

知識命題の標準形を用いる妥当性検証

大芝 猛 (Takeshi OSHIBA)*

小橋 一秀 (Kazuhide KOBASHI)†

m 個の命題変数 $p_1, \dots, p_m$ に対し、論理記号 $\wedge, \vee, \supset, \neg$ の他に、異なる n 人に対する “know” 記号 $K_1, \dots, K_n$ を用いてうる知識論理式全体を $\mathcal{L}$ とする。そのうち know 記号の operate の深さが k のものを $\mathcal{L}^{(k)}$ とする¹。

演繹体系 K は言語 $\mathcal{L}$ について、次の公理と推論からなる。

a0 トートロジー論理式

a1 $K_i(A) \supset A$

a2 $K_i(A) \supset K_i(K_i(A))$

a3 $\neg K_i(A) \supset K_i(\neg K_i(A))$

a4 $K_i(A) \wedge K_i(B) \supset K_i(A \wedge B)$

a5 $K_i(A \supset B) \supset (K_i(A) \supset K_i(B))$

$\frac{A \quad A \supset B}{B}$ (MP-rule) $\frac{A}{K_i(A)}$ (K_i -rule)

この体系 K で論理式 A が証明可能なことを “ $\vdash A$ ” で表わす。

以下 “strictly know” なる概念に対応する記号 $K_i[\]$ とこれにもとづく world なる式を導入し、さらに論理式 A に対する一種の $\wedge$ - $\vee$ 標準形展開を意味する world の集合 W_A を定義する。その上で W_A を用いて “ $\vdash A$ ” を判定する 1 つのシンタクティカルなアルゴリズムを提起する (定理 17)。

定義 1 $W^{(k)}$: degree k の world の集合

$$W^{(0)} = \left\{ p_1^{\delta_1} \wedge \dots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_m \in \{0, 1\} \right\}, \quad p^\delta = \begin{cases} p & (\delta = 1) \\ \neg p & (\delta = 0) \end{cases}$$

$$W^{(k+1)} = \left\{ \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid g \in W^{(k)}, U_1, \dots, U_n \subseteq W^{(k)} \right\}$$

記法 $f = \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \in W^{(k+1)}$ に対し $g = f^{<k+1}$, $U_i = f_i^{(k+1)}$ とおく

定義 2 strictly know $K_i[\]$ 等の論理的意味付け “ $*$ ”

• $U \subseteq W^{(k)}$ に対し、

$$*K_i[U] \stackrel{\text{def}}{=} K_i(*U) \wedge \bigwedge_{U \not\subseteq V \subseteq W^{(k)}} \neg K_i(*V)$$

*名古屋工業大学

†名古屋工業大学

¹ $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} \cup \mathcal{L}^{(1)} \cup \dots$ ($\mathcal{L}^{(0)}$ は命題論理式全体)

- $U = \{g_1, \dots, g_d\}$ のとき、 $*U \stackrel{\text{def}}{=} *g_1 \vee \dots \vee *g_d$
- $f = \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle$ に対し、 $*f \stackrel{\text{def}}{=} *g \wedge \bigwedge_{i=1}^n *K_i[U_i]$

補助定理 0 $U, V \subseteq W^{(k)}$ に対し、

$$\vdash *K_i[U] \wedge K_i(*V) \equiv \begin{cases} *K_i[U] & \text{if } U \subseteq V \\ \perp (\text{矛盾}) & \text{if } U \not\subseteq V \end{cases} \quad (1)$$

補助定理 1 $U, V \subseteq W^{(k)}$ に対し、 $U \neq V \Rightarrow \vdash (*K_i[U] \wedge *K_i[V] \equiv \perp)$

補助定理 2 $f, g \in W^{(k)}$ に対し、

$$f \neq g \Rightarrow \vdash *f \wedge *g \equiv \perp$$

但し、 $U = V$ は集合の等号、 $f = g$ は式としての等号。

補助定理 3 $U, V \subseteq W^{(k)}$ に対し、 $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \vdash *U \wedge *V \equiv \perp$

補助定理 4 U, V に対し、 $\vdash *(U \cap V) \equiv *U \wedge *V$

定理 5 $U \subseteq W^{(k)}$ に対し、

$$\vdash *K_i[U] \equiv K_i(*U) \wedge \bigwedge_{V \not\subseteq U} \neg K_i(*V)$$

定理 6 $U \subseteq W^{(k)}$ に対し、

$$\vdash K_i(*U) \equiv \bigvee_{V \subseteq U} *K_i[V] \quad [\text{定理 5 を用いる}]$$

定理 7 $\vdash *W^{(k)}$ [定理 6 を用いる]

定義 3 $\deg(A) = A$ 内の $K_1, \dots, K_n$ 演算の深さの最大値

$$\mathcal{L}^{(k)} = \{A \in \mathcal{L} \mid \deg(A) = k\}$$

定義 4 $world$ の集りの “条件なし拡張” と “限定”

$$U \subseteq W^{(k)} \quad \text{に対し} \quad U' = \left\{ \langle f, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid f \in U, U_1, \dots, U_n \subseteq W^{(k)} \right\}$$

$$V \subseteq W^{(k+1)} \quad \text{に対し} \quad 'V = \left\{ g \mid \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \in V, \text{ for some } U_1, \dots, U_n \subseteq W^{(k)} \right\}$$

定義 5 $U \subseteq W^{(k)}$ $l \geq k$ に対し $U^{<l>} \stackrel{\text{def}}{=} U^{\overbrace{\dots}^{l-k}}$

補助定理 8 $U \subseteq W^{(k)}$ に対し $'(U') = U$

補助定理 9 $U, V \subseteq W^{(k)}$ に対し

$$(U \cap V)' = U' \cap V' \quad (1)$$

$$(U \cup V)' = U' \cup V' \quad (2)$$

$$(W^{(k)} - U)' = W^{(k+1)} - U' \quad (3)$$

補助定理 10 $U \subseteq W^{(k)}$ に対し $\vdash^*(U') \equiv {}^*U$

補助定理 11 $U \subseteq W^{(k)}$, $l \geq k$ に対し $\vdash^*(U^{<l>}) \equiv {}^*U$

定義 6 論理式 A に対する *world* の集合 W_A (一種の $\wedge - \vee$ 標準系展開)

$$W_{p_j} = \left\{ p_1^{\delta_1} \wedge \cdots \wedge p_{j-1}^{\delta_{j-1}} \wedge p_j \wedge p_{j+1}^{\delta_{j+1}} \wedge \cdots \wedge p_m^{\delta_m} \mid \delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_{j+1}, \dots, \delta_m \in \{0, 1\} \right\} \quad (4)$$

$$W_{B \wedge C} = W_B^{<k>} \cap W_C^{<k>} \quad k = \max(\deg(B), \deg(C)) \quad (5)$$

$$W_{B \vee C} = W_B^{<k>} \cup W_C^{<k>} \quad k = \max(\deg(B), \deg(C)) \quad (6)$$

$$W_{\neg B} = W^{(k)} - W_B \quad k = \deg(B) \quad (7)$$

$$W_{K_i(B)} = \left\{ f \in W^{(k+1)} \mid f_i^{(k+1)} \subseteq W_B \right\}, \text{ 但し } f = \langle f^{<k+1>} , \begin{pmatrix} K_1[f_1^{(k+1)}] \\ \vdots \\ K_i[f_i^{(k+1)}] \\ \vdots \\ K_n[f_n^{(k+1)}] \end{pmatrix} \rangle \quad (8)$$

また $B \supset C$: $\neg B \vee C$ または $W_{B \supset C} = (W^{(k)} - W_B^{<k>}) \cup W_C^{<k>}$, $k = \max(\deg(B), \deg(C))$

定理 12

$$\vdash A \equiv {}^*W_A$$

[付録参照]

定義 7 $\vdash A$ を規定するため *world* の部分集合 $S^{(k)} \subseteq W^{(k)}$ を導入する。

$$S^{(0)} = W^{(0)} \quad (9)$$

$$S^{(1)} = \left\{ \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid \begin{array}{l} 0) \quad g \in S^{(0)} \\ 1) \quad \forall i (g \in U_i \subseteq S^{(0)}) \end{array} \right\} \quad (10)$$

$$S^{(k+2)} = \left\{ \langle g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \rangle \mid \begin{array}{l} 0) \quad g \in S^{(k+1)} \\ 1) \quad \forall i (g \in U_i \subseteq S^{(k+1)}) \\ 2) \quad \forall i (\forall f \in U_i \Rightarrow f_i^{(k+1)} = g_i^{(k+1)}) \\ 3) \quad \forall i (U_i = g_i^{(k+1)}) \end{array} \right\} \quad (k \geq 0) \quad (11)$$

但し $U \subseteq S^{(l)}$ に対し $U' \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{<l>} \mid f \in U\}$ (*restrictions of U*)

補助定理 13 $\forall k (f \in W^{(k)} - S^{(k)} \Rightarrow \vdash {}^*f \equiv \perp)$

定理 14 $\forall k (\vdash *S^{(k)})$

$$\begin{aligned}
 *S^{(k)} &\equiv *S^{(k)} \vee \perp \\
 &\equiv *S^{(k)} \vee *(W^{(k)} - S^{(k)}) \quad \text{補助定理 13} \\
 &\equiv *(S^{(k)} \cup (W^{(k)} - S^{(k)})) \\
 &\equiv *W^{(k)} \\
 &\text{従って 定理 7 より } \vdash *S^{(k)}
 \end{aligned}$$

補助定理 15 A が $a0 \sim a5$ の公理のとき

$$\deg(A) = k \Rightarrow W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)}$$

補助定理 16

(1) 推論 $\frac{A \quad A \supset B}{B}$ (M.P.) に関して、 $\deg(A) = d, \deg(B) = l, \max(d, l) = k$ のとき、

$$W_A \cap S^{(d)} = S^{(d)}, W_{A \supset B} \cap S^{(k)} = S^{(k)} \Rightarrow W_B \cap S^{(l)} = S^{(l)}$$

(2) 推論 $\frac{A}{K_i(A)}$ (K_i) に関して、 $\deg(A) = k$ のとき、

$$W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)} \Rightarrow W_{K_i(A)} \cap S^{(k+1)} = S^{(k+1)}$$

[付録参照]

定理 17 $\deg(A) = k$ のとき

$$\begin{aligned}
 \vdash A &\iff W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)} \\
 &[\iff S^{(k)} \subseteq W_A]
 \end{aligned}$$

“ $\Rightarrow$ part” は補助定理 15 と補助定理 16 から、

“ $\Leftarrow$ part”:

$$\begin{aligned}
 W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)} \Rightarrow *S^{(k)} &\equiv *(W_A \cap S^{(k)}) \\
 &\equiv *W_A \wedge *S^{(k)} \quad \text{補助定理 4} \\
 &\equiv *W_A \quad \text{定理 14} \\
 &\equiv A \quad \text{定理 12}
 \end{aligned}$$

従って、再び定理 14 から $\vdash A$

参考文献

- [1] R. Fagin, J. Y. Halpern, M. Y. Vardi: *A Model-Theoretic Analysis of Knowledge Preliminary Report, 25th FOCS*
- [2] J. Hintikka: *Knowledge and belief, Cornell University Press 1962*
- [3] M. Sato: *A study of Kripke-type Models for some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method Publications Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, 1977*

付録

定理 12 の証明:

A 内の論理記号または K_i 記号の個数に関する帰納法を用いる。 $\wedge, \vee, \neg, \supset$ に関しては省略。 $A = K_i(B)$ の場合: $\deg(K_i(B)) = k (\geq 1)$ とおく

$$\begin{aligned}
K_i(B) &\equiv K_i(*W_B) \quad (\text{帰納法の仮定}) \\
&\equiv *W^{(k)} \wedge K_i(*W_B) \quad \text{補助定理 7} \\
&\equiv \left(\bigvee_{f \in W^{(k)}} *f \right) \wedge K_i(*W_B) \\
&\equiv \bigvee_{f \in W^{(k)}} (*f \wedge K_i(*W_B)) \\
&\equiv \bigvee_{f \in W^{(k)}} (*f \wedge \underline{K_i(*W_B)}) \vee \bigvee_{f \in W^{(k)}} (*f \wedge \underline{K_i(*W_B)}) \\
&\quad \left(\begin{array}{c} f \in W^{(k)} \\ f_i^k \subseteq W_B \end{array} \right) \downarrow \quad \left(\begin{array}{c} f \in W^{(k)} \\ f_i^k \not\subseteq W_B \end{array} \right) \downarrow \begin{array}{l} f_i^{(k)} \not\subseteq W_B \text{ と補助定理 0-(2) から} \\ K_i[f_i^{(k)}] \wedge \underline{K_i(*W_B)} \equiv \perp \end{array} \\
&\quad \underbrace{\left(*f <^k \wedge \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n *K_j[f_j^{(k)}] \wedge *K_i[f_i^{(k)}] \right)}_{\equiv K_i[f_i^{(k)}]} \wedge \underline{K_i(*W_B)} \quad f_i^{(k)} \subseteq W_B \text{ と補助定理 0-(1) から} \\
&\equiv \bigvee_{f \in W^{(k)}} *f \\
&\quad \left(\begin{array}{c} f \in W^{(k)} \\ f_i^k \subseteq W_B \end{array} \right) \\
&\equiv * \left\{ f \in W^{(k)} \mid f_i^{(k)} \subseteq W_B \right\} \\
&\equiv *W_{K_i(B)}
\end{aligned}$$

補助定理 16 の証明:

(1) $\frac{A \quad A \supset B}{B}$ MP について $\deg(A) = d, \deg(B) = l, \max(d, l) = k$ のとき

$$\begin{aligned}
&\boxed{W_A \cap S^{(d)} = S^{(d)}}, W_{A \supset B} \cap S^{(k)} = S^{(k)} \implies \\
S^{(k)} &= ((W^{(k)} - \overbrace{W_A}^{k-d}) \cup \overbrace{W_B}^{k-l}) \cap S^{(k)} \\
&= ((W^{(k)} \cap S^{(k)}) - \overbrace{(W_A \cap S^{(k)})}^{k-d}) \cup (\overbrace{W_B \cap S^{(k)}}^{k-l}) \\
&\quad \boxed{S^{(d)} \subseteq W_A}, S^{(k)} \subseteq S^{(d)} \overbrace{\quad}^{k-d} \subseteq \overbrace{W_A}^{k-d} \text{ であるから} \\
&= ((S^{(k)} - \underline{S^{(k)}}) \cup \overbrace{W_B \cap S^{(k)}}^{k-l}) \\
&= \overbrace{W_B \cap S^{(k)}}^{k-l} \\
&\text{即ち } S^{(k)} = \overbrace{W_B \cap S^{(k)}}^{k-l} \text{ 従って}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overbrace{S^{(k)}}^{k-l} &= \overbrace{(W_B \cap S^{(k)})}^{k-l} \\
&= \overbrace{(W_B)}^{k-l} \cap \overbrace{S^{(k)}}^{k-l}
\end{aligned}$$

$$\text{よって } S^{(l)} = W_B \cap S^{(l)}$$

(2) $\frac{A}{K_i(A)}(K_i)$ について $\deg(A) = k$ のとき

$W_A \cap S^{(k)} = S^{(k)}$ 即ち $S^{(k)} \subseteq W_A$ を仮定

$$\begin{aligned}
W_{K_i(A)} \cap S^{(k+1)} &= \left\{ \left\langle f, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_i[U_i] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid f \in W^{(k)}, U_i \subseteq W_A, U_1, \dots, U_n \subseteq W^{(k)} \right\} \\
&\cap \left\{ \left\langle f, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid f \in S^{(k)}, U_1, \dots, U_n \subseteq S^{(k)} \right\} \\
&= \left\{ \left\langle f, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_i[U_i] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix} \right\rangle \mid f \in S^{(k)}, \underbrace{(U_i \subseteq W_A \text{ \& } U_i \subseteq S^{(k)})}_{\uparrow \text{ 仮定より}}, U_1, \dots, U_n \subseteq S^{(k)} \right\} \\
&= S^{(k+1)}
\end{aligned}$$