

多成分戸田方程式の hierarchy

京大 数理研

土野喜三雄

Ueno Kimio

東大 理学部

高崎 金久

Takasaki Kanehisa

§0. 序.

筆者等は [4] に於て無限格子の戸田方程式の hierarchy について報告した。そこで扱われたのは 2 次元 Minkowski 時空における戸田方程式

$$(0.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi(s)}{\partial x_1 \partial y_1} = -e^{\varphi(s+1) - \varphi(s)} + e^{\varphi(s) - \varphi(s-1)},$$

($\varphi(s) = \varphi(s, x_1, y_1)$, (x_1, y_1) : 光円錐座標, s : 格子座標)

およびその hierarchy であった。差分作用素 $B_1 = e^{\partial_s} + \frac{\partial \varphi(s)}{\partial x_1}$, $C_1 = e^{\varphi(s) - \varphi(s+1)} e^{-\partial_s}$ (或はそれと同値な無限次行列) を用いると, (0.1) は

$$(0.2) \quad [\partial_{x_1} - B_1, \partial_{y_1} - C_1] = 0 \quad \left(\partial_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_{y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} \right)$$

と書き直せる。これを無限個の方程式から成る hierarchy に延長し, その代数的構造と 2 成分 KP hierarchy による解の parametrization について論いたのが [4] の内容である。 B_1, C_1 或はその延長 B_n, C_n がスカラー差分作用素である点において, これはいわば「1 成分理論」である。

以下では戸田方程式の「多成分理論」に関する最近の結果について述べる。これはスカラ - 差分作用素を行列型差分作用素に一般化したもので、いわゆる「非可換戸田方程式」を独立変数の特殊な sector に於て回復する。その意味で戸田方程式の自然な拡張になっている。

我々の戸田方程式の hierarchy の理論は 1 成分・多成分いずれに於ても、最近著しい進展を見せた Kadomtsev - Petviashvili (KP) hierarchy の理論 ([1], [2], [3]) と密接な関係がある:

(i) KP hierarchy は 擬微分作用素 のスペクトル保存変形として定式化され、極めて美しい代数的構造をもつ。戸田方程式の hierarchy は、対照的に、形式的 (或は擬) 差分作用素 のスペクトル保存変形として導入され、KP hierarchy とよく似た構造をもつ。差分作用素、或はこれと同値な $\infty \times \infty$ 行列表示 を徹底的に利用する点が我々の理論の特徴である。

(ii) 波動関数のレベルに於ては、 ℓ 成分戸田 hierarchy は 2ℓ 成分 KP hierarchy と結びつく。これにより、戸田 hierarchy の解の parametrization を与えたり、Schlesinger 変換を導入したりすることも可能になる。(しかも、具体的な解を論じる際には、この parametrization はいささか不便なこともある。) — この二つが重要なポイントである。

§ 1. 1 成分理論の復習 (c.f. [4])

離散変数 s , 連続変数 $X = (x_1, x_2, \dots)$, $Y = (y_1, y_2, \dots)$ の u 形式の差分作用素 ($e^{\nu \partial_s} f(s) = f(s+\nu)$: shift operator)

$$L = e^{\partial_s} + u_1 + u_2 e^{-\partial_s} + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu} e^{(\nu-1)\partial_s} \quad (u_0=1),$$

$$M = v_0 e^{-\partial_s} + v_1 + v_2 e^{\partial_s} + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_{\nu} e^{(\nu+1)\partial_s} \quad (v_0 \neq 0),$$

を用意する. u_{ν}, v_{ν} は (s, X, Y) の函数とする. また

$$B_n = (L^n)_+, \quad C_n = (M^n)_-$$

と置く. 但し一般に $A = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_{\nu} e^{\nu \partial_s}$ に対して $(A)_+ = \sum_{\nu \geq 0} a_{\nu} e^{\nu \partial_s}$,

$(A)_- = \sum_{\nu < 0} a_{\nu} e^{\nu \partial_s}$ という記号を用いる. このとき,
[$\mathbb{Z}$ = 整数全体]

定理 1.1 Lax 方程式系

$$(1.1) \quad \begin{cases} [\partial_{x_n} - B_n, L] = [\partial_{y_n} - C_n, L] = 0 \\ [\partial_{x_n} - B_n, M] = [\partial_{y_n} - C_n, M] = 0 \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots)$$

と Zakharov-Shabat 方程式系

$$(1.2) \quad \begin{cases} [\partial_{x_m} - B_m, \partial_{x_n} - B_n] = [\partial_{y_m} - C_m, \partial_{y_n} - C_n] \\ = [\partial_{x_m} - B_m, \partial_{y_n} - C_n] = 0 \end{cases} \quad (m, n=1, 2, \dots)$$

は同値である. $\square$

この (1.1) 或は (1.2) によって定義される連立方程式系を 戸田方程式の hierarchy と呼んだのである. (1.2) は (0.2) を含むことに注意する.

(1.1), (1.2) に対して線型方程式系を通し 2 波動函数を導入

することが出来る。或は同じことだが、次のような差分作用素 $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ を導入することが出来る (unique はたは 11):

$$\begin{aligned}
 L &= W^{(\infty)} e^{\partial_s} W^{(\infty)-1}, \quad M = W^{(0)} e^{-\partial_s} W^{(0)-1}, \\
 W^{(\infty)} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu}^{(\infty)} e^{-\nu \partial_s}, \quad W^{(0)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu}^{(0)} e^{\nu \partial_s}, \quad \begin{pmatrix} w_0^{(\infty)} = 1, \\ w_0^{(0)} \neq 0 \end{pmatrix}, \\
 (1.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial x_n} &= B_n W^{(\infty)} - W^{(\infty)} e^{n \partial_s}, \\ \frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial y_n} &= C_n W^{(\infty)}, \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_n} &= B_n W^{(0)}, \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial y_n} &= C_n W^{(0)} - W^{(0)} e^{-n \partial_s} \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

逆にこのような $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ があれば、対応する L, M は (1.1), (1.2) の解を与える。 (1.1), (1.2) を場の方程式とみなすならば、 $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ は場の量 L, M に対する potential にあたる、と見える。 L, M に対して $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ をひとつえらぶことは一種の gauge 固定である。 $W^{(\infty)} \rightarrow W^{(\infty)} \times$ (定数係数差分作用素) は L, M を変えない。 $W^{(0)} \rightarrow W^{(0)} \times$ () である。これは一種の gauge 変換である。

注意 (1.3) において B_n, C_n が一般に $(B_n)_+ = B_n, C_n e^{-\partial_s} = (C_n e^{\partial_s})_-$ をみたす差分作用素であると仮定するだけで、実は、

$$B_n = (L^n)_+ = (W^{(\infty)} e^{n \partial_s} W^{(\infty)-1})_+, \quad C_n = (M^n)_- = (W^{(0)} e^{-n \partial_s} W^{(0)-1})_-$$

が従う。(このことは、実際に (1.3) の特殊解をつくるとき、しばしば有効である。) 実際、(1.3) 第1式、第3式、第4式により、

$$B_n = W^{(\infty)} e^{n \partial_s} W^{(\infty)-1} + \frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial x_n} W^{(\infty)-1},$$

$$C_n = W^{(0)} e^{-n g_s} W^{(0)-1} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial y_n} W^{(0)-1} = \frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial y_n} W^{(\infty)-1}$$

$w_0^{(\infty)} = 1$ に注意して、各辺の $()_+$, $()_-$ をとれば結論を得る。□

$W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ の代数的な特徴づけ, 多成分 (2 成分) KP 理論との関係... などは, 後に述べる多成分理論の中へ吸収されるのでここでは省く。([4])

最後に, 差分作用素の代りに $\infty \times \infty$ 行列 を用いる定式化について触れておく。(これは $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ の代数的特徴づけや周期的格子の取扱いなどに威力を発揮する。多成分理論も同様に $\infty \times \infty$ 行列で定式化できる。) 次の対応を考える:

$$(1.4) \quad A = \sum_{v \in \mathbb{Z}} a_v(s) e^{v g_s} \longleftrightarrow A \Lambda = \sum_{v \in \mathbb{Z}} \text{diag}[a_v(s)] \Lambda^v$$

ここに $\Lambda = (\delta_{\mu, \nu-1})_{\mu, \nu \in \mathbb{Z}} = \begin{bmatrix} \ddots & -1 & 0 & \cdots \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$. (1.4) は和・積を保つ。

$\{A: A = \sum_{-\infty < v < \infty} a_v e^{v g_s}\}$, $\{A: A = \sum_{-\infty < v < \infty} a_v e^{v g_s}\}$ は各々 $\mathbb{C}$ -algebra をなし, 交換子について Lie 環をなす. $(\sum_{-\infty < v < \infty}, \sum_{-\infty < v < \infty})$ は各々或る m — A に依存する — に対して $\sum_{-\infty < v \leq m}$, $\sum_{m \leq v < \infty}$ という範囲で総和をとる意味.) (1.4) によって, これらに無限次行列環が対応する:

$$\begin{aligned}
 \{A; A = \sum_{-\infty < \nu < \infty} a_\nu e^{\nu \partial_s}\} &\stackrel{(1.4)}{\sim} \{A = (a_{\mu, \nu})_{\substack{\mu, \nu \in \mathbb{Z} \\ \downarrow \rightarrow}} : (\exists m) a_{\mu, \nu} = 0 \text{ for } \nu - \mu > m\} \\
 &= \left\{ A = \begin{bmatrix} \text{diagonal with } 0 \text{ at } (0,0) \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{A; A = \sum_{-\infty < \nu < \infty} a_\nu e^{\nu \partial_s}\} &\sim \{A = (a_{\mu, \nu})_{\mu, \nu \in \mathbb{Z}} : (\exists m) a_{\mu, \nu} = 0 \text{ for } \mu - \nu > m\} \\
 &= \left\{ A = \begin{bmatrix} \text{anti-diagonal with } 0 \text{ at } (0,0) \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

実際に各々の行列の集合の中で和・積が意味をもつことは明らかである。しかし $\begin{bmatrix} \text{diagonal with } 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} \text{anti-diagonal with } 0 \end{bmatrix}$ の間の積は一般には代数的に定義できない。(何らかの収束条件を課せば別だが)

(1.4) は(交換)積を保つので (1.1), (1.2), (1.3) はすべて対応する無限次行列に対する方程式に書き直される。 ∂_s が $\Lambda^{\pm 1}$ に対応することに注意せよ。(無限次行列表示については §3 で多成分の場合も含めてもう少し詳しく説明する)

§2. r 成分理論の定式化 (差分作用素による)

r 成分理論を定式化するには、線型問題から出発してその積分可能条件として Lax 方程式や Zakharov-Shabat 方程式を導き出す方がわかりやすい。以下この道順で説明する。

1 個の離散変数 s , および連続変数 $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(r)}), y = (y^{(1)}, \dots, y^{(r)}), x^{(\alpha)} = (x_n^{(\alpha)})_{n=1}^{\infty}, y^{(\alpha)} = (y_n^{(\alpha)})_{n=1}^{\infty} (\alpha=1, \dots, r)$ を用意する。

1 成分戸田方程式 ([4]) や多成分 KP 方程式 ([1], [2], [3])

の場合から類推して、次のような線型問題を採用するのが自然である：

$$(2.1) \quad \begin{cases} (\partial_{x_n}^{(\alpha)} - B_n^{(\alpha)}) \Psi = 0, \\ (\partial_{y_n}^{(\alpha)} - C_n^{(\alpha)}) \Psi = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \Psi = \Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}, \\ \alpha = 1, \dots, r, \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

ここに $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ は $r \times r$ 行列型の形式的波動函数, $B_n^{(\alpha)}, C_n^{(\alpha)}$ は $r \times r$ 行列型差分作用素で次のような形を仮定する：

$$(2.2) \quad \begin{cases} \Psi_{(s,x,y;\lambda)}^{(\infty)} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} W_{\nu}^{(\infty)}(s,x,y) \lambda^{-\nu} \right) \lambda^s \text{diag} [e^{\eta(x^{(1)};\lambda)}, \dots, e^{\eta(x^{(r)};\lambda)}], \\ \Psi_{(s,x,y;\lambda)}^{(0)} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} W_{\nu}^{(0)}(s,x,y) \lambda^{\nu} \right) \lambda^s \text{diag} [e^{\eta(y^{(1)};\lambda^{-1})}, \dots, e^{\eta(y^{(r)};\lambda^{-1})}], \\ W_0^{(\infty)} = 1_r, \quad W_0^{(0)} \text{ は可逆行列}, \\ B_n^{(\alpha)} = E_{\alpha} e^{n\partial_s} + B_{n,1}^{(\alpha)}(s,x,y) e^{(n-1)\partial_s} + \dots + B_{n,n}^{(\alpha)}(s,x,y), \\ C_n^{(\alpha)} = C_{n,0}^{(\alpha)}(s,x,y) e^{-n\partial_s} + \dots + C_{n,n-1}^{(\alpha)}(s,x,y) e^{-\partial_s}. \end{cases}$$

ただし, λ は形式的 spectral parameter であり, また,

$$(2.3) \quad \begin{cases} \eta(x^{(\alpha)};\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(\alpha)} \lambda^n, \quad \eta(y^{(\alpha)};\lambda^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(\alpha)} \lambda^{-n}, \\ E_{\alpha} = \text{diag} [0, \dots, 0, \underset{\alpha}{1}, 0, \dots, 0] = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} (\alpha, \alpha) \text{成分} \\ \alpha + 1 \end{array} \right) \end{cases}$$

という記号を用いた. $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ は λ についての形式的 級数 (Laurent)

あるが, 各々 $\lambda = \infty, 0$ における局所的な波動函数を形式化したもの になっている. 則ち, (2.2) 右辺の第1の級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\dots)$ は

それぞれ $\lambda = \infty, 0$ において正則な函数, 第2の因子 $\text{diag} [\dots]$

は $\lambda = \infty, 0$ における真性特異点に対応している. また, $B_n^{(\alpha)}$

$C_n^{(\alpha)}$ はちょうど B_n, C_n を行列化したものにあたる.

さて, (2.1) の積分可能条件を考えれば直ちに以下に述べる

Lax 方程式, Zakharov-Shabat 方程式を得るのだが, ここでは
§1 の $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ にあたる作用素 (少々紛らわしいが, 以下同
じ文字 $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ であらう) を使, (2.1) をい, たん書き直
してから Lax 方程式等を導く. 則ち, (2.2) に対して

$$(2.4) \begin{cases} W^{(\infty)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} W_{\nu}^{(\infty)}(s, x, y) e^{-\nu \partial_s}, \\ W^{(0)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} W_{\nu}^{(0)}(s, x, y) e^{\nu \partial_s} \end{cases}$$

を導入する. すると (2.1) は次の方程式系に同値である:

$$(2.5) \begin{cases} \frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}} = B_n^{(\alpha)} W^{(\infty)} - W^{(\infty)} e^{n \partial_s} E_{\alpha}, \\ \frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial y_n^{(\alpha)}} = C_n^{(\alpha)} W^{(\infty)}, \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x_n^{(\alpha)}} = B_n^{(\alpha)} W^{(0)}, \\ \frac{\partial W^{(0)}}{\partial y_n^{(\alpha)}} = C_n^{(\alpha)} W^{(0)} - W^{(0)} e^{-n \partial_s} E_{\alpha} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha=1, \dots, r \\ n=1, 2, \dots \end{array} \right). \end{cases}$$

[注意: p.4 ~ 5. の注意と同様のことがこの場合にも言える.]

そこで, 次の $2r+2$ 個の行列型形式的差分作用素を導入す

る:

$$(2.6) \begin{cases} L = W^{(\infty)} e^{\partial_s} W^{(\infty)-1}, & U^{(\alpha)} = W^{(\infty)} E_{\alpha} W^{(\infty)-1}, \\ M = W^{(0)} e^{-\partial_s} W^{(0)-1}, & V^{(\alpha)} = W^{(0)} E_{\alpha} W^{(0)-1} \quad (\alpha=1, \dots, r). \end{cases}$$

このとき, これらが次の代数的条件を満たすことは明らか!

$$(2.7) \begin{cases} L, U^{(\alpha)} (\alpha=1, \dots, r) \text{ は互いに可換, } U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} U^{(\beta)}, \sum_{\alpha=1}^r U^{(\alpha)} = 1_r, \\ M, V^{(\alpha)} (\alpha=1, \dots, r) \text{ は互いに可換, } V^{(\alpha)} V^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} V^{(\beta)}, \sum_{\alpha=1}^r V^{(\alpha)} = 1_r, \\ L = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_{\nu} e^{-\nu \partial_s}, U^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} U_{\nu}^{(\alpha)} e^{-\nu \partial_s} \text{ と表わすとき, } L_0 = 1_r, U_0^{(\alpha)} = E_{\alpha}, \\ M = \sum_{\nu=0}^{\infty} M_{\nu} e^{\nu \partial_s}, V^{(\alpha)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} V_{\nu}^{(\alpha)} e^{\nu \partial_s} \text{ と表わすとき, } M_0 = W_0^{(0)}(s) W_0^{(0)}(s-1)^{-1}, \\ V_0^{(\alpha)} = W_0^{(0)}(s) E_{\alpha} W_0^{(0)}(s)^{-1}. \end{cases}$$

定理 2.1. (2.5) をみたす $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ に対し $L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}$ を (2.6)

により定義し, 更に

$$(2.8) \quad \begin{cases} B_n^{(\alpha)} = (L^n U^{(\alpha)})_+, \\ C_n^{(\alpha)} = (M^n V^{(\alpha)})_- \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} ()_{\pm} \text{の定義はスカラー} \\ \text{微分作用素の場合と} \\ \text{全く同様である.} \end{array} \right]$

を導入すると, Lax 方程式系

$$(2.9) \quad \begin{cases} [\partial_{x_n^{(\alpha)}} - B_n^{(\alpha)}, L] = [\partial_{x_n^{(\alpha)}} - B_n^{(\alpha)}, U^{(\beta)}] = 0, \\ [\partial_{y_n^{(\alpha)}} - C_n^{(\alpha)}, L] = [\partial_{y_n^{(\alpha)}} - C_n^{(\alpha)}, U^{(\beta)}] = 0, \\ \text{および, } L, U^{(\alpha)} \text{ を } M, V^{(\alpha)} \text{ で置き換えた方程式} \end{cases} \quad \begin{matrix} (\alpha, \beta = 1, \dots, r) \\ (n = 1, 2, \dots) \end{matrix}$$

および Zakharov-Shabat 方程式系

$$(2.10) \quad \begin{cases} [\partial_{x_m^{(\alpha)}} - B_m^{(\alpha)}, \partial_{x_n^{(\beta)}} - B_n^{(\beta)}] = [\partial_{y_m^{(\alpha)}} - C_m^{(\alpha)}, \partial_{y_n^{(\beta)}} - C_n^{(\beta)}] \\ = [\partial_{x_m^{(\alpha)}} - B_m^{(\alpha)}, \partial_{y_n^{(\beta)}} - C_n^{(\beta)}] = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (\alpha, \beta = 1, \dots, r) \\ (m, n = 1, 2, \dots) \end{matrix}$$

が成立する. $\square$

注意 (2.9), (2.10) が線型系 (2.1) の積分可能条件に他ならない.

$W^{(\infty)}, W^{(0)}$ という作用素を導入し, (2.5) を仲介にすることによ

り, 積分可能条件の導出が極めて円滑に行われることに注意

されたい. なお (3.6) が次に同値であることにも注意をした:

$$(2.11) \quad \begin{cases} L \Psi^{(\infty)} = \lambda \Psi^{(\infty)}, & U^{(\alpha)} \Psi^{(\infty)} = \Psi^{(\infty)} E_{\alpha}, \\ M \Psi^{(0)} = \lambda^{-1} \Psi^{(0)}, & V^{(\alpha)} \Psi^{(0)} = \Psi^{(0)} E_{\alpha} \end{cases} \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

この意味で (2.1) は 固有値問題 (2.11) のスペクトル保存変形 を与

えるものとみなされる. これを L, M に関する方程式に書き直したものが (2.9), (2.10) に他ならない. $\square$

さて, 今度は $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}, W^{(\infty)}, W^{(0)}$ のことは忘れて, 改めて (2.9) (2.10) から出発することによろ. このとき, 次の成立する:

定理 2.2. 一般に, (2.7) を満たす形式的差分作用素 ($r \times r$ 行列型) $L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, r$) に対して, $B_n^{(\alpha)}, C_n^{(\alpha)}$ を (2.8) により定義するとき, Lax 方程式系 (2.9) と Zakharov-Shabat 方程式系 (2.10) は同値である. $\square$

そこで (2.9) 又は同値な (2.10) を r 成分戸田方程式 hierarchy と呼ぶ. $r = 1$ の場合には § 1 で説明した 1 成分理論に一致する. これが r 成分理論の定式化である.

定理 2.1 は (2.5) の解から r 成分戸田方程式 hierarchy の解が得られることを主張している. ところが逆に,

定理 2.3. (2.7) の下で hierarchy (2.9), (2.10) を満たす $L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}$ に対して, (2.5), (2.6) を満たす $W^{(\alpha)}, W^{(0)}$ が存在する. (unique ではない.) $\square$

$W^{(\alpha)}, W^{(0)}$ に対して右から定数係数差分作用素をかけたも $L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}$ は変わらない. これが gauge 変換とも呼ばれる自由度であることは § 1 で述べた通りである. 定理 (2.3) により, r 成分戸田方程式 hierarchy は, いわば potential にあたる $W^{(\alpha)}, W^{(0)}$ に対する方程式 (2.5) へと変換されるわけである. この意味で (2.5) の α がより根源的な性格をもつ. そのことは, § 4 で述べる波動函数の代数的特徴づけ・多成分 KP 理論との関連 etc を見ればもっとはっきりする.

注意 いわゆる 非可換戸田方程式 は,

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \dots = x^{(r)} (= x) \quad \text{と書く}, \quad y^{(1)} = \dots = y^{(r)} (= y) \quad \text{と書く}.$$

という sector において回復される。則ち, B_n, C_n を

$$B_n = \sum_{\alpha=1}^r B_n^{(\alpha)} \Big|_{\substack{x^{(1)} = \dots = x^{(r)} = x \\ y^{(1)} = \dots = y^{(r)} = y}}, \quad C_n = \sum_{\alpha=1}^r C_n^{(\alpha)} \Big|_{\substack{x^{(1)} = \dots = x^{(r)} = x \\ y^{(1)} = \dots = y^{(r)} = y}}$$

と書くとき, $B_n, C_n, L, M, W^{(\infty)}, W^{(0)}$ (後の4つもやはり上の sector に制限する。それを同じ文字で表わしている) は (1.1), (1.2), (1.3) と同じ形の方程式をみたす。これが非可換戸田方程式に他ならない。これでは, 多成分理論における時間発展を十分に取り出していないのである。□

§ 3. r成分理論の定式化(無限次行列による)。

無限次行列による定式化は差分作用素によるものと同値であるが, 興味深い側面を持ち, 時として非常に便利であるのでこの節で説明しておこう。

基本的には定式化は1成分の場合と同じで, (1.4) による対応を Q_N 或 $r \times r$ 行列の場合に拡張することにより得られる。則ち, 次の対応を考える:

$$(3.1) \quad A = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} A_{\nu}(s) e^{\nu \partial_s} \longleftrightarrow A = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \text{Diag}[A_{\nu}(s)] \bigwedge_{s \in \mathbb{Z}}^{\nu}$$

$$(A_{\nu}(s): r \times r \text{ 行列}) \quad \left(M_{\mathbb{Z} \times r}^{\cap}(\mathbb{C}) = M_1(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}^r) \right)$$

$$= \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbb{Z} \times r} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & A_{-1}^{(-1)} & A_0^{(-1)} & A_1^{(-1)} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & A_{-1}^{(0)} & A_0^{(0)} & A_1^{(0)} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right] \xrightarrow{\mathbb{Z} \times r} \\ \xrightarrow{\mathbb{Z} \times r} \end{array}$$

... -2 -1 0 1 ...

ここに,

$$\Lambda = \Lambda \otimes 1_r = \begin{pmatrix} 0 & 1_r & & \\ & 0 & 1_r & \\ & & 0 & 1_r \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{また, } \text{Diag}[A_\nu(s)]_{s \in \mathbb{Z}}$$

は $(\mathbb{Z} \times r) \times (\mathbb{Z} \times r)$ 行列の対角 block は, $r \times r$ 行列 $A_\nu(s) (s \in \mathbb{Z})$ を並べたものである. つまり (1.4) では $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ に作用する $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列を対応させたのに対して, ここでは $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}^r$ に作用する $(\mathbb{Z} \times r) \times (\mathbb{Z} \times r)$ 行列を対応させるのである. 行・列をあらわす index set を $\mathbb{Z} \times r$ (但し r は集合 $\{1, \dots, r\}$ の略記のつもり.) としている.

更に $(A)_+ = \sum_{\nu \geq 0} A_\nu(s) e^{\nu \partial_s}$, $(A)_- = \sum_{\nu < 0} A_\nu(s) e^{\nu \partial_s}$ に対応して

$$(3.2) \quad \begin{cases} (\Lambda)_+ = \sum_{\nu \geq 0} \text{Diag}[A_\nu(s)]_{s \in \mathbb{Z}} \Lambda^\nu \\ (\Lambda)_- = \sum_{\nu < 0} \text{Diag}[A_\nu(s)]_{s \in \mathbb{Z}} \Lambda^\nu \end{cases}$$

と置く.

(3.1) は和と積を保ち, $(A)_\pm$ もちょうど $(A)_\pm$ と対応しているの
で, $W^{(\alpha)}, W^{(0)}, L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}, B_n^{(\alpha)}, C_n^{(\alpha)}$ に対応する $(\mathbb{Z} \times r) \times (\mathbb{Z} \times r)$
行列を $W^{(\alpha)}, W^{(0)}, L, M, U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}, B_n^{(\alpha)}, C_n^{(\alpha)}$ というように字体
を変えて記すことにすれば, (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), (2.10) が
そのまゝの形でこれらの $(\mathbb{Z} \times r) \times (\mathbb{Z} \times r)$ 行列達に対する関係式
に書きかえられる. $e^{\pm \partial_s}$ は $\Lambda^{\pm 1}$ に対応することに注意.

また (2.1), (2.11) もまた $\Psi^{(\alpha)}, \Psi^{(0)}$ に対応する無限次行列によ

リ書き直される, 則ち, (2.2)前半に対応して

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Psi_{(x,y)}^{(\infty)} = W_{(x,y)}^{(\infty)} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^r \eta(x^{(\alpha)}, \Lambda) \otimes E_{\alpha}\right) \\ \Psi_{(x,y)}^{(0)} = W_{(x,y)}^{(0)} \exp\left(\sum_{\alpha=1}^r \eta(y^{(\alpha)}, \Lambda^{-1}) \otimes E_{\alpha}\right) \end{cases}$$

とおく. ただし記号は (2.3) に準ずる. このとき (2.1), (2.11) は
各々次の (3.4), (3.5) に同値である:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x_n^{(\alpha)}} = B_n^{(\alpha)} \Psi, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y_n^{(\alpha)}} = C_n^{(\alpha)} \Psi. \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \Psi = \Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}, \\ \alpha = 1, \dots, r, \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

$$(3.5) \quad \begin{cases} L \Psi^{(\infty)} = \Psi^{(\infty)} \Lambda, \quad U^{(\alpha)} \Psi^{(\infty)} = \Psi^{(\infty)} (1_Z \otimes E_{\alpha}), \\ M \Psi^{(0)} = \Psi^{(0)} \Lambda^{-1}, \quad V^{(\alpha)} \Psi^{(0)} = \Psi^{(0)} (1_Z \otimes E_{\alpha}), \quad (\alpha = 1, \dots, r). \end{cases}$$

以上のように, r 成分戸田方程式の理論は, 無限次行列の
スペクトル保存変形としてもとらえられる.

§4. 波動函数の特徴付け・2r成分KP理論との関係.

この節では $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ 或は $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ を特徴づける双線型方程式について説明する. これにより 2r成分KP理論との関連が明らかになる.

まず概見的に議論を進めよう. (3.4) に注目する.

$$(4.1) \quad \begin{cases} \Psi^{(\infty)-1} = e^{-\sum_{\alpha=1}^r \eta(x^{(\alpha)}, \Lambda) \otimes E_{\alpha}} W^{(\infty)-1}, \\ \Psi^{(0)-1} = e^{-\sum_{\alpha=1}^r \eta(y^{(\alpha)}, \Lambda^{-1}) \otimes E_{\alpha}} W^{(0)-1} \end{cases}$$

(3.4) の右からかけ、

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Psi^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}} \cdot \Psi^{(\infty)-1} = B_n^{(\alpha)} = \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_n^{(\alpha)}} \cdot \Psi^{(0)}, \\ \frac{\partial \Psi^{(\infty)}}{\partial y_n^{(\alpha)}} \cdot \Psi^{(\infty)-1} = C_n^{(\alpha)} = \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial y_n^{(\alpha)}} \cdot \Psi^{(0)}. \end{cases}$$

但し、

$$\frac{\partial \Psi^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}} \cdot \Psi^{(\infty)-1} = \left(\frac{\partial W^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)}} + W^{(\infty)} \Lambda^n \otimes E_\alpha \right) W^{(\infty)-1}, \text{ etc...}$$

このように、上式両式は常に $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ を使って書き直し、
 $\exp \sum_{\alpha=1}^l \eta(x^{(\alpha)}, \Lambda) \otimes E_\alpha$, $\exp \sum_{\alpha=1}^l \eta(y^{(\alpha)}, \Lambda^{-1}) \otimes E_\alpha$ etc を消去した形で解釈
 する。(3.3), (4.1) に注意すればこれは可能。) このすれば(4.2)

両辺は無限次行列の積として意味をもつ。同様に解釈して、

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)} \partial x_m^{(\beta)}} \cdot \Psi^{(\infty)-1} = \frac{\partial B_n^{(\alpha)}}{\partial x_m^{(\beta)}} + B_m^{(\beta)} = \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_n^{(\alpha)} \partial x_m^{(\beta)}} \cdot \Psi^{(0)-1},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(\infty)}}{\partial x_n^{(\alpha)} \partial y_m^{(\beta)}} \cdot \Psi^{(\infty)-1} = \frac{\partial C_n^{(\alpha)}}{\partial y_m^{(\beta)}} + C_m^{(\beta)} = \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial y_n^{(\alpha)} \partial y_m^{(\beta)}} \cdot \Psi^{(0)-1},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{(\infty)}}{\partial y_n^{(\alpha)} \partial y_m^{(\beta)}} \cdot \Psi^{(\infty)-1} = \frac{\partial C_n^{(\alpha)}}{\partial y_m^{(\beta)}} + C_m^{(\beta)} = \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial y_n^{(\alpha)} \partial y_m^{(\beta)}} \cdot \Psi^{(0)-1},$$

etc, ..., 任意の高階導関数について同様のことが言える。

このようにして、結局、次の結果を得る：

定理 4.1. τ 成分戸田方程式 hierarchy の波動関数 $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ に

対して次が成立する：任意の多重指数 μ, ν に対して、

$$(4.3) \quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\nu \Psi_{(x,y)}^{(\infty)} \right] \cdot \Psi_{(x,y)}^{(\infty)-1} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\nu \Psi_{(x,y)}^{(0)} \right] \cdot \Psi_{(x,y)}^{(0)-1}$$

$$\left(\Rightarrow \text{即ち、} \mu = (\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \dots, \mu_1^{(r)}, \mu_2^{(r)}, \dots), \nu = (\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}, \dots, \nu_1^{(r)}, \nu_2^{(r)}, \dots), \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\mu &= \prod_{\alpha=1}^r \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x_n^{(\alpha)}} \right)^{\mu_n^{(\alpha)}}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\nu &= \prod_{\alpha=1}^r \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial y_n^{(\alpha)}} \right)^{\nu_n^{(\alpha)}} \end{aligned} \right)$$

($\mu_n^{(\alpha)}, \nu_n^{(\alpha)} \geq 0$, 有限個を除き 0.)

逆に, これ $\alpha(3.3)$ の形の $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ に対して成立すれば, $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ は r 成分の方程式 hierarchy の波動函数を与える. 則ち, 対応する $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ が (2.5) をみたす.

[但し, (4.3) 両辺の積は (4.2) の直後に注意したように解釈する.] $\square$

これが 波動函数の双線型方程式 (4.3) による特徴づけ である.

(4.3) は $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ を使って次のようにも言いかえられる;

定理 4.2. (4.3) は次に同値である:

[“ t ” は転置
をあらわす.]

$$(4.4) \quad \oint \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\nu} \Psi_{(s', x, y; \lambda)}^{(\infty)} \right]^t \Psi_{(s, x, y; \lambda)}^{*(\infty)} d\lambda \\ = \oint \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\nu} \Psi_{(s', x, y; \lambda)}^{(0)} \right]^t \Psi_{(s, x, y; \lambda)}^{*(0)} d\lambda \quad \text{for any } s, s'$$

但し, $\Psi^{*(\infty)}, \Psi^{*(0)}$ は, $W_{\nu}^{*(\infty)}, W_{\nu}^{*(0)}$ を

$$(4.5) \quad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} W_{\nu}^{*(\infty)}(s, x, y) e^{\nu \partial_s} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\nu \partial_s} {}^t W_{\nu}^{(\infty)}(s-1, x, y) \right)^{-1}, \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} W_{\nu}^{*(0)}(s, x, y) e^{-\nu \partial_s} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu \partial_s} {}^t W_{\nu}^{(0)}(s-1, x, y) \right)^{-1} \end{cases}$$

によって定義するとき,

$$(4.6) \quad \begin{cases} \Psi_{(s, x, y; \lambda)}^{*(\infty)} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} W_{\nu}^{*(\infty)}(s, x, y) \lambda^{-\nu} \right) \lambda^{-s} \text{diag} [e^{-\eta(x^{(1)}; \lambda)}, \dots, e^{-\eta(x^{(r)}; \lambda)}], \\ \Psi_{(s, x, y; \lambda)}^{*(0)} = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} W_{\nu}^{*(0)}(s, x, y) \lambda^{\nu} \right) \lambda^{-s} \text{diag} [e^{-\eta(y^{(1)}; \lambda^{-1)}}, \dots, e^{-\eta(y^{(r)}; \lambda^{-1)}}, \end{cases}$$

によって与える. また $\oint d\lambda$ は 形式的 Laurent 級数 に対して形式的に $(\lambda^{-1} \text{ の係数}) \times 2\pi i$ を対応させる記号として用いている;

$$\oint \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_{\nu} \lambda^{\nu} d\lambda = 2\pi i a_{-1}. \quad \square \quad \circ \quad \circlearrowleft x_{\infty}$$

さて, (4.3), (4.4) は Taylor 係数の形をしてゐるので, 次のようにまとめて書くことができる: 波動函数を特徴付ける双線型方程式

$$(4.3') \quad \Psi^{(\infty)}(x', y') \Psi^{(\infty)}(x, y)^{-1} = \Psi^{(0)}(x', y') \Psi^{(0)}(x, y)^{-1} \quad \text{for any } x, x', y, y'$$

$$(4.4') \quad \oint \Psi^{(\infty)}(s', x', y'; \lambda)^t \Psi^{(0)}(s, x, y; \lambda) d\lambda = \oint \Psi^{(0)}(s', x', y'; \lambda)^t \Psi^{(\infty)*}(s, x, y; \lambda) d\lambda$$

for any s, s', x, x', y, y' .

但し, 今度は, (4.2) 直後の解釈をしても, 両辺の種は無限次行列或は λ の形式的 Laurent 級数として代数的には意味をもたない. (4.3'), (4.4') は $x' - x, y' - y$ を不定変数とする (4.3), (4.4) の母函数表示 とみなすべきである. つまり, (4.3'), (4.4') は $x' - x, y' - y$ に関する形式的巾級数であつて, $\frac{(x' - x)^\mu}{\mu!} \frac{(y' - y)^\nu}{\nu!}$ ($= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^r \frac{(x_n^{(\infty)} - x_n^{(0)})^{\mu_n^{(\alpha)}}}{\mu_n^{(\alpha)}!} \frac{(y_n^{(\infty)} - y_n^{(0)})^{\nu_n^{(\alpha)}}}{\nu_n^{(\alpha)}!}$) の係数が (4.3), (4.4) に他ならない.

(4.4') によつて 2r 成分 KP 理論との関連 がわかる.

[3, III] の記号に従つて $W_{l_1, \dots, l_{2r}}(x^{(1)}, \dots, x^{(2r)}; \lambda)$ を 2r 成分 KP 方程式の波動函数 ($l = (l_1, \dots, l_{2r})$ は Schlesinger 変換をあらわす) とする. (これは $(2r) \times (2r)$ 行列である.) すると結果は;

定理 4.3. $W_l(x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}; \lambda)$ を 4 つの $r \times r$ block に分けて, $\Psi_l^{(\infty)}, \Psi_l^{(0)}$ を次のように定義する:

$$(4.7) \quad W_{l+(s, \dots, s, -s, \dots, -s)}(x^{(1)}, \dots, x^{(r)}, y^{(1)}, \dots, y^{(r)}; \lambda) = \begin{bmatrix} \Psi_l^{(\infty)}(s, x, y; \lambda) \begin{bmatrix} \lambda^{l_1} \\ \vdots \\ \lambda^{l_r} \end{bmatrix} & \Psi_l^{(0)}(s, x, y; \lambda) \begin{bmatrix} \lambda^{l_{r+1}} \\ \vdots \\ \lambda^{l_{2r}} \end{bmatrix} \\ * & ** \end{bmatrix}$$

← r → ← r → ↑ r ↓

このとき、適当な $\Psi_l^{*(\infty)}, \Psi_l^{*(0)}$ (これは W_l と対応する W_l^* を使って得られる。) をえうべば、 Ψ_l, Ψ_l^* は (4.4), (4.4') をみたす。従って、 l 成分戸田方程式の波動函数を与える。□

$\Psi_l^{(\infty)}, \Psi_l^{(0)}$ は戸田方程式における Schlesinger 変換というべきものだが、一般の波動函数 $\Psi^{(\infty)}, \Psi^{(0)}$ に対してこのような離散変数を含む変換が成り立つ訳ではない。上では、あくまで、2成分KP方程式の解に parametrize された解のみ扱っている。ただ、例外的に $l=1$ (1成分理論) の場合には、 s の shift が583と2成分KPの Schlesinger 変換の全体に一致している。その為、 τ 函数の導入や双線型化が円滑に行われる。

一般の l 成分戸田方程式の解・波動函数に対しては、今のところ、 τ 函数の議論が余りうまく行っていない。勿論、定理4.3のように多成分KPの解で parametrize されるものについては、多成分KPの τ 函数を利用する議論が有効であるが、一般的に定理2.3で存在が保証される波動函数については、まだ τ 函数の導入のしかたがわからっていない。

注意. (4.7) の対応で得られる $\Psi_l^{(\infty)}, \Psi_l^{(0)}$ の中には、すべての s に対しては必ずしも定義されないものや、意味をもたず、対応する $W_0^{(0)}$ ($\rightarrow$ (2.2)) が可逆行列でないものが含まれる。

解釈を変えれば、この解も実は意味をもつと思われるのだが、無限格子を考える限りは排除しなければならぬ。2成分KP方程式の有理解や簡単なタイプのソリトン解はこれにより排除される。

§ 5. 或る種の特殊解の具体的な構成.

この節では、或る種の Whonskian を用いて KP 方程式の特殊解を構成する方法 ([1]) の analogy により、戸田方程式の場合にも特殊解 (ソリトン解を含む) が構成できることについて説明する。以下では簡単の為 1成分の場合 についてのみ説明するが、多成分の場合も同様にできる。

まず次のような函数 $p_n(x)$, $p_n(y)$, $p_n(x,y)$ を導入する:

$$(5.1) \quad \begin{cases} p_n(x) = \sum_{\substack{v_1+2v_2+3v_3+\dots=n \\ v_1, v_2, \dots \geq 0 \text{ 整数}}} \frac{x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots}{v_1! v_2! \dots} & (n \geq 0), \\ p_n(y) = (x \rightarrow y) & (n \geq 0), \\ p_n(x;y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_{m+n}(x) p_m(y) & (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

$p_n(x)$, $p_n(y)$ は多項式だが $p_n(x;y)$ は無限級数である。その収束条件を考えるには、次のように母函数に換って考えればよい:

$$(5.2) \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \lambda^n = e^{\eta(x, \lambda)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n(y) \lambda^{-n} = e^{\eta(y, \lambda^{-1})}, \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n(x;y) \lambda^n = e^{\eta(x, \lambda) + \eta(y, \lambda^{-1})}. \end{cases}$$

(5.2) の各母函数を λ の 1 変数 Laurent 級数と見て、収束域を考

えてみよう. Cauchy-Hadamard の判定条件により, $\eta(x, \lambda)$ は $|\lambda| < (\overline{\lim}_y |x_y|^{1/p})^{-1}$ ぞ, また $\eta(y, \lambda^{-1})$ は $|\lambda| > \overline{\lim}_y |y_y|^{1/p}$ ぞ, それぞれ左義一様絶対収束する. 従って $\overline{\lim}_y |x_y|^{1/p} \cdot \overline{\lim}_y |y_y|^{1/p} < 1$ ならば $e^{\eta(x, \lambda) + \eta(y, \lambda^{-1})}$ は円環領域 $\overline{\lim}_y |y_y|^{1/p} < |\lambda| < (\overline{\lim}_y |x_y|^{1/p})^{-1}$ ぞ正則函数を定める. 特に $p_n(x; y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{|\lambda|=ct_2} e^{\eta(x, \lambda) + \eta(y, \lambda^{-1})} \lambda^{-n-1} d\lambda$ (積分路はこの円環領域の中にゐる.) が定まる.

しかし後に現れて来る $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n p_n(x, y)$ の形の級数を扱う為には, $p_n(x; y)$ に対する評価もさめてもう少し詳しく調べておく必要がある. これは上に述べたような Cauchy の積分定理などを用いて議論できる. ひとつの結果を与えよう:

補題 5.1. (i) $\overline{\lim}_y |x_y|^{1/p} < \infty$ ならば任意の $r > \overline{\lim}_y |x_y|^{1/p}$ に対して正定数 C が存在して

$$(5.3) \quad p_n(|x_1|, |x_2|, \dots) \leq C r^n \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) $\overline{\lim}_y |x_y|^{1/p} < \infty, \overline{\lim}_y |y_y|^{1/p} < \infty, \overline{\lim}_y |x_y|^{1/p} \cdot \overline{\lim}_y |y_y|^{1/p} < 1$ ならば級数

$$p_n(x; y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} p_{n+m}(x) p_m(y)$$

は絶対収束する. 更に,

$$(5.4) \quad r_1 > \overline{\lim}_y |x_y|^{1/p}, \quad r_2 > \overline{\lim}_y |y_y|^{1/p}, \quad r_1 r_2 < 1$$

をみたす正定数 r_1, r_2 を勝手に取り, (i) により対応する定数を C_1, C_2 とすれば,

$$(5.5) \quad p_n(|x_1|, |x_2|, \dots; |y_1|, |y_2|, \dots) \leq \sum_m p_{n+m}(|x_1|, |x_2|, \dots) p_m(|y_1|, |y_2|, \dots) \\ \leq C_1 C_2 r_1^{\max(n, 0)} r_2^{-\min(n, 0)} / (1 - r_1 r_2) \\ (\text{for } n \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

注意 (i) は, $e^{\eta(x, \lambda)}$ が $|\lambda| < r^{-1}$ ぞ有界正則函数とて,

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \oint_{|\lambda|=r} e^{n(x,\lambda)} \lambda^{-n-1} d\lambda$$

これから直ちに従う. (ii) は (i) の評価を用いて $n \geq 0, n < 0$ に分けて考えればすぐ示せる. (例えば, $n \geq 0$ のときは

$$\begin{aligned} \sum_m p_{n+m}(x_1, x_2, \dots) p_m(y_1, y_2, \dots) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\dots) \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} C_1 r_1^{n+m} \cdot C_2 r_2^m = \frac{C_1 C_2 r_1^n}{1-r_1 r_2} \end{aligned}$$

補題の (5.5) の評価を用いれば直ちにわかるように,

$$(5.6) \quad |c_n| \leq \text{Const} \cdot R_1^{-\max(n,0)} R_2^{\min(n,0)} \quad \left(n \in \mathbb{Z}; \begin{array}{l} R_1, R_2 \text{ は} \\ R_1 > r_1, R_2 > r_2 \\ \text{とみた定数} \end{array} \right)$$

という形の不等式をみたす $c_n (n \in \mathbb{Z})$ に対して, 級数 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n p_n(x, y)$ は (5.4) の形の (x, y) のなす領域で広義一様絶対収束する. $\square$

さて戸田方程式の解の構成に進もう. 我々は (1.3) の解 $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ を構成する.

N 個の無限タテベクトル $\xi^{(j)} = (\xi_\nu^{(j)})_{\nu \in \mathbb{Z}} (j=0, 1, \dots, N-1)$ を用意する. これらに対して次の級数をつくる:

$$(5.7) \quad \xi^{(j)}(s, x, y) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} p_{\nu-s}(x, y) \xi_\nu^{(j)} \quad (j=0, \dots, N-1).$$

(この級数の収束条件については, 上の注意で論じた通り.)

更に次の条件を課す:

$$(5.8) \quad \det \left[\xi_{s+i}^{(j)}(x, y) \right]_{i,j=0, \dots, N-1} \neq 0 \quad \text{for any } s \in \mathbb{Z}.$$

このように $\xi^{(j)}(s, x, y) (j=0, \dots, N)$ に対して差分作用素

$$(5.9) \quad W_N = e^{N\partial_s} + w_1 e^{(N-1)\partial_s} + \dots + w_N$$

を次の方程式により定める:

$$(5.10) \quad W_N \xi^{(j)}(s, x, y) = 0 \quad (j = 0, \dots, N-1).$$

これは $W_1, \dots, W_N$ に対する 1 次方程式系の 2' (Cramer の公式により具体的に解ける). 結果は; $k = 0, 1, \dots, N-1$ に対して

$$(5.11) \quad W_{N-k} = - \det \begin{bmatrix} \xi^{(0)}(s, x, y), \dots, \xi^{(N-1)}(s, x, y) \\ \vdots \\ \xi^{(0)}(s+N, x, y), \dots, \xi^{(N-1)}(s+N, x, y) \\ \vdots \\ \xi^{(0)}(s+N-1, x, y), \dots, \xi^{(N-1)}(s+N-1, x, y) \end{bmatrix}^{(k)} / \det \left[\xi^{(j)}(s+i, x, y) \right]_{i,j=0,\dots,N-1}$$

$$= - \frac{\det \left[\xi^{(j)}(s+i, x, y) : \text{第 } k \text{ 行} \rightarrow \xi^{(j)}(s+N, x, y) \right]_{i,j=0,\dots,N-1}}{\det \left[\xi^{(j)}(s+i, x, y) \right]_{i,j=0,\dots,N-1}}.$$

ここで仮定 (5.8) により, 分母は消えない. しかも, 特に

$$(5.12) \quad W_N = (-1)^N \det \left[\xi^{(j)}(s+i+1, x, y) \right]_{i,j=0,\dots,N-1} / \det \left[\xi^{(j)}(s+i, x, y) \right]_{i,j=0,\dots,N-1} \neq 0.$$

こうして定まる W_N に対して, 求める解は次の形で与えられる:

定理 5.2. $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ を

$$(5.13) \quad \begin{cases} W^{(\infty)} = W_N e^{-N\alpha} e^{\eta(y, e^{-\alpha s})}, \\ W^{(0)} = W_N e^{\eta(x, e^{\alpha s})} \end{cases},$$

により定義すると, これは (1.3) をみたす. $\square$

注意. 更に τ 関数 $\tau'(s, x, y)$ ([4]) は (5.11) の分母に現れて
 いる行列式に一致する. $\square$

この定理を示す為に, W_N が x, y についてみたす方程式を

導く。その為には補題を2つ用意する。

補題5.3. $P_\nu(x; y)$ に対して次が成立する:

$$\frac{\partial P_\nu(x; y)}{\partial x_n} = P_{\nu-n}(x, y), \quad \frac{\partial P_\nu(x; y)}{\partial y_n} = P_{\nu+n}(x, y).$$

従ってまた, $\xi^{(j)}(s, x, y)$ に対して次が成立する:

$$(5.14) \quad \frac{\partial \xi^{(j)}(s, x, y)}{\partial x_n} = \xi^{(j)}(s+n, x, y), \quad \frac{\partial \xi^{(j)}(s, x, y)}{\partial y_n} = \xi^{(j)}(s-n, x, y). \quad \square$$

(これは母函数表示(5.2)を微分することによりすぐ示せる.)

補題5.4. (割算定理) 差分作用素 V が次の形を(2)いるとする:

$$(5.15) \quad V = u_0(s) e^{N\partial s} + u_1(s) e^{(N-1)\partial s} + \dots + u_N(s), \quad u_0(s) \text{ 可逆.}$$

このとき, $U = \sum_{l \geq 0} u_l(s) e^{l\partial s}$ という形の任意の差分作用素に対して次のような Q, R が一意的に存在する:

$$(5.16) \quad \begin{cases} U = QV + R, \\ Q = \sum_{l \geq 0} q_l(s) e^{l\partial s}, \quad R = \sum_{l=0}^{N-1} r_l(s) e^{l\partial s}. \end{cases}$$

以上のことは, $e^{\partial s}$ をすべて $e^{-\partial s}$ とおきかえた設定に於ても同じ形で成立する. $\square$ (則ち, $e^{\partial s}$ の負の冪からなる差分作用素の同型)

(実際は(5.17)を書き下してみれば, $u_0(s)$ の可逆性により, Q, R の係数が一意的に定まってしまうことは容易に示せる.)

さて, これらを用いて議論を進める。

まず, (5.16) の両辺を x_n で微分する。そして(5.14)を用いると,

$$(5.17) \quad \left(\frac{\partial W_N}{\partial x_n} + W_N e^{n\partial_s} \right) \xi^{(j)}(s, x, y) = 0. \quad (j=0, \dots, N-1).$$

$\frac{\partial W_N}{\partial x_n} + W_N e^{n\partial_s}$ を補題(5.4)を用いて W_N で割算すると, $\left[\begin{array}{l} \text{商を } B_n \\ \text{と記す.} \end{array} \right]$

$$\begin{cases} \frac{\partial W_N}{\partial x_n} + W_N e^{n\partial_s} = B_n W_N + R_n \\ B_n = (B_n)_+, \\ R_n = \sum_{\ell=0}^{N-1} r_\ell(s, x, y) e^{\ell\partial_s} \end{cases}$$

と B_n, R_n が存在する. $R_n = 0$ となることを示そう.

実際, (5.17) とあわせると

$$R_n \xi^{(j)}(s, x, y) = 0. \quad (j=0, \dots, N-1)$$

これを r_ℓ についての 1 次方程式に書き直すと,

$$[r_0, r_1, \dots, r_{N-1}] \left[\xi^{(j)}(s+i, x, y) \right]_{(i,j=0, \dots, N-1)} = 0.$$

仮定(5.8)により $[r_0, \dots, r_{N-1}] = 0$ となければならない.

かくして, 次の方程式が示された:

$$(5.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial W_N}{\partial x_n} + W_N e^{n\partial_s} = B_n W_N, \quad (n=1, 2, \dots), \\ B_n = (B_n)_+. \end{cases}$$

次に, (5.10) を y_n で微分し (5.14) を用いると,

$$(5.19) \quad \left(\frac{\partial(W_N e^{-N\partial_s})}{\partial y_n} + (W_N e^{-N\partial_s}) e^{-n\partial_s} \right) \xi^{(j)}(s+N, x, y) = 0. \quad (j=0, \dots, N-1)$$

$W_N e^{-N\partial_s}$ には (5.12) に注意すると補題 5.4 (但し, 今度は e^{∂_s} の負巾からなる差分作用素の間の割算) が使える. これを割算して,

$$\begin{cases} \frac{\partial(W_N e^{-N\partial_s})}{\partial y_n} + (W_N e^{-N\partial_s}) e^{-n\partial_s} = C_n W_N e^{-N\partial_s} + S_n, \\ C_n e^{\partial_s} = (C_n e^{-\partial_s})_-, \quad S_n = \sum_{\ell=0}^{N-1} s_\ell(s, x, y) e^{-\ell\partial_s}. \end{cases}$$

という C_n, S_n が存在する。今度は $S_n = 0$ を示さねばならぬ、
(5.19) から、

$$S_n \xi_{(s+N, x, y)}^{(j)} = 0 \quad (j=0, \dots, N-1).$$

これを $s_0, \dots, s_{N-1}$ に対する 12 次方程式に書直すと、

$$[S_{N-1}, S_{N-2}, \dots, s_0] \left[\xi_{(s+i, x, y)}^{(j)} \right]_{\substack{i, j=0, \dots, N-1 \\ (i, j) \neq (0, 0)}} = 0.$$

仮定 (5.8) により、 $[S_{N-1}, \dots, s_0] = 0$ となければならぬ。

かくして 2 次の方程式を得た：

$$(5.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial W_N}{\partial y_n} + W_N e^{-n\partial_s} = C_n W_N, & (n=1, 2, \dots), \\ C_n e^{-\partial_s} = (C_n e^{-\partial_s})_-. \end{cases}$$

(5.18), (5.20) から (5.13) により定義される $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ の (1.3) をみたすことは明らかである。(1.3) の直後の注意により B_n, C_n が $W^{(\infty)}, W^{(0)}$ により explicit に表示されることに注意せよ。

——— 以上により、定理 5.2 の検証が終わった。

注意 以上の議論は r 成分の場合も同様である。変更すべきことは、 $\xi_{\nu}^{(j)}$ を $r \times r$ 行列にするとき、 $\xi_{\nu}^{(j)}(s, x, y)$ も $r \times r$ 行列で (α, β) 成分 $\xi_{\nu}^{(j)}(s, x, y)_{\alpha\beta}$ を次のように与えることである；

$$\xi_{\nu}^{(j)}(s, x, y)_{\alpha\beta} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} p_{\nu-s}(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}) \xi_{\nu, \alpha\beta}^{(j)}.$$

W_N の係数 $w_1, \dots, w_N$ も $r \times r$ 行列とし、やはり (5.10) によって定める。

Cramer の公式を使って得られる $W_1, \dots, W_N$ の表示は (5.11) よりも複雑になる。そういう複雑化を別にすれば、あとの議論はほぼ同様である。□

注意 Bessel 函数 $J_n(z)$ の母函数表示

$$e^{\frac{t}{2}(A-\lambda^{-1})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t) \lambda^n$$

は (5.2) 第3式の特別な場合になっている。従って、 $\xi_V^{(j)}$ が適当な条件をみたしていれば 1次元戸田方程式 ((0.1) に於て $(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial}{\partial \lambda_2})\varphi = 0$ が成立するとき、 $q(s,t) = q(s, \frac{t}{2}, \frac{t}{2})$ は 1次元戸田方程式に従う。) の解が Bessel 函数を使って書けるものが得られることになる。(1次元戸田方程式(hierarchy)の解を与えるような $\xi_V^{(j)}$ の完全な特徴づけはまだよくわからない。(1982年 7月10日現在)) □

最後にソリトン解について触れておく:

$$(5.21) \quad \xi_V^{(j)} = \sum_{l=1}^M k_l^j a_{lj}, \quad \left. \begin{array}{l} k_l \ (l=1, \dots, M) \\ a_{lj} \ (l=1, \dots, M, j=0, \dots, N-1) \end{array} \right\} \text{定数,}$$

の場合には,

$$(5.22) \quad \xi_V^{(j)}(s, x, y) = \sum_{l=1}^M k_l^s e^{\eta(x, k_l) + \eta(y, k_l^{-1})} a_{lj}$$

となり、(5.11) の分子分母は指数函数の 1次結合の Wronskian の形になる。これが YYT-タイプの解を与える。特に $M=2N$ の

$$[a_{lj}]_{\substack{l=1, \dots, 2N, (\downarrow) \\ j=0, \dots, N-1 (\rightarrow)}} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad \cdots \quad 1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ -c_1 \quad \cdots \quad -c_N \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow N \\ \downarrow N \end{array} \quad c_1, \dots, c_N: \text{定数}$$

の場合には適当な指数函数をくり出すことにより、classical な Gram 行列式型のソリトン解を得る。

References

1. M. Sato: Lectures at Tokyo University. (February-May, 1981; February-June, 1982), Lectures at Nagoya University. (February, 1982), etc....
2. M. Sato: Soliton Equations as Dynamical Systems on a Infinite Dimensional Grassmann Manifolds, *Sûri Kaiseki Kenkyûsho* (RIMS, Kyoto University) *Kôkyûroku* 439 (1981).
3. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa; Transformation Groups for Soliton Equations I, II, *Proc. Japan Acad.* 57A (1981); III, VI, *J. Phys. Soc. Japan*, 50 (1981); IV, *Physica* 4D (1982); V, RIMS preprint 360.
4. K. Ueno, K. Takasaki: On the Toda lattice hierarchy, RIMS preprint 397 (1982).

戸田方程式に関しては戸田盛和先生の画期的な成果以来、逆散乱法、ポアンカレ積分とヤコビの逆問題による方法、広田の直接法、表現論的方法、等々様々な方向から数学的研究が行われた。その為、重要な文献だ^(引用すべき)けでも極めて多数にのぼる。そこで本稿の性格にかんがみ、非可換戸田方程式に触れている下記の文献のみ掲げることとお許し願いたい。^(比較的最近)

5. A. G. Reĭman, M. A. Semenov-Tjan-Sanskĭ, I. E. Frenkel: Graded Lie Algebras and Completely Integrable Dynamical Systems, *Soviet Math. Dokl.*, 20 (1979), No. 4.
6. A. V. Mikhailov: The Reduction Problem and The Inverse Scattering Method, *Physica* 3D (1981) 142.

以上.