

線型常微分方程式系の変形と τ 函数

京大数研 三輪哲二

神保道夫

研究集会では、変形の一般理論のうち代数的な部分も一通り話した。これらについては、その詳細を例と共に次の文献にまとめてある（近刊の「数学」に解説発表予定）：

◎ モノドロミー保存変形の一般論, 完全積分可能性, τ 函数の導入, ソリトン・有理解

M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I, RIMS preprint 319 (1980)

◎ Schlesinger 変換, τ 商, Painlevé 方程式の連立線型化, $sl(2)$ の場合の変形, 準周期解

M. Jimbo and T. Miwa, — II, RIMS preprint 327 (1980)

◎ "subholonomic" な系 $d\Omega(x) = \Omega(x)^2$ に対する τ 函数, 特性行列の τ 表示, τ の広田双線型方程式

M. Jimbo and T. Miwa, Deformation of linear ordinary differential equations. III, RIMS preprint 329 (1980).

これらの一般論を繰り返し述べてもあまり意味がないので、本稿では補足として一つの例を述べるに止める。

基本周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ をもつ 1次元複素トーラス $\mathbb{T}^1$ 上に、一点 α を固定する。(以下用いる Weierstrass の楕円函数の記号は、岩波数学公式集Ⅲに従う。) 整数 $l \in \mathbb{Z}$ とパラメータ $t \in \mathbb{C}$ を与えて、次の函数を考える：

$$(1) \quad y_l(z) = y_l(z; t, \alpha) \\ = \sigma(z-\alpha)^{l-1} \sigma(z+\alpha)^{-l} \sigma(z+t+(2l-1)\alpha) e^{-\frac{t}{2}(\zeta(z-\alpha) + \zeta(z+\alpha))}$$

σ 函数, ζ 函数の擬周期性から, $y_l(z)$ は $z = \pm\alpha \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}$ を除き至る所一価正則なトーラス上の函数を与える。 $z \rightarrow \alpha$ のときは

$$(2) \quad y_l(z) = \hat{y}_l(z) \cdot (z-\alpha)^{l-1} \exp\left(-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{\beta'(\alpha)}{2\beta(\alpha)}\right)\right) \\ \hat{y}_l(z) = c_0 (1 + c_1(z-\alpha) + \dots) \\ c_0 = \sigma(2\alpha)^{-l} \sigma(t+2l\alpha) e^{-\frac{t}{2}\zeta(2\alpha) - \frac{t\beta'(\alpha)}{4\beta(\alpha)}} = c_0(t, \alpha, l) \\ c_1 = \zeta(t+2l\alpha) - l\zeta(2\alpha) + \frac{t}{2}\beta(2\alpha) = c_1(t, \alpha, l)$$

なる挙動をもつ。以上の性質は逆に $y_l(z)$ を特徴づける。

被覆写像 $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $z \mapsto x = \beta(z)$ の分岐点を $e_1, e_2, e_3, e_\infty = \infty \in \mathbb{P}^1$ とする。 $\mathbb{P}^1$ 上の多価解析的行列 $Y(x)$ を次の式で定める：

$$(3) \quad Y(x) = G_0^{-1} \tilde{Y}(z) \\ G_0^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{c_0(t, \alpha, l)}, \frac{1}{c_0(t, \alpha, -l)}\right) \\ \langle 2 \rangle$$

$$\tilde{Y}(z) = \begin{pmatrix} y_L(z) & y_L(-z) \\ y_{RH}(z) & y_{RH}(-z) \end{pmatrix}$$

以下 $p(\alpha) \neq e_1, e_2, e_3, e_\infty$ と仮定する。このとき, $Y(x)$ は次の形の P^1 上の線型常微分方程式系を満たす:

$$(4) \quad \frac{dY}{dx} = A(x)Y$$

$$A(x) = \frac{A_{-2}}{(x-a)^2} + \frac{A_{-1}}{x-a} + \frac{B_1}{x-e_1} + \frac{B_2}{x-e_2} + \frac{B_3}{x-e_3}$$

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} \bar{t}/2 & \\ & -\bar{t}/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{t} = p'(\alpha)t, \quad a = p(\alpha).$$

このことを見るために, $Y(x)$ のモノドロミー性質を調べてみよう。

$x=a$ での挙動

$$\text{式(2)と, } z-\alpha = \frac{1}{p'(\alpha)}(x-a) - \frac{p''(\alpha)}{2p'(\alpha)^3}(x-a)^2 + \left(\frac{p''(\alpha)^2}{2p'(\alpha)^5} - \frac{p'''(\alpha)}{6p'(\alpha)^4}\right)(x-a)^3 + \dots$$

に注意すれば, 次の式を得る:

$$(5) \quad Y(x) = \hat{Y}^{(\alpha)}(x) e^{T^{(\alpha)}(x) + K}$$

$$(6) \quad T^{(\alpha)}(x) = \begin{pmatrix} \bar{t}/2 & \\ & -\bar{t}/2 \end{pmatrix} \frac{-1}{x-a} + \begin{pmatrix} l-1 & \\ & -l-1 \end{pmatrix} \log(x-a)$$

$$K = \begin{pmatrix} -l+1 & \\ & l+1 \end{pmatrix} \log p'(\alpha)$$

$$(7) \quad \hat{Y}^{(\alpha)}(x) = (1 + Y_1^{(\alpha)}(x-a) + \dots)$$

$$Y_1^{(\alpha)} = \frac{1}{p'(\alpha)} \tilde{Y}_1^{(\alpha)} + \frac{t}{2} \left(\frac{p''(\alpha)^2}{4p'(\alpha)^3} - \frac{p'''(\alpha)}{6p'(\alpha)^2} \right) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} - \frac{p''(\alpha)}{2p'(\alpha)^2} \begin{pmatrix} l-1 & \\ & -l-1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}_1^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} c_1(t, \alpha, l) & \frac{c_0(-t, \alpha, l-l)}{c_0(t, \alpha, l)} \\ \frac{c_0(t, \alpha, l+1)}{c_0(-t, \alpha, -l)} & c_1(-t, \alpha, -l) \end{pmatrix}$$

< 3 >

$x = e_\nu$ での挙動

はじめに $\nu = 1, 2, 3$ とする。 y_ℓ の展開は

$$(8)_\nu \quad y_\ell(z; t, \alpha) = y_\ell(\omega_\nu; t, \alpha) (1 + f_\ell^{(\nu)} \cdot (z - \omega_\nu) + \dots)$$

$$y_\ell(\omega_\nu; t, \alpha) = \frac{\sigma_\nu(t + (2\ell - 1)\alpha)}{\sigma_\nu(\alpha)}$$

$$f_\ell^{(\nu)} = \zeta_\nu(t + (2\ell - 1)\alpha) - (2\ell - 1)\zeta_\nu(\alpha) + t\rho(\alpha + \omega_\nu)$$

但し $\sigma_\nu(z) = e^{-\eta_\nu z} \sigma(z + \omega_\nu) / \sigma(\omega_\nu)$, $\zeta_\nu(z) = \zeta(z + \omega_\nu) - \eta_\nu$ はそれぞれ $\wp$ -シグマ函数, $\wp$ -ツータ函数を表わす。これらよ

り,

$$(9)_\nu \quad Y(x) = G^{(\nu)} \hat{Y}^{(\nu)}(x) (x - e_\nu)^{(\frac{0}{1} \frac{1}{-1})}$$

とおけば

$$(10)_\nu \quad G^{(\nu)} \hat{Y}^{(\nu)}(x) = G_0^{-1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_\ell(z) + y_\ell(-z) & \frac{y_\ell(z) - y_\ell(-z)}{z - \omega_\nu} \\ y_{\ell+1}(z) + y_{\ell+1}(-z) & \frac{y_{\ell+1}(z) - y_{\ell+1}(-z)}{z - \omega_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{z - \omega_\nu}{\sqrt{x - e_\nu}} \end{pmatrix}$$

$$= G^{(\nu)} (1 + Y_1^{(\nu)} \cdot (x - e_\nu) + \dots)$$

$$G^{(\nu)} = G_0^{-1} \begin{pmatrix} y_\ell(\omega_\nu) & \\ & y_{\ell+1}(\omega_\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_\ell^{(\nu)} \\ 1 & f_{\ell+1}^{(\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \sqrt{\frac{2}{\rho'(\omega_\nu)}} \end{pmatrix}$$

を得る。 ($\sqrt{\frac{2}{\rho'(\omega_\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{\mu \neq \nu} (e_\mu - e_\nu)}}$)

$x = \infty$, $z = 0$ においても全く同様に, (8) を

$$(8)_\infty \quad y_\ell(0; t, \alpha) = (-)^{\ell-1} \frac{\sigma(t + (2\ell - 1)\alpha)}{\sigma(\alpha)}$$

$$f_\ell^{(\infty)} = \zeta(t + (2\ell - 1)\alpha) - (2\ell - 1)\zeta(\alpha) + t\rho(\alpha)$$

であまか之れは

$$(9)_\infty \quad Y(x) = G^{(\infty)} \hat{Y}^{(\infty)}(x) \left(\frac{1}{x}\right)^{(\frac{0}{1} \frac{1}{-1})}$$

< 4 >

$$(10)_\infty \quad \Upsilon^{(\infty)}(x) = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G^{(\infty)} = G_0^{-1} \begin{pmatrix} y_{\ell}(0) & \\ & y_{\ell+1}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_{\ell}^{(\infty)} \\ 1 & f_{\ell+1}^{(\infty)} \end{pmatrix}$$

がわかる。

Fuchs の関係式

$$(11) \quad \text{tr} \begin{pmatrix} \ell-1 & \\ & -\ell-1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

の成立に注意すれば、以上 (5) ~ (10) によ、(4) を確かめるのは容易である。特に

$$(12) \quad \det Y(x) = p'(\alpha)^2 \frac{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}{\sqrt{(a-e_1)(a-e_2)(a-e_3)}} \frac{1}{(x-a)^2} \\ = \frac{2p'(\alpha)}{(x-a)^2} \sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$$

が従う。直接計算すれば $\det Y(x)$ は σ 函数で表示されるから、(12) は

$$(13) \quad - \frac{p'(z)p'(\alpha)}{(p(z)-p(\alpha))^2} = \frac{\sigma(z-\alpha+u)\sigma(z-\alpha-u)}{\sigma(z-\alpha)^2\sigma(u)^2} - \frac{\sigma(z+\alpha+u)\sigma(z+\alpha-u)}{\sigma(z+\alpha)^2\sigma(u)^2} \\ (u = t + 2\ell\alpha)$$

に同等である。

一般論を参照すれば、 $Y(x)$ の (i) 形式モノドロミー、(ii) 接続係数、(iii) $z=\alpha$ での Stokes 係数 (=1)、はいずれも変形パラメタ t によらないことから、次の式が成立する。

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial t} Y(x) = \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{x-a} - [Y_1^{(\alpha)}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}] \right) Y(x)$$

定義に従、 τ 函数を計算すれば

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \log \tau = p'(\alpha) \text{tr} Y_1^{(\alpha)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<5>

$$= \zeta(t+2l\alpha) + \frac{t}{2} \left(p(2\alpha) + \frac{p'(\alpha)^2}{4p'(\alpha)^2} - \frac{p''(\alpha)}{6p'(\alpha)} \right) - l \left(\zeta(2\alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2p'(\alpha)} \right)$$

$$(16) \therefore \tau(t) = \tau_l(t) = \text{const. } \sigma(t+2l\alpha) e^{h_l(t)}$$

$$h_l(t) = \frac{t^2}{4} \left(p(2\alpha) + \frac{p'(\alpha)^2}{4p'(\alpha)^2} - \frac{p''(\alpha)}{6p'(\alpha)} \right) - t l \left(\zeta(2\alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2p'(\alpha)} \right)$$

となる。(p の微分方程式と倍数公式を認めれば $h_l(t)$ の第1項は $\frac{t^2}{2} p(2\alpha)$)

式(6)からわかる通り, 我々の $Y(\alpha)$ は $l=0$ の場合から形式モノドロミー $\begin{pmatrix} l & \\ & -l \end{pmatrix}$ ずらす Schlesinger 変換で得られている。一般論によれば(文献II, (4.3)) この時商は $Y_{1,12}^{(\alpha)} = \frac{\tau_{l+1}}{\tau_l}$, $Y_{2,21}^{(\alpha)} = \frac{\tau_{l+1}}{\tau_l}$ となるが(16)からこれは直接確認される。今の場合一般論からは導かれない特殊事情として, Schlesinger 変換の効果が τ 函数の変数を有限な数 $2l\alpha$ だけずらす(本質的には)という形で現われている。このことは準周期解の τ 函数(= テータ函数)が加法公式を持つことの一つの根拠と推察されるが, 詳しいことは判っていない。例えば, 一般論の次の式(II, (6.79))

$$(17) \quad \frac{d^2}{dt^2} \log \tau_l = \frac{\tau_{l+1} \tau_{l-1}}{\tau_l^2}$$

を書き下してみると, 今の場合

$$(18) \quad \frac{d^2}{dt^2} \log \sigma(u) + \frac{1}{2} \left(p(2\alpha) + \frac{1}{4} \frac{p'(\alpha)^2}{p'(\alpha)^2} - \frac{1}{6} \frac{p''(\alpha)}{p'(\alpha)} \right) = \frac{\sigma(u+2\alpha) \sigma(u-2\alpha)}{\sigma(u)^2 \sigma(2\alpha)^2} \quad (u = t+2l\alpha)$$

という一種の加法公式を得る。(左辺 = $-p(u) + p(2\alpha)$)

他の Schlesinger 変換も，一般論の公式から読みとることが出来る。例えば点 $x=e_v$ で形式モノドロミーを $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ ，点 α で $\begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ ずらす時の τ 函数 $\tau \begin{Bmatrix} \alpha & e_v \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$ は (10)_v から

$$(19) \quad \tau \begin{Bmatrix} \alpha & e_v \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_v(t+(2l-1)\alpha)}{\sigma_v(\alpha)} \sigma(2\alpha)^l e^{h_{\alpha/2}(t)}$$

となる。