

シュタイナー環におけるデカルトの円定理の拡張について (Extended Abstract) *

森継 修一

SHUICHI MORITSUGU†

筑波大学図書館情報メディア系

FACULTY OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA SCIENCE, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

本稿は、国際会議 ADG2012 で発表した論文 [9] における主要な結果を要約し、以後の進展を加筆したものである。省略された詳細等は、上記論文を参照されたい。

半径 R の円 O の内部に、半径 r の円 I が与えられているとする。これら 2 円 $O(R)$ と $I(r)$ との間に、半径 $r_1, r_2, \dots, r_n$ の n 個の円が互いに接するように描かれているとき、この図形をシュタイナー環 (Steiner chain, Steiner n -cycle) と呼ぶ。図 1 は、 $n = 4$ の場合のシュタイナー環の例である。

$n = 3$ のとき半径 R, r, r_1, r_2, r_3 の間に成り立つ関係式は、「デカルトの円定理 (1643)」としてよく知られている。本研究の目的は、これを $n \geq 4$ の場合に拡張し、次の問題を解くことにある。

問題 1

半径 $r_1, \dots, r_n$ の n 個の環円からなるシュタイナー環が与えられたとき、 R, r, r_i の関係を表す式を求めよ。

シュタイナー環に対して古典的な幾何で知られている結果は、円の反転を利用して「 $O(R)$ と $I(r)$ が同心円で r_i が等半径」になるような図形に変換して求められている [2][3][4]。これに対し本研究では、座標の関係式からグレブナー基底計算または終結式計算により、半径の間の関係式を直接導くことを試みた。その結果、半径 R の定義多項式 $\varphi_n(R, r_i)$ を $n = 4, 5, 6$ に対して計算することに成功し、それぞれ次数が 4, 24, 48 となる結果を得た。これらは、以前に計算・公刊されたことのない未知の関係式であると考えている。

2 既知の結果

2.1 デカルトの円定理

問題 1 における $n = 3$ の場合の解であるデカルトの円定理は、一般に次の式で表される。

$$2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} \right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{R} \right)^2 \quad (1)$$

$$2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} \right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r} \right)^2 \quad (2)$$

*本研究は科研費 (22500004) の助成を受けたものである。

†moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

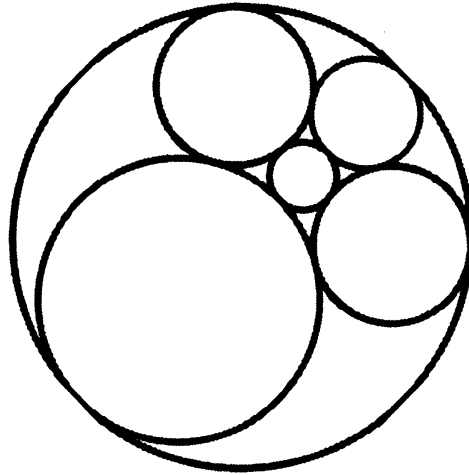


図 1: $n = 4$ の場合のシュタイナー環の例

これらの式において, 各円の半径の逆数 (曲率) を $K = 1/R$, $\kappa = 1/r$, $\kappa_1 = 1/r_1$, $\kappa_2 = 1/r_2$, $\kappa_3 = 1/r_3$ とおくと, 次のような多項式表現に書き改めることができる.

$$K^2 + 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)K + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1) = 0 \quad (3)$$

$$\kappa^2 - 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)\kappa + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1) = 0 \quad (4)$$

本稿の設定では, $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ が既知, K, κ が未知のため, 各 2 次方程式を解いて正の実数解を選ぶと,

$$K = -(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1} \quad (5)$$

$$\kappa = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1} \quad (6)$$

と表されるので, これをシュタイナーの公式と呼ぶことがある. ここから直ちに, $\kappa - K = 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)$ が得られ, 半径の関係に戻せば次が成り立つ.

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \quad (7)$$

一方, K, κ についての方程式 (3)(4) を R と r についての多項式表現に直せば,

$$\begin{aligned} & (r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2 - 2r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)) R^2 \\ & + 2r_1 r_2 r_3 (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) R + r_1^2 r_2^2 r_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & (r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_3^2 r_1^2 - 2r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)) r^2 \\ & - 2r_1 r_2 r_3 (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) r + r_1^2 r_2^2 r_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。以後、方程式 (3)(4)(8)(9) の左辺の多項式をそれぞれ、 $\Phi_3(K, \kappa_i)$, $\Psi_3(\kappa, \kappa_i)$, $\varphi_3(R, r_i)$, $\psi_3(r, r_i)$ で表すこととする。ここで、これらの多項式は、 $\Psi_3(\kappa, \kappa_i) = \Phi_3(-\kappa, \kappa_i)$ および $\psi_3(r, r_i) = \varphi_3(-r, r_i)$ をみたとしていることに注意する。したがって、本稿の目的は、 $n \geq 4$ の場合に対して、定義多項式 $\varphi_n(R, r_i)$ および $\Phi_n(K, \kappa_i)$ を各円の半径と中心座標の関係式から計算で求め、その性質を解明することにある。

2.2 シュタイナーの系 (porism)

外円 $O(R)$ と内円 $I(r)$ の中心間の距離を d とするとき、 n 個の円によるシュタイナー環が構成できるための必要十分条件は次の式で表され、さらに、この関係をみたせば、最初の円を任意の位置にとっても環円は閉じることが知られていて、これはシュタイナーの系と呼ばれる。

$$(R-r)^2 - 4Rr \tan^2 \frac{\pi}{n} = d^2 \quad (10)$$

$n=4$ に対しては、デカルトの円定理 (1)(2) のような簡明な関係式は知られていないようである。代わりに、

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}. \quad (11)$$

が成り立つことは広く知られている。この関係は、一般の偶数 $n(=2k)$ の場合に拡張できて、

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{k+1}} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{k+2}} = \cdots = \frac{1}{r_k} + \frac{1}{r_{2k}} = \frac{4(R-r)}{(R-r)^2 - d^2} \quad (12)$$

と表現される。一方で、式 (7) が一般の奇数 $n(\geq 5)$ の場合に拡張可能かどうかは未知と思われる。

3 グレブナー基底による計算

3.1 定式化

円の方程式と接触条件の多項式表現 [1] を基に、グレブナー基底計算で前節に挙げた関係式を求める。まず、外円 $O(R): x^2 + y^2 = R^2$ および内円 $I(r): x^2 + (y-d)^2 = r^2$ が与えられているとする。次に、環円 $x_i^2 + y_i^2 = r_i^2$ ($i=1, \dots, n$) を互いに接するように順次描く。外接および内接の条件は、2 円の中心間の距離で表して、 $i=1, \dots, n$ に対して

$$f_i := x_i^2 + y_i^2 - (R - r_i)^2 \quad (13)$$

$$g_i := x_i^2 + (y_i - d)^2 - (r + r_i)^2 \quad (14)$$

$$h_i := (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 - (r_{i+1} + r_i)^2 \quad (15)$$

となる。ただし、 h_i においては、 $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$, $r_{n+1} = r_1$ と読み替えるものとする。これらの多項式表現では、外接と内接を区別できないので、両方の条件を含んでいることに注意する。

3.2 $n=3$ に対する計算

イデアル (f_i, g_i, h_i) に対するグレブナー基底を Maple14 を用いて計算した。変数が適切な順序で消去されるよう、グループ順序の “lexdeg” を使用している。デカルトの円定理における式 (1) と式 (2) とは独立に計算されることに注意し、以下それぞれのイデアルと変数順序を考える。

$$(i) J_R = (f_1, f_2, f_3, h_1, h_2, h_3), [x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3] \succ [R, r_1, r_2, r_3]$$

このグレブナー基底には、式(8)の左辺である $\varphi_3(R, r_1, r_2, r_3)$ が含まれている。

$$(ii) J_r = (g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3), [x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, d] \succ [r, r_1, r_2, r_3]$$

このグレブナー基底には、式(9)の左辺である $\psi_3(r, r_1, r_2, r_3)$ が含まれている。

$$(iii) J = (f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3), [x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, r_1, r_2, r_3] \succ [r, R, d]$$

基底多項式の1つは、式(10)で $n=3$ とおいた場合の $R^2 - 14Rr + r^2 - d^2$ を因子にもつ。

これらの結果から、 $n=3$ に対するデカルトの円定理およびシュタイナーの系がグレブナー基底により確かめられたことになる。ここで $\psi_3(r, r_i) = \varphi_3(-r, r_i)$ であることに再度注意する。これは、 $y'_i = y_i - d$, $r' = -r$ という代入を行うと、式(14) g_i は式(13) f_i と同じ形になる (式(15) h_i は変化しない) ことから明らかである。したがって、以後は、イデアル $J_R = (f_i, h_i)$ を考えて $\varphi_n(R, r_i)$ だけを求めれば十分である。

3.3 $n=4$ に対する計算

イデアル $J_R = (f_1, f_2, f_3, f_4, h_1, h_2, h_3, h_4)$ に対して、 $[x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4] \succ [R, r_1, r_2, r_3, r_4]$ という順序でグレブナー基底を計算すると、 $R^2(r_2 - r_4)(r_1 - r_3) \times \varphi_4(R, r_i)$ という多項式が基底に含まれ、

$$\begin{aligned} \varphi_4(R, r_i) = & ((r_1 r_2 - r_2 r_3 + r_3 r_4 - r_4 r_1)^2 - 16 r_1 r_2 r_3 r_4) R^4 \\ & + 16(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) r_1 r_2 r_3 r_4 R^3 \\ & - 8(2r_1 r_3 + 2r_2 r_4 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_4 + r_4 r_1) r_1 r_2 r_3 r_4 R^2 \\ & + 16r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

を表す。さらに $\psi_4(r, r_i) = \varphi_4(-r, r_i)$ とおけば、これらの4次方程式 $\varphi_4(R, r_i) = 0$ および $\psi_4(r, r_i) = 0$ は、式(8)(9)における $\varphi_3(R, r_i) = 0$ および $\psi_3(r, r_i) = 0$ に相当し、「 $n=4$ の場合のデカルトの円定理」とみなせる。以下、 $\varphi_4(R, r_i)$, $\psi_4(r, r_i)$ について検討する。

まず、半径で表された方程式 $\varphi_4(R, r_i) = 0$, $\psi_4(r, r_i) = 0$ に対して、 $K = 1/R$, $\kappa = 1/r$, $\kappa_i = 1/r_i$ を代入して、曲率 K, κ, κ_i の方程式に変換する。

$$\begin{aligned} \Phi_4(K, \kappa_i) = & 16K^4 - 8(2\kappa_1 \kappa_3 + 2\kappa_2 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_4 \kappa_1) K^2 \\ & + 16(\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4) K \\ & + (\kappa_1 \kappa_2 - \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_4 - \kappa_4 \kappa_1)^2 - 16\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_4(\kappa, \kappa_i) = & 16\kappa^4 - 8(2\kappa_1 \kappa_3 + 2\kappa_2 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_4 \kappa_1) \kappa^2 \\ & - 16(\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_4 + \kappa_1 \kappa_3 \kappa_4 + \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4) \kappa \\ & + (\kappa_1 \kappa_2 - \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_4 - \kappa_4 \kappa_1)^2 - 16\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

次に、式(11)により、例えば $\kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_3 - \kappa_2$ を代入して κ_4 を消去すれば

$$(2K - (\kappa_1 + \kappa_3))^2 (4K^2 + 4(\kappa_1 + \kappa_3)K + \kappa_1^2 + 4\kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(2\kappa_1 \kappa_2 + 2\kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_1)) = 0 \quad (19)$$

$$(2\kappa + (\kappa_1 + \kappa_3))^2 (4\kappa^2 - 4(\kappa_1 + \kappa_3)\kappa + \kappa_1^2 + 4\kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(2\kappa_1 \kappa_2 + 2\kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_1)) = 0 \quad (20)$$

を得る。 $\kappa = -(\kappa_1 + \kappa_3)/2 (< 0)$ は解として不適切なので、これらの方程式の本質的な部分は、

$$4K^2 + 4(\kappa_1 + \kappa_3)K + \kappa_1^2 + 4\kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(2\kappa_1 \kappa_2 + 2\kappa_2 \kappa_3 + \kappa_3 \kappa_1) = 0 \quad (21)$$

$$4k^2 - 4(\kappa_1 + \kappa_3)k + \kappa_1^2 + 4\kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1) = 0 \quad (22)$$

という2次方程式になり、これが $n=3$ のときの方程式 (3)(4) に対応する。

最後に、これらの方程式 (21)(22) を K, κ について解き、適切な方の解を選べば、

$$K = -\frac{\kappa_1 + \kappa_3}{2} + \sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1 - \kappa_2^2} \quad (23)$$

$$k = \frac{\kappa_1 + \kappa_3}{2} + \sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1 - \kappa_2^2} \quad (24)$$

となり、 $\kappa - K = \kappa_1 + \kappa_3$ が式 (11) をみたしていることも確かめられる。これらの結果は大変簡明であるにも関わらず、これまで明示的に求められたことはなかったようである。したがって、 $n=3$ に対する式 (5)(6) と対応させて、これらの式 (23)(24) を「 $n=4$ に対するシュタイナーの公式」と呼べると思われる。

例 1

$r_1 = r_2 = r_3 = 1$ とおくと、 $r_4 = 1$ となる。方程式 (21)(22) から得られる値を半径で表せば、 $R = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ および $r = \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}$ である。ここから、 $R = 1 + \sqrt{2}$ および $r = -1 + \sqrt{2}$ となり、4個の等円からなるシュタイナー環（各円の中心を辺長2の正方形の頂点に配置）が構成される。

例 2

$r_1 = 3, r_2 = 2, r_3 = 1$ が与えられたとする。このとき、式 (11) から、 $r_4 = 6/5$ を得る。方程式 (21)(22) を解いて、各解の逆数をとれば、 $R = \{-0.6524, 5.0161\}$ および $r = \{-5.0161, 0.6524\}$ を得る。したがって、求める解は、 $R = 5.0161, r = 0.6524$ である。

注意 1

例 2 は、19 世紀の日本の数学者である法道寺善 [5][6] が解いた問題である。 $r_4 = 1.2$ を得た後、法道寺は次の方程式を解いている。この解は $R = \{-0.6524, 5.0161\}$ となるので、方程式 (21) に等しいことが分かるが、法道寺がどのようにして式 (25) を導いたか、詳細は解明されていない。

$$\begin{aligned} & \{(r_4 - r_2)^2 r_1^2 - 4(r_2 + r_4)r_1 r_2 r_4 + 4r_2^2 r_4^2\} R^2 \\ & + 4(r_2 + r_4)r_1^2 r_2 r_4 R + 4r_1^2 r_2^2 r_4^2 = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

4 終結式による計算

4.1 $n=5$ に対する計算

$n \geq 5$ に対してグレブナー基底を直接計算することは、現在の環境 (Maple14/Win64, Xeon(2.93 GHz)×2, 96 GB RAM) では困難である。なお、Maple15,16 は、問題によってはかえって計算時間が長くなる現象が見られたので、以下に示すタイミングデータはすべて Maple14 によるものである。

グレブナー基底によりイデアルそのものの構造を明らかにすることを断念する代わりに、終結式による特定の変数の消去に着目することは、計算幾何の問題においてしばしば有効である。以前の論文 [8][10] と同様に、式 (13)(15) で構成される連立方程式 $\{f_1, \dots, f_5, h_1, \dots, h_5\}$ から x_i, y_i を終結式により消去した。まず、一般性を失うことなく、 $x_1 = 0, y_1 = R - r_1$ と仮定し、以下、 $y_2, y_5, x_2, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4$ を順次消去（終結式を計算する度に、因数分解を行って冗長な因子は除去）すると、最後に次の式が残る。

$$\varphi_5(R, r_i) = a_{24}(r_i)R^{24} + \dots + a_1(r_i)R + a_0(r_i) = 0 \quad (a_j(r_i) \in \mathbb{Q}[r_1, \dots, r_5]) \quad (26)$$

同様の消去手順を $n=3$ および $n=4$ のときにも適用し、グレブナー基底から求めた $\varphi_3(R, r_i)$, $\varphi_4(R, r_i)$ に一致することを確認した。したがって、この $\varphi_5(R, r_i)$ は $n=5$ のときの R の定義多項式であるといえる。ここまでの CPU 時間は約 17 秒、加えて $\varphi_5(R, r_i)$ が既約であることを確認してある。

前節での議論と同様に、式 (26) を曲率の関係式に変換すると以下の式を得るが、 $\kappa_1, \dots, \kappa_5$ の間には、式 (7)(11) に相当する関係式が存在しないため、 $\Phi_5(K, \kappa_i)$ をこれ以上解析することはできない。

$$\Phi_5(K, \kappa_i) = \tilde{a}_{24}(\kappa_i)K^{24} + \dots + \tilde{a}_1(\kappa_i)K + \tilde{a}_0(\kappa_i) = 0 \quad (\tilde{a}_j(\kappa_i) \in \mathbb{Q}[\kappa_1, \dots, \kappa_5]) \quad (27)$$

例 3

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 1$ とおいて、等円の場合を考える。方程式 $\varphi_5(R, r_i) = 0$ は

$$(R-1)^{10}(R^2-2R-\frac{1}{3})^5(R^4-4R^3+2R^2+4R+\frac{1}{5})=0 \quad (28)$$

と因数分解され、各因子から得られる解は以下の 4 種類の図形に対応している。

(i) $R=1, r=-1$

すべての円が、同心で半径 1 の円に縮退して重なっている。

(ii) $R=1+2/\sqrt{3}, r=-1+2/\sqrt{3}$

5 個の円が縮退して、3 個の等円からなるシュタイナー環を構成している。それぞれの円の中心は、辺長 2 の正三角形の各頂点に置かれた形になっている。

(iii) $R=1+\sqrt{2+2/\sqrt{5}}, r=-1+\sqrt{2+2/\sqrt{5}}$

5 個の等円からなる (真の) シュタイナー環を構成している。それぞれの円の中心は、辺長 2 の正五角形の各頂点に置かれた形になっている。

(iv) $R=1+\sqrt{2-2/\sqrt{5}}, r=-1+\sqrt{2-2/\sqrt{5}}$

5 個の等円が、内円の周りを 2 周して最初の円に接するようなシュタイナー環を構成している。それぞれの円の中心は、辺長 2 の星芒形の各頂点に置かれた形になっている。一般に、 n 個の円が m 周後に最初の円に接する場合は、式 (10) を拡張して、

$$(R-r)^2 - 4Rr \tan^2 \frac{m\pi}{n} = d^2, \quad (29)$$

という関係式をみたし、上記は、 $n=5, m=2$ の場合に相当する。

4.2 $n=6$ に対する計算

各円の座標の関係式 (13)(15) は一定の構造を持っているので、 $n=6$ の場合に対しても、変数の消去順を見通すことが可能である。実際、 R に関して 48 次式となる定義多項式 $\varphi_6(R, r_i)$ の導出に成功した。

$$\varphi_6(R, r_i) = b_{48}(r_i)R^{48} + \dots + b_1(r_i)R + b_0(r_i) = 0 \quad (b_j(r_i) \in \mathbb{Q}[r_1, \dots, r_6]) \quad (30)$$

このときの CPU 時間は約 7 時間 40 分 (マルチスレッド環境のため、経過時間としては約 1 時間 6 分) である。この多項式 $\varphi_6(R, r_i)$ は因数分解可能で、以下のように 16 次と 32 次の式に分解される (CPU 時間は 34 時間 27 分—経過時間で 22 時間 35 分—、77GB のメモリを実際に使用)。

$$\varphi_6(R, r_i) = \varphi_6^{(1)}(R, r_i) \cdot \varphi_6^{(2)}(R, r_i) \quad (31)$$

曲率の関係式に変換するため, $K = 1/R$, $\kappa = 1/r$, $\kappa_i = 1/r_i$ を $\varphi_6^{(1)}(R, r_i)$, $\varphi_6^{(2)}(R, r_i)$ に代入する. さらに, 6 個の κ_i のうち 2 個は消去可能であり, 例えば, 式 (12) により $\kappa_6 = \kappa_1 + \kappa_4 - \kappa_3$, $\kappa_5 = \kappa_1 + \kappa_4 - \kappa_2$ を代入することができる. この結果を整理すると,

$$\begin{cases} (2K - (\kappa_1 + \kappa_4))^4 \cdot \Phi_6^{(1)}(K, \kappa_i) = 0 \\ \Phi_6^{(2)}(K, \kappa_i) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

と表すことができ, K に関する $\Phi_6^{(1)}(K, \kappa_i)$, $\Phi_6^{(2)}(K, \kappa_i)$ の次数は, それぞれ 12 と 32 である.

例 4

$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 1$ において, 等円の場合を調べる. 方程式 $\Phi_6^{(1)}(K, \kappa_i) = 0$ は

$$(3K - 1)(K + 1)(2K - 1)^4(K - 1)^6 = 0 \quad (33)$$

と因数分解される. $K = 1/3$ (すなわち $R = 3$) の場合が, 6 個の等円からなる (真の) シュタイナー環の場合に相当し, 他の解 $R = \pm 1$ および $R = 2$ は退化した場合に相当している.

同様に, 方程式 $\Phi_6^{(2)}(K, \kappa_i) = 0$ は

$$(K^2 + 6K - 3)(K^2 + 2K - 1)^6(K - 1)^{18} = 0 \quad (34)$$

と因数分解され, $K = 1$ 以外の解は, 以下の場合に相当している.

(i) $R = 1 + 2/\sqrt{3}$, $r = -1 + 2/\sqrt{3}$ ($K = -3 \pm 2\sqrt{3}$)

3 個の等円からなるシュタイナー環 (各円の中心を辺長 2 の正三角形の頂点に配置) が構成される.

(ii) $R = 1 + \sqrt{2}$, $r = 1 - \sqrt{2}$ ($K = -1 \pm \sqrt{2}$)

4 個の等円からなるシュタイナー環 (各円の中心を辺長 2 の正方形の頂点に配置) が構成される.

5 まとめと今後の課題

n	R の次数	項数
3	2	10
4	4	20
5	24	30,645
6	16	271,828
	32	310,935

表 1: n 円からなるシュタイナー環における半径 R の定義多項式 $\varphi_n(R, r_i)$

本研究では, シュタイナー環に対する未知の公式を発見することを目指として, グレブナー基底および終結式を用いて, 円の座標の関係式から消去計算を行った.

$n = 3$ の場合には, デカルトの円定理をグレブナー基底計算で導くことができたので, 反転法によらない新たな証明のひとつを与えたといえる.

$n = 4$ の場合には, 2 つの 4 次方程式 (17)(18) を導き, これは $n = 4$ の場合に拡張されたデカルトの円定理とみなせるものである. しかしながら, $\kappa_1 + \kappa_3 = \kappa_2 + \kappa_4$ という関係を用いると, K, κ はより簡単な式 (23)(24) で表され, これが以前に指摘されていないとしたら意外に思われる.

$n = 5, n = 6$ に対しては、グレブナー基底の計算が困難だったので、終結式による変数消去を行い、関係式 $\varphi_5(R, r_i) = 0$ および $\varphi_6^{(1)}(R, r_i) \cdot \varphi_6^{(2)}(R, r_i) = 0$ を得た。これらは、曲率の関係に変換して、 $\Phi_5(K, \kappa_i) = 0$, $\Phi_6^{(1)}(K, \kappa_i) = 0$, $\Phi_6^{(2)}(K, \kappa_i) = 0$ とも表される。

表 1 には、 $n = 3, 4, 5, 6$ に対する定義多項式 $\varphi_n(R, r_i)$ の形態を整理した。これらの公式を明示的に与えた報告はこれまでになかったように思われる。しかしながら、それぞれの計算例で調べた等円の場合以外に、式 (27)(32) がどのような幾何学的意味を持つのか、十分明らかになったとはいえない。したがって、以下のような問題と合わせて、一般のシュタイナー環における $\varphi_5(R, r_i)$, $\varphi_6^{(1)}(R, r_i)$, $\varphi_6^{(2)}(R, r_i)$ の性質をさらに解明する必要がある。

- (i) 明らかに、現在の計算環境では、 $n = 7$ に対する記号的計算は極めて困難である。ただし、各パラメータ r_i にランダムな素数 p_i を代入して計算することにより、 $\varphi_7(R, r_i)$ は R に関して 160 次であると予想される。この次数の列 $2, 4, 24, 48, 160, \dots$ が何らかの組み合わせの式で表されることが期待される。
- (ii) 18 世紀の和算家である安島直円は、「廉術変換 (1784)」において、シュタイナー環を構成する円の半径に対する漸化式 [7] を導いている。

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_{n-1}} \left(\frac{16Rr}{(R+r)^2 - d^2} - 2 \right) + \frac{8(R-r)}{(R+r)^2 - d^2} - \frac{1}{r_{n-2}} \quad (35)$$

R, r, r_1, r_2 が与えられたとき、安島はこの式を用いて $r_3, r_4, \dots$ を順に計算し、最後に n 個の環円が閉じるとき、以下をみたさなければならないことを示した。

$$\frac{4Rr}{(R+r)^2 - d^2} = \cos^2 \frac{\pi}{n} \quad (36)$$

これは、Jakob Steiner (1796-1863) が与えた式 (10) と同値である。この漸化式 (35) から一般項が導かれるか、また、その幾何学的意味を考察することも必要である。

参 考 文 献

- [1] Chou, S.-C.: *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel, Dordrecht, 1988.
- [2] Coxeter, H. S. M.: The Problem of Apollonius, *American Mathematical Monthly*, 75(1), 1968, 5-15.
- [3] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L.: *Geometry Revisited*, MAA, Washington, D.C., 1967.
- [4] Forder, H. G.: *Geometry*, Hutchinson, London, 1960.
- [5] Fukagawa, H. and Rothman, T.: *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton, Princeton, 2008.
- [6] 平山諦: 学術を中心とした 和算史上の人々, 筑摩書房, 東京, 2008.
- [7] 平山諦, 松岡元久: 安島直円全集, 富士短期大学出版部, 東京, 1966.
- [8] Moritsugu, S.: Computing Explicit Formulae for the Radius of Cyclic Hexagons and Heptagons, *Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*, 18(1), 2011, 3-9.
- [9] Moritsugu, S.: Extending the Descart Circle Theorem for Steiner n -cycles, *ADG 2012* (Ida, T. and Fleuriot, J., eds.), Edinburgh, University of Edinburgh, 2012, 173-183.
- [10] 森継修一: 円内接多角形問題と「算法発揮 (1690)」における解について, 京都大学数理解析研究所講究録, 1815, 2012, 124-132.