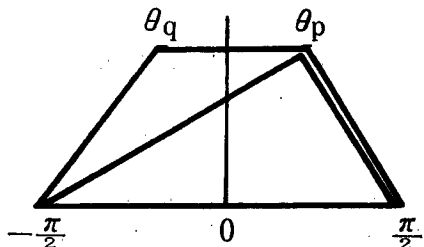


Fig. 4 The trapezoidal and triangular frequency distributions of θ .

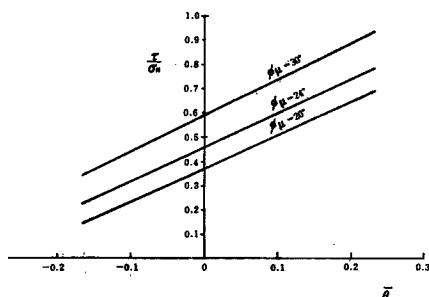


Fig. 5 Relationship between τ/σ_N and $\bar{\theta}$ with parameter ϕ_n .

より $\bar{\theta}$ のある範囲では τ/σ_N は ϕ_n をパラメーターとして $\bar{\theta}$ に対してほぼ直線関係をなすことがみられる。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \bar{\theta} + \mu \quad (9)$$

ここに λ は Fig. 5 の直線勾配からほぼ (1.4~1.5) の定数である。また μ は粒子間摩擦 $\tan \phi_n$ に等しい物理定数である。

次に Fig. 6 は粒状土のダイレイタンスの発生機構を微視的な観点から模式的に示したものである。この図よりせん断面に垂直な方向に n' 個の粒子が存在するものとすれば, 垂直方向の全体の長さ L および $\Delta\theta_i (i=1 \sim n'-1)$ なる角度変化による長さの変化量 ΔL は次のように表現できる。

$$L = \sum_{i=1}^{n'-1} (r_i + r_{i+1}) \cdot \cos \theta_i + (r_i + r_{n'}) \quad (10)$$

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{n'-1} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n'-1} (r_i + r_{i+1}) \cdot \sin \theta_i \cdot (-\Delta \theta_i) \quad (11)$$

ここに r_i は i 番目の粒子の半径であり, ΔL_i は i 番目の粒子の上を粒子接点角 θ_i をなす $(i+1)$ 番目の粒子が $\Delta \theta_i$ だけ角度変化したことによる高さの変化量である。さて, 単純せん断 (simple shear) 的な一様なせん断ひずみを受けた場合を考えると, 垂直 (高さ) 方向についての θ の度数分布 $N(\theta)$ も Fig. 3 と同様な変化特性を示すと考えられる。(10), (11) 式において r_i と θ_i は全く独立していて関数関係がないので, ここでは $(r_i + r_{i+1})$ の平均値を $\bar{d}$, θ_i の平均値を $\bar{\theta}$, $\Delta \theta_i$ の平均値を $\Delta \bar{\theta}$ として平均操作を行なった。すなわち,

$$L = (n'-1) \cdot \bar{d} \cdot \cos \bar{\theta} + \bar{d} \cong (n'-1) \cdot \bar{d} \cdot \cos \bar{\theta} \quad (12)$$

$$\Delta L = (n'-1) \cdot \bar{d} \cdot \sin \bar{\theta} \cdot (-\Delta \bar{\theta}) \quad (13)$$

またせん断前の初期状態における L を L_0 とすれば, (12), (13) 式から次式を得る。

$$(\Delta L / L_0) / \Delta \bar{\theta} = -\sin \bar{\theta} / \cos \bar{\theta}_0$$

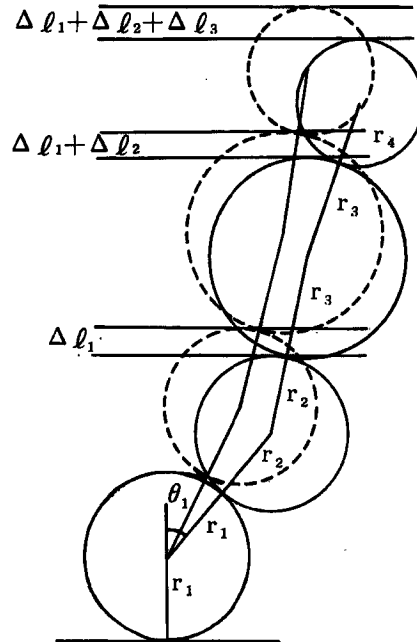


Fig. 6 The mechanism of dilatancy.

ここに $-\bar{\theta}_0$ はせん断開始直後における θ の平均値である。 τ/σ_N がピーク強度に達する以前においては、 γ が増大すれば $\bar{\theta}$ も増大し L は減少（圧縮）するから、 γ の増大に対して L は圧縮が正となる。ここで $(\Delta L/L_0)$ は垂直ひずみの増分 $d\epsilon_N$ (ϵ_N : 圧縮が正) に相当し、 $\Delta\bar{\theta}$ はせん断ひずみの増分 $d\gamma$ にほぼ等しい（実測データあり）と考えられるので、上式は次式に書き換えられる。

$$\frac{\Delta L/L_0}{\Delta\bar{\theta}} \cong \frac{d\epsilon_N}{d\gamma} \cong \frac{d\epsilon_N}{d\bar{\theta}} = -\frac{\sin\bar{\theta}}{\cos\bar{\theta}_0} \quad (14)$$

(14) 式を積分し $\bar{\theta} = -\bar{\theta}_0$ のとき $\epsilon_N = 0$ なる条件を入れると、ピーク強度以前の ϵ_N の表示式として次式を得る。

$$\epsilon_N = \frac{\cos\bar{\theta} - \cos\bar{\theta}_0}{\cos\bar{\theta}_0} \quad (15)$$

なおピーク強度以後においては、せん断ひずみ γ の増加とともに $\bar{\theta}$ は減少するが、このときも同様のメカニズムに従うものとすればピーク強度後の $d\epsilon_N/d\gamma$ は (14) 式と同じ形で、また ϵ_N は次のように表わされる。

$$\epsilon_N = \frac{2\cos\bar{\theta}_p - \cos\bar{\theta}_0 - \cos\bar{\theta}}{\cos\bar{\theta}_0} \quad (16)$$

ここに $\bar{\theta}_p$ はピーク強度時における $\bar{\theta}$ である。

(14) 式を (9) 式に代入すれば、応力比 (τ/σ_N) とひずみ増分比 ($d\epsilon_N/d\gamma$) の関係式として次式を得る。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \arcsin \left\{ \cos\bar{\theta}_0 \cdot \left(-\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} \right) \right\} + \mu \cong \lambda \cdot \left(-\frac{d\epsilon_N}{d\gamma} \right) + \mu \quad (17)$$

また (15), (16) 式を (9) 式に代入すれば応力比 (τ/σ_N) と垂直ひずみ (ϵ_N) の関係式として次式を得る。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \arccos \{ \cos\bar{\theta}_0 \cdot (1 + \epsilon_N) \} + \mu \cong \pm \lambda \cdot \sqrt{\bar{\theta}_0^2 - 2\epsilon_N} + \mu \quad (18)$$

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = \lambda \cdot \arccos \{ 2\cos\bar{\theta}_p - \cos\bar{\theta}_0 \cdot (1 + \epsilon_N) \} + \mu \quad (19)$$

また (17) 式に主応力と主ひずみ増分の方が一致するという仮定を入れると、主応力比 (σ_1/σ_3) と主ひずみ

増分比 ($d\epsilon_3/d\epsilon_1$) の関係として次式を得る。

$$\frac{d\epsilon_3}{d\epsilon_1} = \frac{\sigma_1/\sigma_3 - 2\mu\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} + (\lambda - 1)}{(1 - \lambda) \cdot \sigma_1/\sigma_3 - 2\mu\sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - 1} \quad (20)$$

ここで (17), (18), (20) 式の検証のための実測データを次節 Fig. 9~16 に示す。

次に以上の関係に新たな 1 式を加えて実用的な応力-ひずみ関係を誘導することを試みる。 ϵ_N は (15) 式より $\cos \theta$ をべき級数展開して高次項を無視すれば次のように近似される。

$$\begin{aligned} \epsilon_N &= (\cos \bar{\theta} - \cos \bar{\theta}_0) / \cos \bar{\theta}_0 \cong \frac{1}{2} (\bar{\theta}_0^2 - \bar{\theta}^2) / \left(1 - \frac{1}{2} \bar{\theta}_0^2\right) \\ &\cong \frac{1}{2} (\bar{\theta}_0^2 - \bar{\theta}^2) = \frac{1}{2} (\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}) \cdot (\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}) \end{aligned}$$

ここで $d\gamma \cong d\bar{\theta}$ であることを考慮すれば, $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0$ すなわち $\epsilon_N = 0$ の付近では $\gamma \cong (\bar{\theta}_0 + \bar{\theta})/2$ と近似できる。したがって $\bar{\theta} \cong -\epsilon_N/\gamma + \bar{\theta}_0$ とおけるので (9) 式より次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\sigma_N} &= \lambda \cdot \bar{\theta} + \mu \cong \lambda \cdot \left(-\frac{\epsilon_N}{\gamma}\right) + \lambda \cdot \bar{\theta}_0 + \mu \\ &= \lambda \cdot \left(-\frac{\epsilon_N}{\gamma}\right) + \mu' \quad (21) \end{aligned}$$

ここに $\mu' = \lambda \cdot \bar{\theta}_0 + \mu$ である。(21) 式を検証するため, 石井川砂と藤の森粘土 (F-clay と呼ぶ) を試料とする排水三軸試験データを整理したのがそれぞれ Fig. 7, 8 である。Fig. 7 においてプロットが直線にのりはじめる点の軸ひずみは約 1~2% であるので, ピーク強度までの主要な部分はおおむね直線上にのると近似することはほぼ妥当なようである。また直線勾配は Fig. 7 では 1.4, Fig. 8 では 1.2~1.3 となつてほぼ λ の値に対応している。さて, (21) 式を (17) 式とあわせて微分方程式を解けば次式を得る。

$$\frac{\tau}{\sigma_N} = (\mu' - \mu) \cdot \log_e \frac{\gamma}{\gamma_0} + \mu \quad (22)$$

$$\epsilon_N = \frac{\mu - \mu'}{\lambda} \cdot \gamma \cdot \left\{ \log_e \frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 \right\} \quad (23)$$

ここに γ_0 は ϵ_N の最大圧縮点での γ である。さらに (22) 式の両辺を μ で割ると, $\tau/\mu\sigma_N$ と γ/γ_0 が半対数紙上で点 (1, 1) を通る直線であることを意味する次式を得る。

$$\frac{\tau}{\mu\sigma_N} = \left(\frac{\mu'}{\mu} - 1\right) \cdot \log_e \frac{\gamma}{\gamma_0} + 1 = 2.3 \left(\frac{\mu'}{\mu} - 1\right) \cdot \log_{10} \frac{\gamma}{\gamma_0} + 1 \quad (24)$$

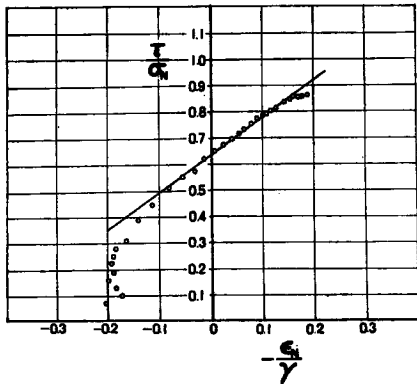


Fig. 7 Relationship between τ/σ_N and ϵ_N/γ (Ishii River sand).

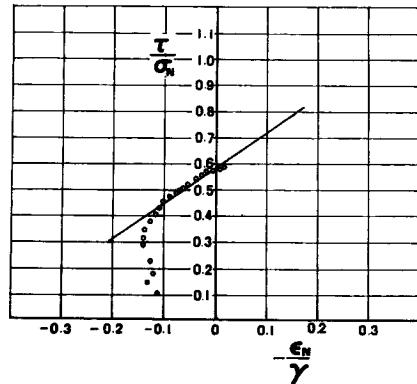


Fig. 8 Relationship between τ/σ_N and ϵ_N/γ (Fujinomori clay).

次に (22), (23) 式に主応力と主ひずみ増分の方が一致するという条件を入れて, 主応力比と主ひずみの関係になおすと次のようになる。ただし積分の計算過程で近似計算を行なっている。 $X \equiv \sqrt{\sigma_1/\sigma_3} - \sqrt{\sigma_3/\sigma_1}$ として,

$$\epsilon_1 = \frac{\gamma_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mu}{\mu' - \mu}\right)}{2} \cdot \exp\left\{\frac{X}{2(\mu' - \mu)}\right\} \cdot \left\{\frac{X^2}{8} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\mu' - \mu}{2}\right) \cdot X + (\mu' - \mu)^2 - (\mu' - \mu) + \frac{2\mu'}{\lambda} + 1\right\} \dots (25)$$

$$\epsilon_3 = \frac{\gamma_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mu}{\mu' - \mu}\right)}{2} \cdot \exp\left\{\frac{X}{2(\mu' - \mu)}\right\} \cdot \left\{-\frac{X^2}{8} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu' - \mu}{2}\right) \cdot X - (\mu' - \mu)^2 - (\mu' - \mu) + \frac{2\mu'}{\lambda} - 1\right\} \dots (26)$$

まず(24)式に対する実測データのプロットを次節 Fig. 17~21 に示す。また(22), (23)式と(25), (26) に対する実測データのプロットを次節 Fig. 22~28 に示す。

3. 実測データとの比較²⁾

前節で誘導した種々の関係式を砂と粘土あるいはガラス・ビーズのせん断試験データによって検証する。まず前節(17)式で表わされるせん断・垂直応力比(τ/σ_N)と垂直・せん断ひずみ増分比($d\epsilon_N/d\gamma$)の関係について、実測データとの比較を示す。Fig. 9 は豊浦標準砂の単純せん断 (simple shear) 試験結果を整理したものであって、実験条件は $\sigma_N = 2 \text{ kg/cm}^2$ (一定)、初期間げき比 $e_i = 0.748$ である。この図よりピーク強度までのプロットはほぼ一直線上にのり、その勾配は1.4~1.5で(17)式の λ と一致し、縦軸切片 μ も豊浦標準砂の場合には0.45前後の値となって、Rowe の求めたこの砂の粒径に対する粒子間摩擦³⁾とほぼ等しいことがわかる。Fig. 10 は豊浦標準砂の排水三軸試験結果を整理したものである。三軸試験データに適用

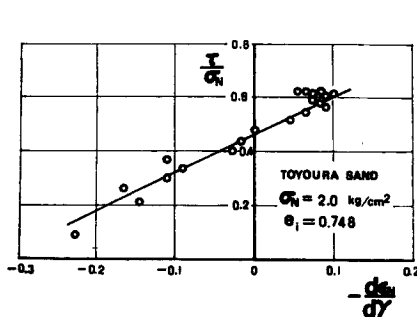


Fig. 9 Relationship between τ/σ_N and $d\epsilon_N/d\gamma$ obtained by simple shear test (σ_N : const.).

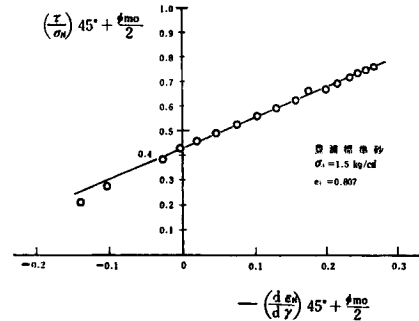


Fig. 10 Relationship between τ/σ_N and $d\epsilon_N/d\gamma$ on the $(45^\circ + \phi_{m0}/2)$ plane obtained by triaxial test (σ_3 : const.).

するには整理する応力面が問題になるが、土粒子が最も活発に滑動するであろう潜在すべり面上で整理するのが適当であると考えられるので、 $(\tau/\sigma_N)_{\max}$ 面すなわち $(45^\circ + \phi_{m0}/2)$ 面 (ここに $\tau/\sigma_N = \tan \phi_{m0}$) 上で整理した。この図より直線勾配1.2も縦軸切片0.43もほぼ(17)式に対応するのがみられる。なお三軸試験の場合は、キャップとペダスタル付近のくさび型のデッド・ゾーンの影響のためか直線勾配 λ は少々小さくなって1.2程度となるものが多いようである。

次に、同じく豊浦標準砂を試料とし単純せん断試験機を用いてせん断中に1つは垂直応力 σ_N を1.0から2.23 kg/cm²まで連続的に増加させ、他の1つは σ_N を2.0から0.98 kg/cm²に減少させる実験を行なった。そのデータを τ/σ_N と $d\epsilon_N/d\gamma$ の関係で整理してそれぞれ Fig. 11, Fig. 12 に示した。Fig. 11の直線勾配は1.2~1.3、縦軸切片は0.47であり、Fig. 12の場合はそれぞれ1.5, 0.42である。これらの差を工学的な意味から無視することが許されれば、Fig. 9~12は(17)式が少なくとも砂については応力径路(stress

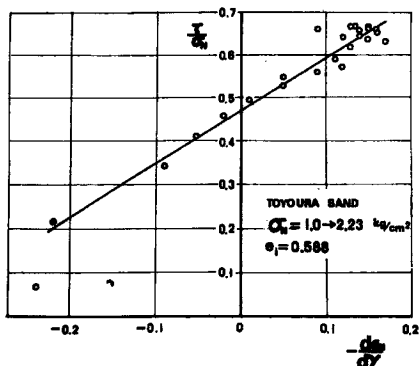


Fig. 11 Relationship between τ/σ_N and $d\epsilon_N/d\gamma$ obtained by simple shear test (σ_N : increase).

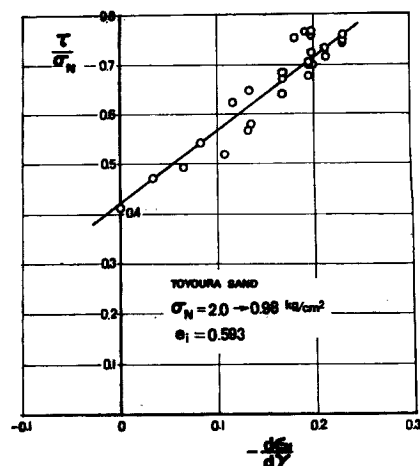


Fig. 12 Relationship between τ/σ_N and $d\epsilon_N/d\gamma$ obtained by simple shear test (σ_N : decrease).

path) にかかわらず成立するであろうことを示している。このことは、一般に砂の圧縮性が小さいことと関係しているものと思われる。

次に(18)式を検証するため、Fig. 11と同じ実験データを用いて τ/σ_N と ϵ_N の関係で整理したのが Fig. 13である。この図より、せん断初期においては ϕ_μ の mobilization が十分でないのでプロットは計算曲線(実線)からはずれるようであるが、その後はほぼ一致しているのがみられる。なお $\bar{\theta}_0$ は ϵ_N の最大圧縮値から(14)、(15)式によって計算した。

さて、(17)、(18)式を粘土のせん断試験データに適用することを試みる。粘土の構造の電子顕微鏡観察によれば、団粒 (aggregate) と呼ばれるいくつかの粘土粒子が集合した固まりが存在することである⁴⁾ が、もしこの団粒がせん断時に行動単位として1個の砂粒と同様に挙動するものとすれば、前述の砂に対するせん断のメカニズムは粘土に対しても適用可能なように考えられる。Fig. 14は正規圧密状態の藤の森粘土について平均主応力 $p=1.0 \text{ kg/cm}^2$ (一定) の排水三軸試験を行なった結果を $(45^\circ + \phi_{m0}/2)$ 面上の $\tau/\sigma_N \sim d\epsilon_N/d\gamma$ 関係で整理したものである。プロットは一直線上にのり、その勾配 1.2 もほぼ対応する。また縦軸

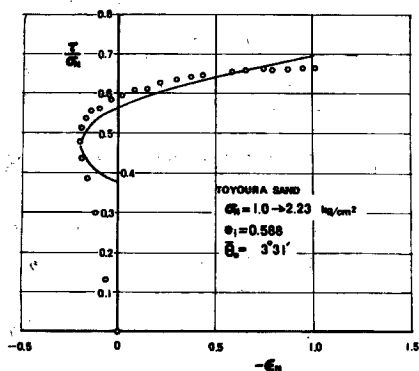


Fig. 13 Relationship between τ/σ_N and ϵ_N obtained by simple shear test (σ_N : increase).

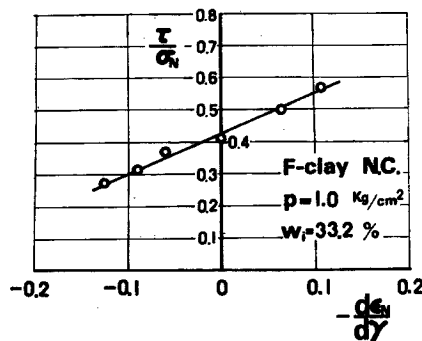


Fig. 14 Relationship between τ/σ_N and $d\epsilon_N/d\gamma$ on the $(45^\circ + \phi_{m0}/2)$ plane obtained by triaxial test (Fujinomori clay).

切片がこの粘土の砂の粒子間摩擦に対応する物理定数たりえないかと考えている。Fig. 15 は Fig. 14 のデータを $(45^\circ + \phi_{m0}/2)$ 面上の τ/σ_N と ϵ_N の関係で整理したものであるが、(18) 式による計算曲線とプロットはほぼ良好な対応を示しているのがみられる。

Fig. 16 は (20) 式を検証するために、神戸の石井川砂の三軸試験結果を σ_1/σ_3 と $d\epsilon_3/d\epsilon_1$ の関係で整理したものである。計算曲線は $\lambda=1.2$ とこの川砂の粒子間摩擦の実測値 $\mu=0.62$ から計算されたものであるがよく一致している。粒子間摩擦は、この川砂が花崗岩が風化してできたものであることから、一面せん断試験機の下半に花崗岩の板を設置し、上半にこの川砂をつめて載荷重と摩擦力の関係から求めた³⁾。なお Rowe の応力-ダイレイタンス理論³⁾によれば Fig. 16 に対する理論値は原点を通る直線となるので、この実測値は説明しにくいようである。

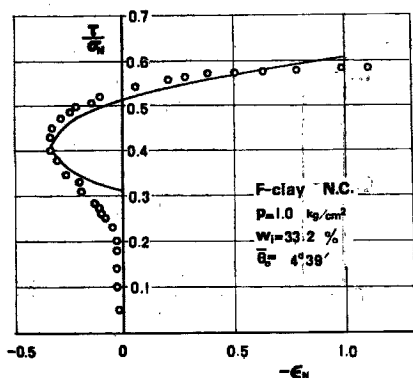


Fig. 15 Relationship between τ/σ_N and ϵ_N on the $(45^\circ + \phi_{m0}/2)$ plane obtained by triaxial test (Fujino-mori clay).

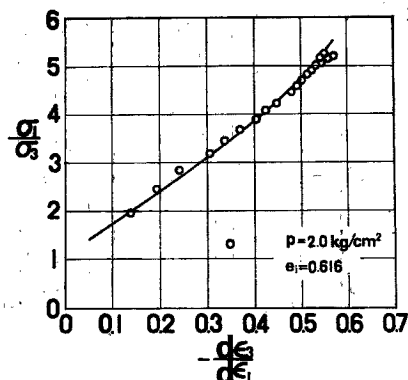


Fig. 16 Relationship between σ_1/σ_3 and $d\epsilon_3/d\epsilon_1$ (Ishii River sand).

次に(24)式に対する実測データのプロットを Fig. 17~21 に示す。Fig. 17 の試料は豊浦標準砂で、実験条件は平均主応力 σ_m が $0.5 \sim 2.0 \text{ kg/cm}^2$ 、初期間げき比 e_i が $0.689 \sim 0.941$ の4ケースである。Fig. 18 の試料は石井川砂で、実験条件は $\sigma_m=2 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_3=1 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_3=2 \text{ kg/cm}^2$ 2 ケース、計4ケースで、 e_i は $0.616 \sim 0.793$ である。Fig. 19 の試料は大阪の梅田粘土で、実験条件は $\sigma_3=1 \text{ kg/cm}^2$ と $\sigma_3=4 \text{ kg/cm}^2$ でいずれも正規圧密である。Fig. 20 の試料は京都の藤の森粘土で、実験条件は $\sigma_m=1 \text{ kg/cm}^2$ と $\sigma_3=1 \text{ kg/cm}^2$ の正規圧密と $\sigma_m=1 \text{ kg/cm}^2$ の過圧密 ($O.C.R.=1.5$) である。Fig. 21 はガラス・ビーズの単純せん断試験のデータであって、実験条件はいずれも $\sigma_N=2 \text{ kg/cm}^2$ 、 e_i は $0.580 \sim 0.605$ である。なお○、①印は砂径のガラス・ビーズ、●印は微細なシルト径のガラス・ビーズである。これらの図より(24)式の示す半対数紙上での直線性はほぼ成立するのがみられる。なお Fig. 17~21 の直線勾配は(24)式の係数とほぼ対応するようであるが、詳細な議論はさらに検討を加えた後に行ないたい。この直線勾配はその試料の粒子間摩擦や粒子構造などによって規定されるものと考えられる。

最後に(22)、(23)式と(25)、(26)式に対する実測データのプロットを Fig. 22~Fig. 28 に示す。Fig. 22、23 は豊浦標準砂の潜在すべり面上の $\tau/\sigma_N \sim \gamma \sim \epsilon_N$ 関係と $\sigma_1/\sigma_3 \sim \epsilon_1 \sim \Delta V/V$ ($=\epsilon_1 + 2\epsilon_3$: 体積ひずみ) 関係の実測データと計算曲線(実線)の比較を示したものである。実験条件は $\sigma_m=2 \text{ kg/cm}^2$ 、 $e_i=0.926$ である。Fig. 24、25 は石井川砂の場合で、 $\sigma_3=1 \text{ kg/cm}^2$ 、 $e_i=0.706$ である。Fig. 26、27 は藤の森粘土の場合で $\sigma_m=1 \text{ kg/cm}^2$ の正規圧密である。Fig. 28 はガラス・ビーズ(砂径)の単純せん断試験の場合で、 $\sigma_N=2 \text{ kg/cm}^2$ 、 $e_i=0.580$ である。これらの図より(22)、(23)式と(25)、(26)式による計算曲線(実線)は実測データ(○印)

をかなりよく説明するのがみられる。上記提案式中の係数 $\lambda, \mu, \mu', \gamma_0, \bar{\theta}_0$ の中には定数とか材料固有の係数と考えられるもの、またはそれらと関係のあるものがあるので、結局 γ_0 の決定が重要となる。 γ_0 は e_c や拘束応力などに依存するものと考えられるが、その予測法については現在検討中である。なお以上の関係式は基本的には粒子の自由な運動が許される排水せん断試験に適用すべきものであるが、圧密の影響を加えることによって非排水せん断試験にも適用できると考えている。

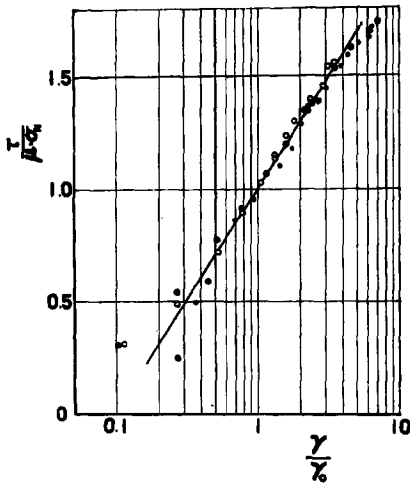


Fig. 17 Relationship between $\tau/\mu\sigma_N$ and γ/γ_0 (Toyouura sand).

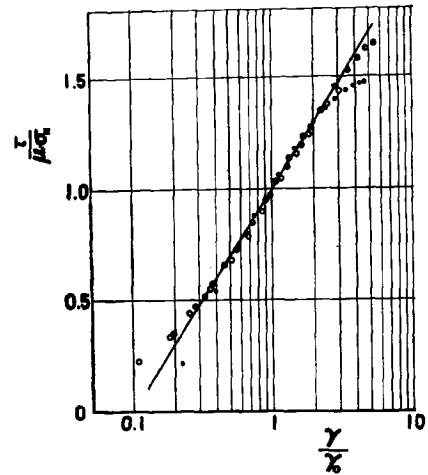


Fig. 18 Relationship between $\tau/\mu\sigma_N$ and γ/γ_0 (Ishii River sand).

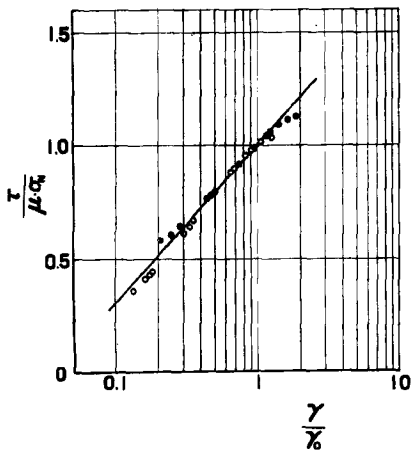


Fig. 19 Relationship between $\tau/\mu\sigma_N$ and γ/γ_0 (Umeda clay).

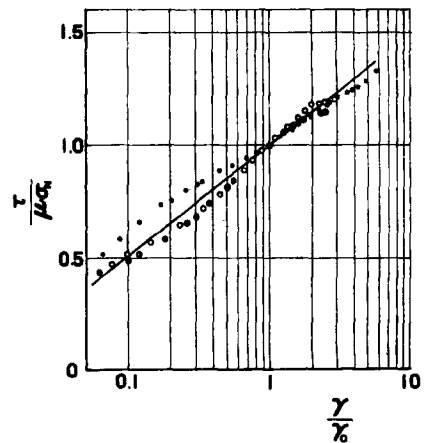


Fig. 20 Relationship between $\tau/\mu\sigma_N$ and γ/γ_0 (Fujinomori clay).

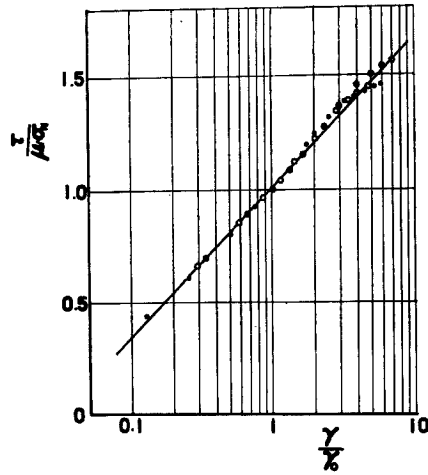


Fig. 21 Relationship between $\tau/\mu\sigma_N$ and γ/γ_0 (glass beads).

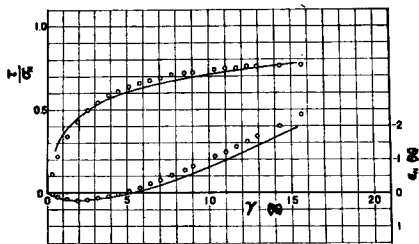


Fig. 22 Relationship among τ/σ_N , γ and ϵ_N (Toyoura sand).

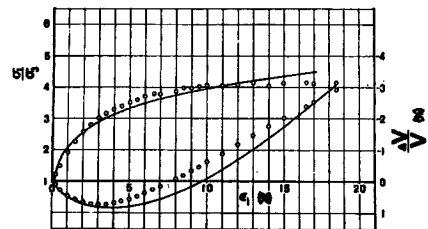


Fig. 23 Relationship among σ_1/σ_3 , ϵ_1 and $\Delta V/V$ (Toyoura sand).

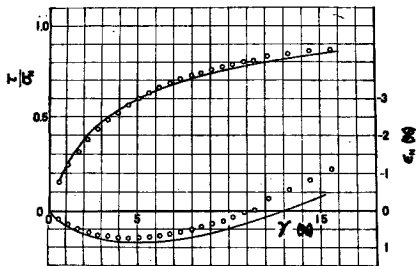


Fig. 24 Relationship among τ/σ_N , γ and ϵ_N (Ishii River sand).

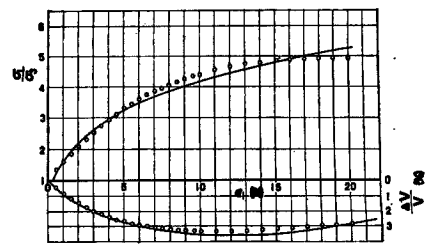


Fig. 25 Relationship among σ_1/σ_3 , ϵ_1 and $\Delta V/V$ (Ishii River sand).

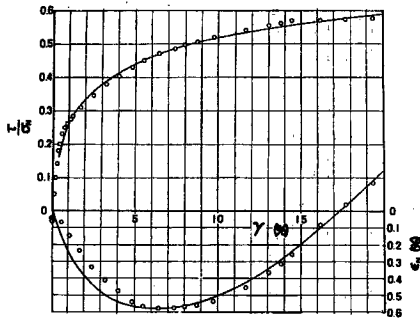


Fig. 26 Relationship among τ/σ_N , γ and ϵ_N (Fujinomori clay).

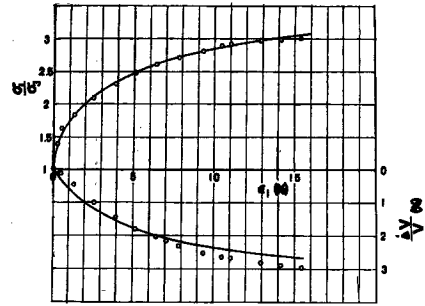


Fig. 27 Relationship among σ_1/σ_3 , ϵ_1 and $\Delta V/V$ (Fujinomori clay).

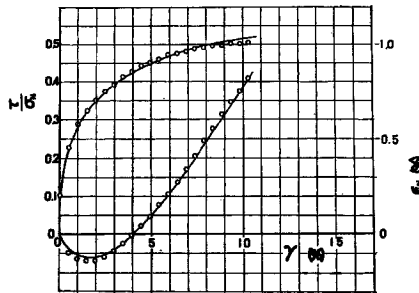


Fig. 28 Relationship among τ/σ_N , γ and ϵ_N (glass beads).

4. 結 語

以上、微視的な観点からせん断時の土の応力-ひずみ関係式を誘導し、それらを砂および粘土の実測データと比較して良好な対応を示すことを述べた。ここで誘導された応力-ひずみ関係式 (22) 式が、偶然にも龍岡による砂の応力-ひずみ関係の実験式 (指数型)⁵⁾ と全く対応する形になっていることは、1つの検証データを得られたことを意味するであろう。ただし、着目した変数には τ/σ_N と q/p ($q = \sigma_1 - \sigma_3$, $p = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$), γ/γ_0 と η/η_0 ($\eta = \epsilon_1 - \epsilon_3$, $\eta_0: q/p = a$ のときの η) の差がある。また、最も重要な基本式の1つである $\tau/\sigma_N \sim d\epsilon_N/d\gamma$ 関係 (17) 式は Coulomb 系の摩擦法則にもとづくものと考えられ、したがって全ての整理を $(\tau/\sigma_N)_{max}$ 面すなわち $(45^\circ + \phi_{m0}/2)$ 面上で行なったわけである。そして土のせん断特性を支配するのはこの面あるいは領域であると考えている。この (17) 式は 3. で述べたように砂については圧縮性が小さいためほぼ応力径路によらずに成立するようである。これに対して Roscoe 一派の主張する $q/p \sim dv/d\epsilon$ ($dv = d\epsilon_1 + 2d\epsilon_3$, $d\epsilon = 2(d\epsilon_1 - d\epsilon_3)/3$) 関係⁶⁾ は von Mises 系のものであり、応力に対して方向性がない。またこの関係式では応力径路にかなり支配されるようである。これらのことより、土は基本的にはみかけ上の摩擦法則に従う材料であり、(17) 式の方がより本質的な関係式であると考えられる。

最後に、御指導を賜った村山朗郎教授に深謝の意を表します。また適切な助言をいただいた神戸大学軽部大蔵助教授、上記関係式の一般性と原理性について議論しあった東大院生龍岡文夫氏、データ整理および実験を手伝って下さった京大研究員 (現・不動建設) 末松直幹氏ならびに研究室の方々には感謝致します。なお実験データの一部は三好・浅居寛二両氏の実験によるもので謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 村山朔郎・松岡 元：砂と粘土のせん断特性の類似性とそのメカニズムについて，京都大学防災研究所年報，第14号B，昭46. 4，pp. 551-563.
- 2) 村山朔郎・松岡 元・末松直幹：微視的観点から誘導した土の応力-ひずみ関係について，第7回土質工学研究発表会，昭47. 6，pp. 177-180.
- 3) Rowe, P.W.: The Stress-dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 269, 1962, pp. 500-527.
- 4) Pusch, R.: Micro-structural Changes in Soft Quick Clay of Failure, Canadian Geotech. J., Vol. 7, No. 1, 1970, pp. 1-7.
- 5) 龍岡文夫：三軸圧縮における砂の応力-歪特性，第6回土質工学研究発表会，昭46. 6，pp. 205-208.
- 6) 例えば，Schofield, A.N. and C.P. Wroth: Critical State Soil Mechanics, 1968, McGraw-Hill, London.