

Derived Category と Stable Equivalence

上武大学経営情報学部 若松隆義

(Takayoshi Wakamatsu)

体 k 上の多元環 A が与えられたとき, 有限生成右 A -加群全体の成す category を $\text{mod-}A$ で表す. 同様に有限生成左 A -加群の category は $A\text{-mod}$ と記す. k -dual を取る操作で, この 2 つの category の間に functor が定義されるが, これを D で表す. DA はこれ等の category の中で, 最小の injective cogenerator となり, $D \cong \text{Hom}_A(?, DA)$ が成立する.

A -加群 T_A が, 次の 3 つの条件を満足するとき, これを tilting module と呼ぶ.

$$(i) \quad \text{proj.dim } T_A \leq 1$$

$$(ii) \quad \text{Ext}_A^1(T_A, T_A) = 0$$

$$(iii) \quad 0 \rightarrow A_A \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow 0, \quad T_i \in \text{add } T_A$$

なる short exact sequence が存在する.

tilting module T_A に対して, $B = \text{End}(T_A)$ とおき,
 自然に左 B -加群 ${}_B T$ を考えると, これが再び tilting module
 となり, $\text{End}({}_B T) = A$ となることが知られている.

多元環 A に対して, その DA による自明拡大多元環
 $T(A) = A \ltimes DA$ (加群としては $T(A) = A \oplus DA$ であって,
 積が $(a_1, q_1)(a_2, q_2) = (a_1 a_2, a_1 q_2 + q_1 a_2)$ で定義される
 もの) を考えると, これは対称多元環, 従って, QF-多元環と
 なる.

category $\text{mod-}T(A)$ の中で, projective = injective
 加群を通過するような写像の全体は両側 ideal となり, この
 ideal による剰余 category $\underline{\text{mod-}}T(A)$ が定義される.
 $\text{mod-}A$ は, この中に full に埋めこまれるから, A の表現論を展
 開する場合, $\underline{\text{mod-}}T(A)$ を利用することは自然な発想である.

tilting module ${}_B T_A$ があるとき, これを用いて, 上で
 定義された剰余 categories $\underline{\text{mod-}}T(A)$, $\underline{\text{mod-}}T(B)$ の間に
 category equivalence $\&_T : \underline{\text{mod-}}T(A) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{mod-}}T(B)$
 が定められる. 従って, $\text{mod-}A$, $\text{mod-}B$ の変化の様子を,
 これ等に共通の拡大された category の中で調べることができる
 訳である.

しかし、一方、tilting moduleの条件の1つである射影次元 ≤ 1 はあまりに強過ぎて、この理論の応用範囲が限られてしまう。従って、射影次元に関する条件を除いた所で、同様の理論が展開できないものであろうか？という問題が生じてくる。

そこで、tilting moduleの持っている性質

$$(i) \quad {}_B T_A : \text{faithfully balanced } (B = \text{End}(T_A),$$

$$\text{End}({}_B T) = A),$$

$$(ii) \quad \text{Ext}_B^i({}_B T, {}_B T) = 0 = \text{Ext}_A^i(T_A, T_A) \text{ for } \forall i \geq 1.$$

に注目して、この2条件を満足する加群を、一般化された tilting moduleと呼ぶことにする。このように一般化しておけば、tilting moduleは、次に述べる一般化された中山予想とも関係を持ってくる。

一般化された中山予想とは、多元環 A に対して、 A_A の

$$\text{injective resolution } 0 \rightarrow A_A \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots$$

を考えると、すべての直既約な injective A -加群は、必ずある k に対して、 I_k の直和因子として現れるであろうというものである。

T_A として、ある I_k の直和因子に出てくる直既約な

injective A -加群全体の直和をとれば, $B = \text{End}(T_A)$ として,

${}_B T_A$ が一般化された tilting module となることが証明される

から, 上の予想は, $K_0(A) \cong K_0(B)$ が成立するか? という

問題と考えられる. 実際, T_A の直和因子にすべての直既約

な injective A -加群が現れるということは, B の非同型な

idempotent primitive な元の個数が, A のそれと一致するとい

うことに同値だからである.

従って, 次の問題は, 一般化された中山予想の, 更なる一般化として自然に考えられるものである.

問題: 一般化された tilting module ${}_B T_A$ に対して,

$K_0(B) \cong K_0(A)$ は成り立つか?

これは, ${}_B T_A$ が普通の意味での tilting module である

場合には, Happel-Ringel によって証明されている. これと

関連して, Auslander の問題: QF 多元環 A, B に対して同値

$\text{mod-}A \cong \text{mod-}B$ があるとき, $K_0(A) \cong K_0(B)$ はどんな場合

に成立するか? というものも関係してくることを述べておきたい.

次の問題を考える.

で解説し, Derived Categoryとの関連についても述べておきたい.

${}^T_B A$ が普通の意味の tilting module である場合には,

任意の有限生成 A -加群 X_A に対して,

$$0 \rightarrow X_A \rightarrow V(X) \rightarrow T(X) \rightarrow 0$$

という short exact sequence で $V(X)_A \in \text{add } T_A$, $T(X)_A$

$\in \text{KerExt}_A^1(T_A, ?)$ というものが一意的に存在し, これを用い

て同値 $\cong: \text{mod-}T(A) \rightarrow \text{mod-}T(B)$, $\text{mod-}\hat{A} \rightarrow \text{mod-}\hat{B}$

が定義された (太刀川-若松 [8] 参照). 一般化された

tilting module で, $\text{pd}_B T$, $\text{pd}_A T < \infty$ という条件を満足する

ものについても, 同様の sequence を構成し, それを用いて,

全く同様に functor を定義する. 普通の tilting module の

場合には, Brenner-Butler の定理によって, $\text{KerExt}_A^1(T_A, ?)$

$$\cong \text{KerExt}_A^1(?, DT_B), \text{KerHom}_A(T_A, ?) \cong \text{KerHom}_A(?, DT_B)$$

なる同値の存在することが示されて, これを用いて, $\cong$ が

well-defined であることや同値であることが証明されるのだ

が, 一般化された tilting module の場合には, この Brenner-

Butlerの定理の拡張が必要である。 ${}_B T_A$ に $\text{pd}_B T$, $\text{pd}_A T$

$< \infty$ なる条件を加えたものは、宮下 [5] にある tilting module with finite projective dimension と全く同じもので

あり、 $\forall k \geq 0$ に対して、 $\bigcap_{\substack{i \geq 0 \\ i \neq k}} \text{KerExt}_A^i(T_A, ?) \cong$

$\bigcap_{\substack{i \geq 0 \\ i \neq k}} \text{KerExt}_A^i(?, D_B T_B)$ という同値が存在するという形で

Brenner-Butlerの定理の拡張が与えられる。 [5] では、多元環ではなく、一般的な環に対して定義されているが、我々の場合には、上で述べた sequence を利用して、上の同値を、具体的に、ある種の複体の集合の対応として証明することができる。

この sequence の存在は次のようにして示される。考える sequence は、 $0 \rightarrow X_A \rightarrow V(X) \rightarrow W(X) \rightarrow 0$ の形であって、

$V(X) \in \bigcap_{i \geq 1} \text{KerExt}_A^i(T_A, ?)$, $0 \rightarrow W(X) \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow$

$\dots \rightarrow T_n \rightarrow 0$ ($T_i \in \text{add } T_A$) となるものである。はじめに、

$k=0$ の場合に、 $\bigcap_{i \geq 1} \text{KerExt}_A^i(T_A, ?) \cong \bigcap_{i \geq 1} \text{KerExt}_A^i(?, D_B T_B)$

を示しておき, $\text{gen}_A^\infty(T_A) = \bigcap_{i \geq 1} \text{KerExt}_A^i(T_A, ?)$ となる

ことを証明しておく. 仮定 $\text{pd}_A T < \infty$ を用いると,

$\text{Ext}_A^i(T_A, X_A) \neq 0$ なる最小の自然数 n_X が存在するから,

この数に関する induction で存在を示す. $n_X = 0$ の場合

には, $k = 0$ の場合の同値を用いて, $V(X) = X$, $W(X) = 0$

とできる. $n_X \geq 1$ の場合には, induction の仮定から,

$X \hookrightarrow I$ を injective envelope とするとき, I/X に対しては,

考えている sequence は存在する. $V(I/X)$ は

$$\bigcap_{i \geq 1} \text{KerExt}_A^i(T_A, ?) = \text{gen}_A^\infty(T_A)$$

に属しているのだから, $\text{add}(T_A)$ の加群 T_* から $V(I/X)$

への全射が存在する. これを用いて次の図式で $V(X)$,

$W(X)$ が定義できる.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \hookrightarrow & V(X) & \twoheadrightarrow & W(X) & \hookrightarrow & T_* \twoheadrightarrow W(I/X) \\ \parallel & & \downarrow & & \textcircled{\text{PB}} & & \downarrow & & \parallel \\ X & \hookrightarrow & I & \twoheadrightarrow & I/X & \hookrightarrow & V(I/X) & \twoheadrightarrow & W(I/X) \end{array}$$

このとき, $V(X) \in \bigcap_{i \geq 1} \text{KerExt}_A^i(T_A, ?)$ が簡単に示されて,

求める sequence が得られる訳である。

先にも述べたように，この sequence は， δ が定義されて，同値であることを示すのに必要な性質をすべて持っており，普通の tilting module の場合の証明が，そのままの形で今の場合にも適用される．これで 2 番目の問題が証明される．

初めの問題は， $K_0(A)$ から $K_0(B)$ への写像として，

$$\dim_A X \mapsto \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{A/B} \operatorname{Ext}_A^i(T, X) \quad \text{を定義して，}$$

これが同型を与えていることを証明するのであるが，詳しくは [4] 又は [9] を参照されたい．この問題では，上の対応を複体の間の対応として理解すると見やすいが，ここでも，上で示した sequence を利用することができる．しかし，上の対応に出てくる和が，実際には有限和となることが本質的であり，この部分を上手に解釈する方法が求められる．実際

[9] の方法では， $\operatorname{pd}_B T, \operatorname{pd}_A T < \infty$ の条件抜きでも，和の

部分が有限和となる場合に， $K_0(A), K_0(B)$ の元の間

1 対 1 の対応が定義できることが示される．

Happel [3] は， $\operatorname{gl.dim} A < \infty$ の場合に， $\operatorname{mod-}\hat{A}$ と

$D^b(\operatorname{mod-}A)$ とが triangulated category として同値になること

を示した. Derived category $D^b(\text{mod-}A)$ に対しても,
 この triangulation を用いて Grothendieck group

$K_0(D^b(\text{mod-}A))$ が定義できて, 同型 $K_0(D^b(\text{mod-}A))$
 $\cong K_0(\text{mod-}A) \cong K_0(A)$ が成立しているから, tilting

module ${}_B T_A$ が存在するときに, triangulated category

としての同型 $D^b(\text{mod-}A) \cong D^b(\text{mod-}B)$ の存在が示されれば,
 $K_0(A) \cong K_0(B)$ が示されることになる. しかし, 彼の

証明では, $\text{gl.dim } A < \infty$ が本質的であって, この範囲では,
 先に述べた2つの問題に関しては, derived categoryを導入
 する必要はない. 一般の tilting moduleに対して, 彼流
 の方法で向かうためには, まず, $\text{mod-}T(A)$, $\text{mod-}\hat{A}$ に対応

する derived categoryを求めて, それを $D^*(A)$ で表すことに

して, 次に, $D^*(A) \cong D^*(B)$ を示し, 更に, $D^*(A)$ の

Grothendieck groupが $\text{mod-}A$ のそれと同型になることを示す
 ことが必要である. 今の所, この方面で結果は知られていな

い. しかも, Auslanderの問題との関連を考える場合には,
 $\text{gl.dim } A < \infty$ という条件があっても, 一般には, $\text{mod-}\hat{A}$

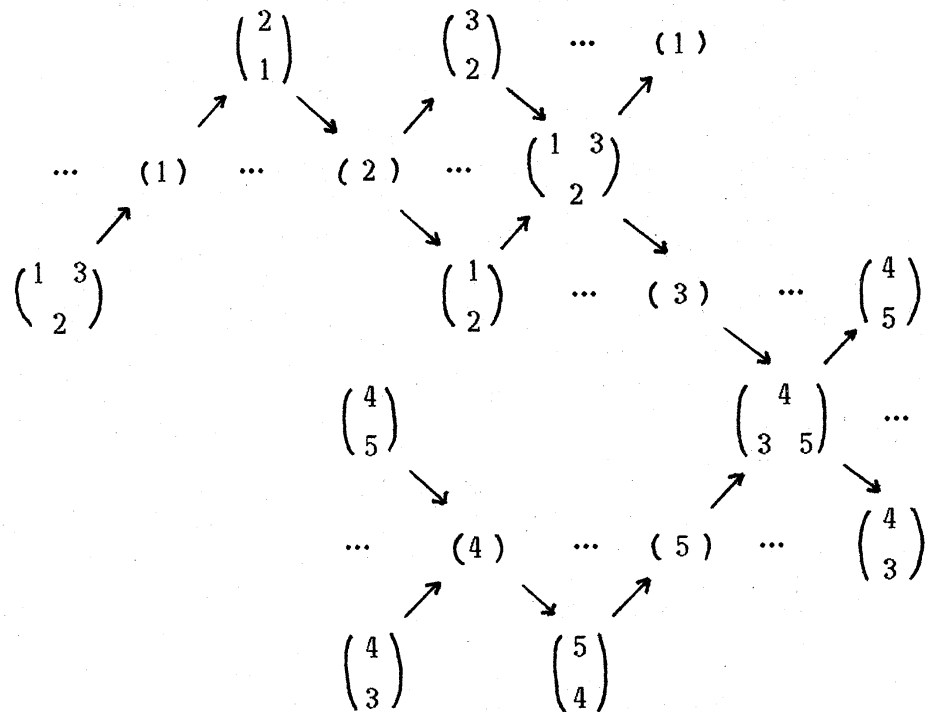
(従って, $D^b(\text{mod-}A)$) だけでは $\text{mod-}T(A)$ が十分に表せないから, 方法として不満足なものに見える. しかし, $K_0(A)$ と $K_0(B)$ の比較を行う場合には, 道具として derived category は有効であろう. 適当な $D^*(A)$ を定めることが, とにかく第一歩である.

同値 ∞ が与えられるような, 一般化された tilting module ${}_B T_A$ で, $\text{pd}_B T, \text{id}_B T, \text{pd}_A T, \text{id}_A T = \infty$ のものとして, 次の example を挙げておく.

多元環 A の quiver: $1 \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} 5$

relation: $J(A)^2 = 0$; ここで, $J(A)$ は A の radical.

このとき, Auslander-Reiten quiver Γ_A は次のようになる.



ここで, $T_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus (3) \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

とおけば求める example となることが check できる.

参考文献

- [1] M.Auslander and I.Reiten, On a generalized version of the Nakayama conjecture, Proc.Amer. Math.Soc.52(1975),69-74.
- [2] E.Cline, B.Parshall and L.Scott, Derived categories and Morita theory, J.Alg.104(1986), 397-409.
- [3] D.Happel, Triangulated categories in representation theory of finite dimensional algebras, Preprint.
- [4] D.Happel and C.M.Ringel, Tilted algebras, Trans.Amer.Math.Soc.274(1982),399-443.
- [5] Y.Miyashita, Tilting modules with finite projective dimension, Math.Z.193(1986),113-146.
- [6] T.Nakayama, On algebras with complete homology, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 22(1958),300-307.
- [7] H.Tachikawa, Quasi-Frobenius rings and generalizations, LNM 351(1973), Springer.

- [8] H.Tachikawa and T.Wakamatsu, Tilting functors and stable equivalences for self-injective algebras, Preprint.
- [9] T.Wakamatsu, On modules with trivial self-extensions, Preprint.