

代数的スライソ曲面

名大 理 梅 村 浩

複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された代数的多様体 (特にことわらな
い限り non-singular), 又は complex manifold を考へ
ることとする。

X を代数的多様体とすると, X から自然に complex manifold
 X^{an} が定義される。algebraic cohomological dimension $\text{alg cd}(X)$,
analytic cohomological dimension $\text{an cd}(X^{\text{an}})$ を次のように定義する。

$$\text{alg cd } X = \min \{ m \mid H^l(X, \mathcal{F}) = 0, \forall l > m, \forall \text{ 代数的} \\ \text{coherent sheaf } \mathcal{F} / X \}$$

$$\text{an cd } X^{\text{an}} = \min \{ m \mid H^l(X^{\text{an}}, \mathcal{F}) = 0, \forall l > m, \forall \text{ 解析的} \\ \text{coherent sheaf } \mathcal{F} / X \}$$

問題

$\text{alg cd } X$ と $\text{an cd } X^{\text{an}}$ を比較せよ。

次の定理はよく知られてゐる

代数的

解析的

 $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

$$\text{alg cd } X = \dim X \iff X \text{ complete}$$

$$\text{an cd } X = \dim X \iff X \text{ compact}$$

このことを使って低次元の多様体の alg cd と an cd をくらべて、

	$\text{alg cd } X$	$\text{an cd } X^{\text{an}}$
$\dim X = 1$	$\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$
$\dim X = 2$	$\begin{cases} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

のようになった。したがって次元が2の時 $\text{alg cd } X = 1$, $\text{an cd } X^{\text{an}} = 0$ となるものが存在する可能性がある（実際に沢山あることはあとでわかる）。 $\text{alg cd } X$ と $\text{an cd } X$ をくらべるにあたってまずこのような代数曲面、つまり $\mathbb{A}^2$ でなくて $\mathbb{A}^2$ の部分となるような代数曲面をしろべよう。

以下代数的な事実と解析的な事実をひかくして書きなすべし。

代数的

Th

任意の algebraic coh. sheaf $\mathcal{F}$, $\forall r > 0$
 として $\dim_{\mathbb{C}} H^r(X, \mathcal{F}) < \infty$



X は affine 多様体の modification
 (X は non-sing. と $\mathbb{P}^n$ となり。)

解析的

Th

$\forall$ analytic coh. s. $\mathcal{F}$, $\forall r > 0$
 $\dim_{\mathbb{C}} H^r(X, \mathcal{F}) < \infty$



X は Stein 多様体の
 modification

Th

$\text{alg. cd } X = 0 \Leftrightarrow X : \text{affine}$

Th

$\text{an cd } X = 0 \Leftrightarrow X : \text{Stein}$

Th

affine 多様体の カテゴリーと
 $\mathbb{C}$ -algebra の カテゴリーは dual である。

Th

Stein space の カテゴリーと
 Stein algebra の カテゴリー
 は dual である。

代数曲面の alg cd と an cd を比べるのが問題であったが、ま
 ず具体的に次の問題を考える。

X を完備代数曲面, $C \in X$ 上の irreducible curve とする。

その時,

問題

$X - C$ が Stein 多様体となる numerical な条件は存在するか。

つまり:

代数的

解析的

$\mathbb{R}$ 上の X , C について

次は同値

∃
?

(i) $X - C$ は affine.

(ii) C は ample.

(iii) $(C^2) > 0$, C と異なる任意の X 上の
curve D に対して $(C \cdot D) > 0$.

次のことは成り立つのか。

(*) $X - C$ が Stein $\iff (C^2) \geq 0$, C と異なる X 上の curve D
に対して $(C \cdot D) > 0$

(*) についていくらかの結果および興味ある例について以下に
のべる。

まず $\Rightarrow$ は正しい。

$\Rightarrow$ の証明。 Stein 多様体には complete curve は多く存在する
から, $(C \cdot D) > 0$ 。 - 一方 $L(C^2) < 0$ なる, C は 1 点に contract
する。つまり X' compact analytic space ^{があって} 1 点 P をぬくと $X - C$
に同型 $X' - P \cong X - C$, $X' - P$ が Stein であることかいてこれを
証明すればよい。実際 $X' - C$ は 1-pseudo-concave である。(Andreatti-
Grauert 参照) 次の定理を使う

$\mathbb{R}$. Z : f -pseudoconcave $\Rightarrow H^r(Z, \mathbb{C}) < \infty$, $\forall r < \dim_{\mathbb{C}} Z - f$

✓ coherent sheaf / 2

この仮を使うと $H^0(X-P, \mathcal{O}_{X-P})$ の次元は有限次元, した

が, $X-P$ は $\mathbb{A}^n$ 多様体になりえなり.

(*) の $\Leftarrow$ により考えてみよう.

特に $(C^2) > 0$, ならば $X-C$ affine したがって Stein である, したがって

$$(**) \quad (C^2) = 0, \quad (C \cdot D) > 0 \iff X-C$$

が正しいかということに帰着する.

(**) が正しいかどうか今のところ証明できていない. これが正しいわけ次にみるように決山ある. 反例はあかっている.

解 1.

C : elliptic curve とする. $\exists \gamma \in H^1(C, \mathcal{O}_C)$ に対する non-trivial extension $0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ を考える. $X = P(E)$ とする. C として上の exact sequence から決る $P(E) \rightarrow C$ の section π とする. 計算 (あまり容易ではない) により, $(C^2) = 0$, C 以外の X 上の curve D に対して $(C \cdot D) > 0$. この場合 $X-C \simeq_{\text{an}} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ となり特に $X-C$ は Stein であることがわかる. 仮定より, $X-C$ は elliptic curve C 上の principal $\mathbb{G}_a$ -bundle である.

$H^1(C, \mathcal{O}_C) \simeq \text{Ext}^1(C, G_a)$ に注意すると、 $X-C$ は Lie 群である。

$$0 \rightarrow \underset{\mathbb{C}}{G_a} \rightarrow (X-C) \rightarrow C \rightarrow 0$$

次に $X-C \subseteq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} / (\omega_1, \omega_2)$ 。さて ω_1, ω_2 が $\mathbb{C}$ 上 dependent なら、 $X-C \subseteq \mathbb{T} \times \mathbb{C}$ となる、 $X-C$ が complete curve になってしまうから、 ω_1, ω_2 は $\mathbb{C}$ 上 independent である。したがって $X-C \underset{\text{an.}}{\simeq} G_m \times G_m$ 。

ところで (**) の条件を満たす曲面をさがすことがあまりたやすいことではない。

例 2.

C : Curve genus は 2 以上とする。例 1 と同じように extension $0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ を考える。 $P(E) = X$ C と同様にして定めると、 $(C^2) = 0$, $(C, D) > 0$ である。 $X-C$ は Stein であろうか。これは現在のところ不明である。Stein というには holomorph convex かいえれば十分である。次に、例 2 により (**) が正しい $\Leftrightarrow$ genus 2 以上の Riemann 面上の principal $\mathbb{C}$ -bundle は holomorph convex である。

open Riemann 面は Stein であるから 松島-森本の定理によって X 上の principal $\mathbb{C}$ -bundle は Stein である。したがってさらに

一般に

(***) Riemann 面上の principal $\mathbb{C}$ -bundle は holomorph convex だ。
(open の場合, genus が 0, 1 の場合は正しい。)

さて例 2 において $X - C$ は principal G_a -bundle である。 J を C の Jacobian variety とする。 $H^1(C, \mathcal{O}_C) \cong H^1(J, \mathcal{O}_J) \cong \text{Ext}^1(J, G_a)$ によって J 上の principal $G_a = \mathbb{C}$ -bundle Z が存在して, $X - C \cong L^*(Z)$ として $C \hookrightarrow J$ である。 Z は Lie 群である。

$$\begin{array}{ccc} X - C & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \hookrightarrow & J \end{array}$$

故に Z が holomorph convex がいえなると $X - C$ が holomorph convex であることがわかる。

いつでも Z はそうか。実はかならずしもそうならないのである。

例 3

例 2 の場合の特別な場合を考えよう。 C の Jacobian variety が $E \times E$, E は elliptic curve と仮定とする。(このような curve の存在については (B) を参照。) その時上の Z は $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ を rank 4 の discrete subgroup でわってえられる。 $E \cong \mathbb{C}/\Lambda$ とすると Z の周期行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & u & v \end{pmatrix}$$

の型をしている。

6) を使えば $\frac{2r}{n} \in \mathbb{Q}$ ならば Z が holomorph convex であることがわかる。

以上をまとめると

C : Curve genus が 2, C の Jacobian $= E \times E$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow E_3 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0, \quad 0 \neq \xi \in H^1(C, \mathcal{O}_C)$$

$X_3 = P(E_3)$ とする。この時,

vector space の base $\xi_0, \xi_1 \in H^1(C, \mathcal{O}_C)$ が存在して次の性質をもつ。

$\xi = a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1$, $(a_0, a_1) \in P(H^1(C, \mathcal{O}_C))$ とみてその比が有理数ならば $X_3 - C$ は Stein 多様体である。

(**) を 3 次元以上に予想するのは非常に困難である。実際には 3 次元代数的多様体 X , X の上の non-sing. irreducible divisor D で, C curve $\nsubseteq D$ については $\Phi(C) > 0$, $C \subseteq D$ については $(C, D) = 0$, $X - C$ 上の holomorphic function は定数だけという例をあげることができる。

(**) が正しいならば 2 次元の特殊性が関係しているような感じがする。

文 献

1. A. Andreotti and H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes Bull. Soc. Math.

France, 90 (1962) 193-259

2. J. Goodman, Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors, Ann. of Math. Vol 89
1969 160-183
3. T. Hyashida and M. Nishi, Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves. J. Math. Soc. Japan Vol. 17 No 1, 1965
4. Y. Matsushima and A. Morimoto, Sur Certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, Bull. Soc. Math France 88 (1960), 137-155
5. A. Morimoto, On the classification of noncompact complex abelian Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc.
Vol. 123, No. 1 1966 200-228
6. R. Narasimhan, The Levi problem for complex spaces, II Math. Ann. 186 (1962) 1-16