

Navier-Stokes方程式の漸近解

Asymptotic solutions of the Navier-Stokes equations---
Fractal geometry in vortex motion and flow past two rotating spheres

名大 工 桑原真二、M. U. Farooq

1. まえおき

この論文では、縮まない、粘性のない流体の渦運動と粘性流体中で回転する2つの球の2つの主題を取り扱う。そしておのこの、レイノルズ数無限大および0のばあいの漸近的性質をしらべる。

まず、縮まない、粘性のない流体の3次元渦運動の擬正準形式から近似的にヴォートンの方程式を導出する。ヴォートンが細長く変形した場合には、ヴォートンの分裂を考慮し、それに伴って特徴的時間が減少するので、時間積分におけるメッシュの短縮も考慮した。ヴォートン・モデルを2つの絡まった渦輪および3つ輪形渦輪の時間的发展の解析に適用した。

2球の中心をむすぶ軸と回転軸とが主流と平行な流れを、レイノルズ数(Re)がちいさいとして、漸近展開きりつくなき法でトルクをReの1次までもとめた。

I. 渦運動におけるフラクタル図形

2. 3次元渦運動の擬正準形式とヴォートン方程式の導出

無限に広い領域での縮まない、粘性のない流体の渦運動は、Lagrange座標 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ と時刻 t を独立変数とする位置ベクトル $\vec{x}=\vec{x}(\vec{a}, t)$ ($\vec{x}(\vec{a}, 0)=\vec{a}$)、渦度ベクトル $\vec{\omega}=\vec{\omega}(\vec{a}, t)$ の汎関数である系のハミルトニアン $H[\vec{x}, \vec{\omega}]$ を

$$\begin{aligned} H[\vec{x}, \vec{\omega}] &= \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \vec{\omega}(\vec{a}', t) \cdot (\vec{\omega}(\vec{a}'', t) * \vec{r}) d^3\vec{a}' d^3\vec{a}'' \\ &= \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{1}{r^3} \epsilon_{\lambda\beta\gamma} \omega_\lambda(\vec{a}', t) \omega_\beta(\vec{a}'', t) r_\gamma d^3\vec{a}' d^3\vec{a}'', \quad (2.1) \\ \vec{r} &= \vec{x}(\vec{a}', t) - \vec{x}(\vec{a}'', t), \quad r = |\vec{r}|, \end{aligned}$$

と定義すると、3次元渦運動は

$$\frac{Dx_\alpha}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha}, \quad (2.2)$$

$$\frac{D\omega_\alpha}{Dt} = \frac{\delta H}{\delta x_\alpha}, \quad (2.3)$$

によって記述される⁸⁾ (擬正準形式)。 (2.1) はヘリシティの半分である。

今コンパクトな渦場 ($\vec{\omega} \neq 0$ の領域の閉包が有界、閉集合) を考え、これを細胞に分割し、 $l=1, \dots, L$ と名前をつけ、各々を力学系の単位として近似する。 特性関数

$$\Lambda^3(\vec{a}, l) = \begin{cases} 1, & \vec{a} \in l\text{-細胞} \\ 0, & \vec{a} \notin l\text{-細胞} \end{cases} \quad (2.3)$$

を定義する。 そこで

$$\iiint \Lambda^3(\vec{a}, l) d^3\vec{a} = V(l), \quad (2.4)$$

は l -細胞の体積で、時間的に一定である。

細胞の運動を考える時、細胞の広がった位置ベクトル $\vec{x}(\vec{a}, t)$ ($\vec{a} | \Lambda^3(\vec{a}, l)=1$) を 1 つの位置ベクトル $\vec{X}(l, t)$ で代表し、渦度がそこに集中しているとして、

$$\vec{x}(\vec{a}, t) = \sum_l \vec{X}(l, t) \Lambda^3(\vec{a}, l), \quad (2.5)$$

$$\vec{\omega}(\vec{a}, t) = \sum_l \vec{\Omega}(l, t) V(l) \delta^3(\vec{a} - \vec{A}(l)), \quad (2.6)$$

$$\vec{X}(l, t) = \vec{x}(\vec{A}(l), t), \quad (2.7)$$

と近似する。 (2.6) の $V(l)$ は $\vec{\Omega}(l, t)$ が渦度の細胞内での平均値になるように挿入されたものである。 このように渦場を細胞に分割し、単一の位置ベクトル $\vec{X}(l, t)$ と渦度ベクトル $\vec{\Omega}(l, t)$ で表すことによって、無限連続自由度の力学系を可附番自由度の力学系で近似する方法をヴォートン・モデルとよぶことにする。

(2.1) に (2.5), (2.6) を代入し、 H を $\vec{X}(l, t)$, $\vec{\Omega}(l, t)$ の関数とみなして、それらについて 1 次の変分をとれば

$$H = \sum_l \left[\frac{\partial H}{\partial X_\alpha(l)} \delta X_\alpha(l) + \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(l)} \delta \Omega_\alpha(l) \right], \quad (2.8)$$

をうる。 また、 H の $\vec{x}$, $\vec{\omega}$ についての 1 次の変分をとり、(2.5), (2.6) の近似を行えば

$$\begin{aligned} H = \sum_l & \left[\iiint \frac{\delta H}{\delta x_\alpha(\vec{a})} \Lambda^3(\vec{a}, l) d^3\vec{a} \delta X_\alpha(l, t), \right. \\ & \left. + \iiint \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(\vec{a})} \delta^3(\vec{a} - \vec{A}(l)) d^3\vec{a} V(l) \delta \Omega_\alpha(l, t) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。ここまで (2. 8) と (2. 9) は2つの異なったルートをたどって H の変分の近似を行ったわけであるが、この両者が一致しなければならないという条件 (両立条件) を課せば

$$\frac{\partial H}{\partial X_\alpha(1)} = \iiint \frac{\delta H}{\delta x_\alpha(a)} \Lambda^3(\vec{a}, 1) d^3\vec{a}, \quad (2. 10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(1)} = \iiint \frac{\delta H}{\delta \omega_\alpha(a)} \delta^3(\vec{a} - \vec{A}(1)) d^3\vec{a} V(1), \quad (2. 11)$$

が成り立つ。

次に (2. 4) に $\iiint d^3\vec{a} \delta^3(\vec{a} - \vec{A}(1)) V(1)$ の、(2. 5) に $\iiint d^3\vec{a} \Lambda^3(\vec{a}, 1)$ のオペレーションをほどこすと結局

$$\frac{DX_\alpha(1, t)}{Dt} = \frac{1}{V(1)} \frac{\partial H}{\partial \Omega_\alpha(1)}, \quad (2. 12)$$

$$\frac{D\Omega_\alpha(1, t)}{Dt} = \frac{1}{V(1)} \frac{\partial H}{\partial X_\alpha(1)}, \quad (2. 13)$$

をうる。(2. 1) に (2. 12), (2. 13) を代入し、積分を実行すると

$$H = \frac{1}{8\pi} \sum_{1'} \sum_{1''} \frac{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}}{R(1', 1'', t)^3} \Omega_\alpha(1', t) \Omega_\beta(1'', t) R_\gamma(1', 1'', t) \\ V(1') V(1''), \quad (2. 14)$$

$$R_\alpha(1', 1'', t) = X_\alpha(1', t) - X_\alpha(1'', t), \quad R(1', 1'', t) = |\vec{R}(1', 1'', t)|$$

となる。ここで $1' = 1''$ の寄与は $0/0$ となり、総和においてこの項はのぞくものとする。(2. 14) を (2. 12), (2. 13) に代入しベクトル形で書けば

$$\frac{D\vec{X}(1, t)}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{1'}' \frac{V(1')}{R(1', 1'', t)^3} \vec{\Omega}(1', t) * \vec{R}(1, 1', t), \quad (2. 15)$$

$$\frac{D\vec{\Omega}(1, t)}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{1'}' V(1') \left[\frac{1}{R(1, 1', t)^3} \vec{\Omega}(1, t) * \vec{\Omega}(1', t) \right. \\ \left. - \frac{3}{R(1, 1', t)^5} \vec{R}(1, 1', t) \{ \vec{\Omega}(1, t) \cdot (\vec{\Omega}(1', t) * \vec{R}(1, 1', t)) \} \right]$$

$$\vec{R}(l, l', t))\}]. \quad (2.16)$$

をうる。ここで $\sum$ につけた ' は $l' = 1$ の項をのぞくことを意味する。これらがヴォートンの基礎方程式である。

3. 分裂するヴォートンと時間メッシの短縮

始めは割合にずんぐりしたヴォートンも、ヴォートン間の非線形相互作用が強くなると、渦糸のひきのばし効果のため、急速に細長いヴォートンに成長する。このような状況ではヴォートンを単一の位置ベクトルと渦度ベクトルで表すのでは近似が悪く、ヴォートンの分裂を考える必要が生ずる。ヴォートンは、実際には時間の経過と共に複雑な変形をうけるであろう。しかし、その変形を簡単に長さと断面積の変化で表しうると考える。すなわち、各ヴォートンに相当長さ、相当断面積という概念を導入し、ヴォートンの変形を大局的に考察する。今1つのヴォートンに着目し、その相当長さ(渦度に平行)を $\lambda(t)$ と相当断面積を $\sigma(t)$ とすれば、断面を円形と仮定した時の相当直径は $2\sqrt{\sigma(t)/\pi}$ となる。そこで(相当)太さ $Th(t)$ を

$$Th(t) = \frac{2\sqrt{\sigma(t)/\pi}}{\lambda(t)}, \quad (3.1)$$

で定義する。

ヴォートンを渦糸の一部と考えれば、その断面積と渦度の積すなわち循環および断面積と長さの積すなわち体積は時間的に不変と考えられる。そこで

$$\sigma(t) \omega(t) = \Gamma = \text{不変}, \quad (3.2)$$

$$\sigma(t) \lambda(t) = V = \text{不変}, \quad (3.3)$$

という条件を課すことにする。初期に Γ, V は与えられるから時々刻々の $\omega(t)$ を計算すれば、(3.2), (3.3) によって各時刻の $\sigma(t)$ と $\lambda(t)$ が、したがって $Th(t)$ も(3.1)によって計算することができる。

実際の計算にあたっては $Th(t)$ に下限 Th_b をもうけ、 $Th(t)$ が Th_b に達したならば、ヴォートンは分裂すると考える。縦方向に2つの等しいヴォートンに分裂するとすれば、そのヴォートンは消滅して、新に $\vec{X}$ から $\vec{\Omega}$ の正負の側に相当長さの $1/4$ の位置に、渦度が(分裂前と同じ、相当長さが半分、相当断面積が同じ、2つのヴォートンが発生すると考える。各ヴォートンについてこのような評価を行って、計算を進めるわけである。

ヴォートンの分裂を考えることは、流れの場の特徴的長さが減少することを意味する。このような状況では、特徴的時間も減少すると考えられる。ヴォートンの特徴的時間を評価すると $|\Omega(l, t)|^{-1}$ である。そこで

$$\omega_{\max}(t) = \max_a |\omega(a, t)|, \quad (3.4)$$

を定義し、初期の $\omega_{\max}(0)$ が2倍になったら、初期の時間メッシュ $DT(0)$ の半分を新に時間メッシュとして、以下同様に積分を実行するものとする。各時刻の時間メッシュは

$$DT(t) = DT(0)/2^{\text{Int}(\log_2(\omega_{\max}(t)/\omega_{\max}(0)))}, \quad (3.5)$$

である。Int は整数化のオペレーターで少数部分をのぞくことを意味する。

4. 絡まった2つの渦輪

半径 a , 断面半径 b , 循環 Γ の、同形、同じ強さの2つの渦輪が、各渦輪を含む面が直交し、互いの中心を貫くような初期配位から、それらの発展をヴォートン・モデルで計算する。規格化、初期パラメーター等は前回¹⁰⁾と同じで、次のようにとる。

$$\vec{x}/a, \quad t/(a^2/\Gamma), \quad \vec{v}/(\Gamma/a), \quad \vec{\omega}/(\Gamma/a^2), \quad (4.1)$$

$$b/a = 0.1, \quad DT(0) = 0.01, \quad Th(0) = 2/\pi = 0.6366..., \quad NV(0) = 20. \quad (4.2)$$

太さ比の下限は $Th_b = 0.5$ ととる。数値積分は変形 Euler 法、すなわち、(3.17), (3.18) の右辺で時間微分を計算するとき、その時刻とその1ステップ先のそれ(近似値)の平均値をとる方法で、倍数精度で $t=0 \sim 5.0725$ まで行った。

第1図は渦輪の発展を3面図で示してある。図中の NV は1つの渦輪にふくまれるヴォートンの数、 DT はその時刻における時間メッシュを示す。以下、エンストロフィー(第2図)、ヘリシティ(第3図)、運動エネルギー(第4図)、運動量(第5図)、角運動量(第6図)、全渦度(第7図)、初期値で規格化された L_2 ノルム $(Es(t)/Es(0))^{0.5}$ 及びマックスимум・ノルム $(\omega_{\max}(t)/\omega_{\max}(0))$ の逆数(第8図)の時間発展が示されている。第9図にはヴォートンの最小長さ(横軸)と渦輪全体の長軸(縦軸)の各時刻における値の軌跡が両対数グラフで示してある。

なお、上の積分量は

$$Es(t) = \frac{1}{2} \iiint \vec{\omega}(a,t)^2 d^3\vec{a}, \quad (4.3)$$

$$Hl(t) = \iiint \vec{v}(a,t) \cdot \vec{\omega}(a,t) d^3\vec{a}, \quad (4.4)$$

$$E(t) = \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{1}{r} \vec{\omega}(a,t) \cdot \vec{\omega}(a',t) d^3\vec{a}, \quad (4.5)$$

$$P_\alpha(t) = \frac{1}{2} \iiint \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta(a,t) \omega_\gamma(a',t) d^3\vec{a} d^3\vec{a}', \quad (4.6)$$

$$AP_{\alpha}(t) = \frac{1}{2} \iiint (\dot{x}_{\alpha}(a, t)^2 - \dot{\vec{x}}(a', t)^2) \omega_{\alpha}(a, t) d^3\vec{a}, \quad (4.7)$$

$$T\vec{0}(t) = \iiint \vec{\omega}(a, t) d^3\vec{a}, \quad (4.8)$$

を総和の形になおして計算した。(4.5)では適当な近似で、自己エネルギーを考慮した。(4.7)の右辺では和の記号はつかわれていない。

5. 3つ輪形の渦糸

初期に渦糸の中心線が

$$\begin{aligned} x &= a(1+c_1 \cos(3\theta/2))\cos\theta, \\ y &= a(1+c_1 \cos(3\theta/2))\sin\theta, \\ z &= ac_2 \sin(3\theta/2), \end{aligned} \quad (5.1)$$

で表される渦糸をかながえる。ここで、

$$b/a=0.1, \quad c_1=0.2, \quad c_2=0.2, \quad DT(0)=0.02, \quad (5.2)$$

とおく。 b は初期における渦糸の断面の半径であり、 $DT(t)$ は時間積分における変化するメッシュである。

第10図以下に、前節同様に渦糸の時間発展の3面図、エンストロフィー、ヘリシティ、エネルギー、運動量、角運動量、全渦度、渦度ノルムの逆数の時間発展、ヴォートン全体の長さ対最小ヴォートンの長さの両対数軌跡が示してある。

6. むすび

Iでは、3次元渦運動において、渦の位置ベクトルと渦度の対応する成分を正準共役変数にえらんだ擬正準形式において、渦場の細胞分割を行ない、位置ベクトルと渦度に適当な近似を行えば、ヴォートン近似がえられることを示した。

渦の引伸し効果によって、始めずんぐりしたヴォートンも時間の経過と共に急速に細長いヴォートンになるので、ヴォートンの縦分裂を考慮した。各ヴォートンに相当太さ比を定義し、太さ比に下限をもうけ、それに達すると縦に分裂するという条件を課した。ヴォートンの分裂は流れの特徴的長さの減少を意味し、それにもなって特徴的時間も減少するから、時間積分にあたって、時間メッシュも減少させる必要がある。この流れの特徴的時間は $\omega_{\max}(a, t)^{-1}$ であることが評価できる。そこで流れの中の渦度の最大値の逆数が半分になると時間メッシュを半分にするような時間積分をとった。

以上の方法を絡まった2つの渦輪の運動の解析に $t=0 \sim 5.0725$ の間でもちいた。 $t=4$ 付近からヴォートンの数が急速にふえ、 $t=5$ 少し前から時間メッシュの減少が急速になっ

た。したがって $t=5\sim 5.0725$ の計算の方が $t=0\sim 5$ の計算時間より長くなるという結果になった。計算の最終段階 $t=5.0725$ においてヴォートンの数は76、 $DT=0.0000390625$ であった。

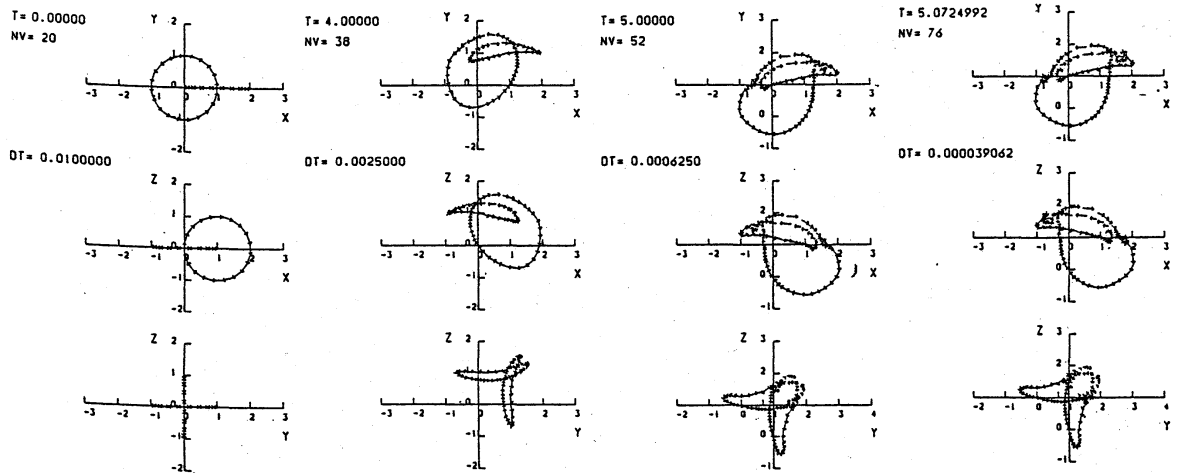
第1図の $t>5$ の図を見ても、2つの渦輪のつなぎかえは起こっていないように思われる。2つの渦輪が接近した付近では非常に複雑な変形が起こっている。しかし、他方の渦輪からの効果よりも、自分自身からの効果によってより多く変形しているように見える。この力学系の保存量、全エネルギー、全運動量、全角運動量、全渦度の保存は大体満足しうるものであるが、ヘリシティーは $t=2$ 付近までは一定で、それ以後は振動する。その原因はまだわからない。第9図にはヴォートンの最小長さと渦輪全体の長さの時間的軌跡が両対数グラフで示してある。時間発展する曲線が自己相似性をもつ理想的フラクタル曲線に収束とすれば、その両対数グラフの漸近的傾斜が $1-D$ を与える。今のばあい、渦糸は勿論理想的フラクタル曲線に収束しないが、上のグラフがある意味のフラクタル次元を表すものとして、上の図からフラクタル次元を求めると $D=1.05$ となる。渦度のノルムとして、 L_2 ノルム及び L_∞ ノルムを考える。これらを初期値で規格化し、逆数をとったものの時間的发展が第8図に示してある。これから $t=5$ 少し先で、これらの量が0になるように思われる。すなわち渦度のノルムが発散する傾向がよみとれる。これはEuler方程式の爆発の兆候と考えられよう。

第10図を見ると3つ輪形の渦のばあいには、 $t=2$ あたりでつなぎ変えがおこっているように見える。このばあいには、運動量、全渦度の不変性はよいが、ヘリシティー、エネルギー、角運動量の不変性はよくないことがわかる(第11~15図)。

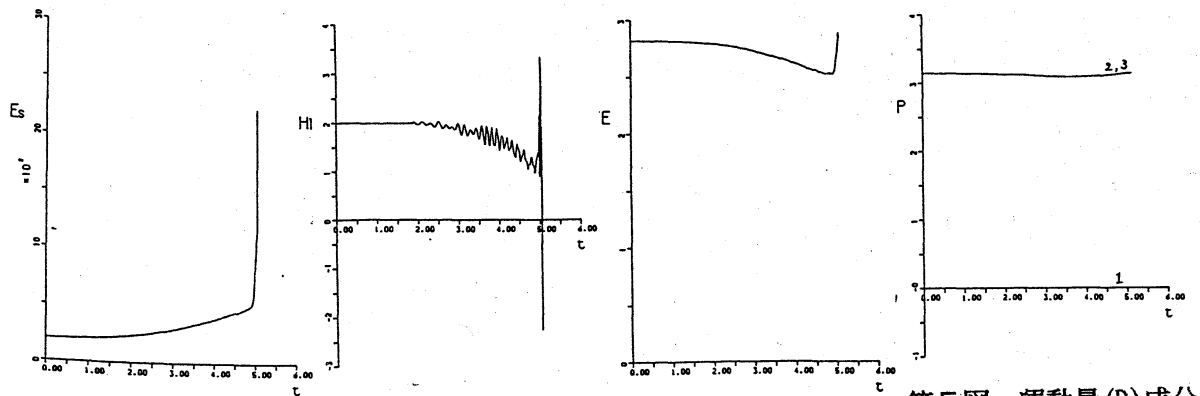
参考文献:

- 1) J.T.Beale, T.Kato and J.Majda: Comm. Math. Phys. 94 (1984) 553.
- 2) J.T.Beale and A.Majda: Math. Computation 39 (1983) 1.
- 3) J.T.Beale and A.Majda: Math. Computation 39 (1983) 29.
- 4) A.J.Chorin: Comm. Math. Phys. 83 (1982) 517.
- 5) S.Kuwabara: Proc. of the Symposium on Mech. for Space Flight-1983 (1984) 15.
- 6) S.Kuwabara: Proc. of the Synposium on Mech. for Space Flight-1984 (1985) 31.
- 7) 桑原真二: 第17回乱流シンポジウム講演論文集 (1985) 145.
- 8) S.Kuwabara: J. Phys. Soc. Japan 54 (1985) 4881.
- 9) S.Kuwabara: Proc. of the Synposium on Mech. for Space Flight-1985 (1986) 11.
- 10) 桑原真二: 数理研講究録 (1986.1 研究集会) 発表予定.
- 11) 桑原真二: 第18回乱流シンポジウム講演論文集 (1986) 発表予定.
- 12) A.Leonard: in Turbulent Shear Flows 2 (ed. by L.J.S.Bradbury et al., Springer, 1980).
- 13) B.Mandelbrot: in Turbulence and NS Equation (ed. by R.Teman, Springer, 1971) 1212.
- 14) E.A.Novikov: Soviet Phys., JETP 57 (1983) 566.
- 15) P.G.Saffman: in Transition and Turbulence (Academic Press, 1981) 149.

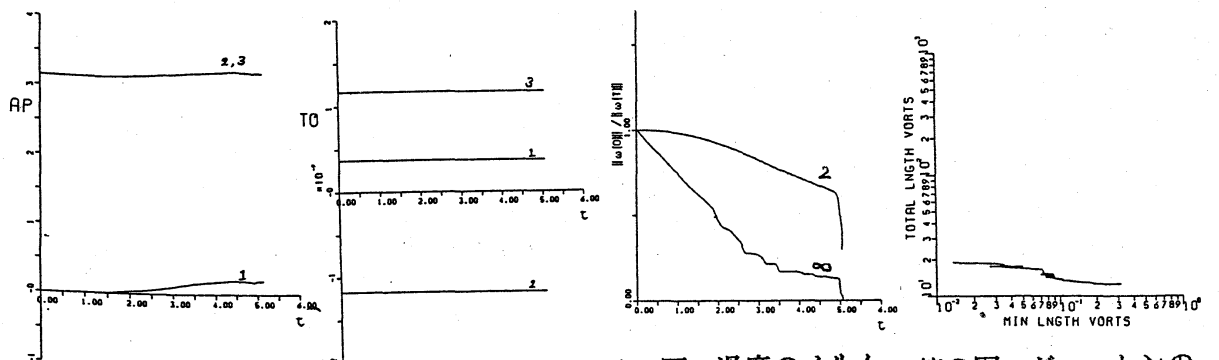
7



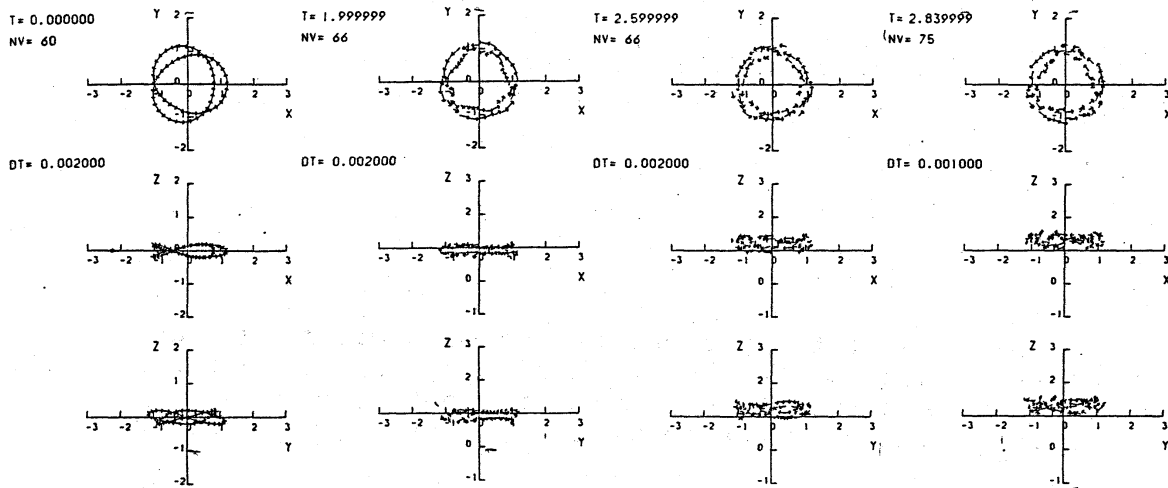
第1図. 絡まった2つの渦輪の時間的发展 (3面図)



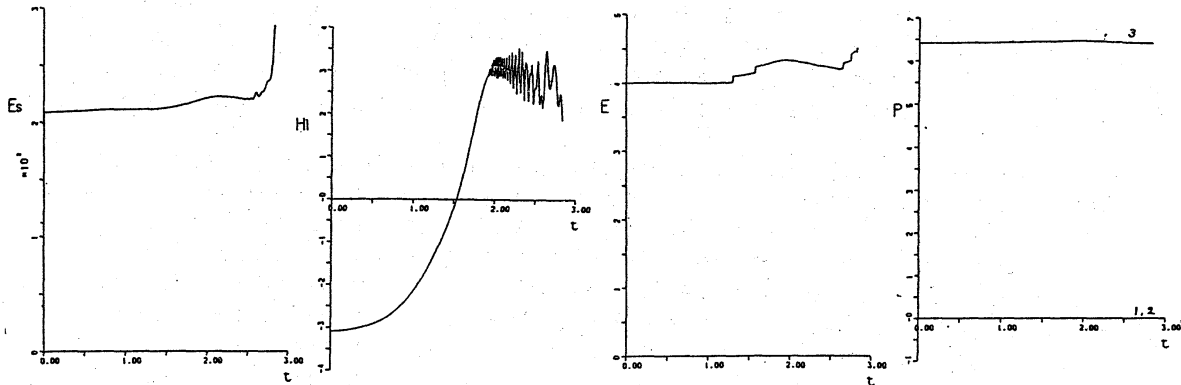
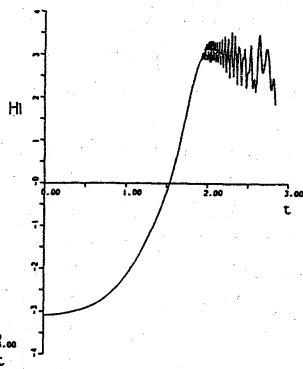
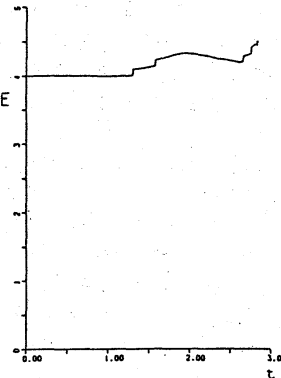
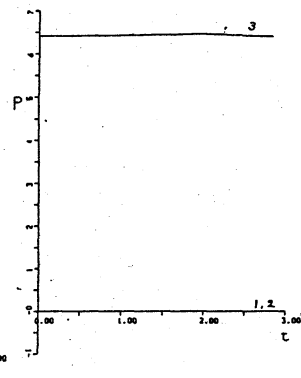
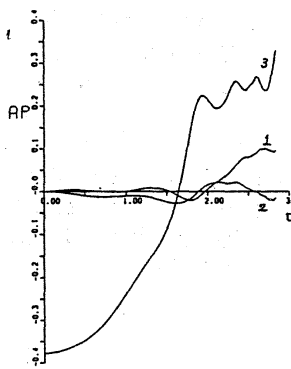
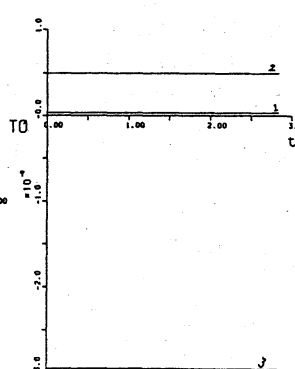
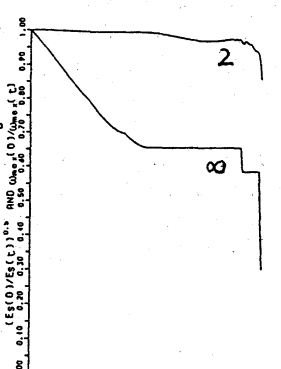
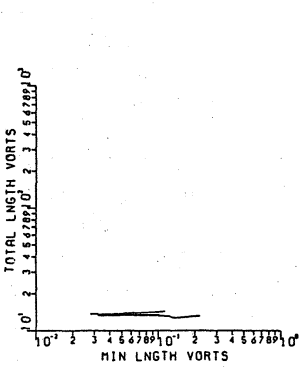
第2図. エンストロフィ (Es) の時間的发展
 第3図. ヘリシティ (H1) の時間的发展
 第4図. 運動エネルギー (E) の時間的发展.
 第5図. 運動量 (P) 成分の時間的发展.
 (1, 2, 3) : 成分



第6図. 角運動量 (AP) 成分の時間的发展.
 第7図. 全渦度 (TO) の時間的发展.
 第8図. 渦度のノルムの逆数の時間的发展.
 2: L_2 ノルム, ∞ : L_∞ ノルム.
 第9図. ヴォートンの最小長さと渦輪の長さの時間的軌跡.



第10図. 3つ輪形の渦輪の時間的发展 (3面図)

第11図. エンストロフ
ー(Es)の時間的发展第12図. ヘリシティ
ー(H)の時間的发展第13図. 運動エネル
ギー(E)の時間的发展第14図. 運動量(P)
成分の時間的发展第15図. 角運動量
(AP)成分の時間的发展第16図. 全渦度
(TO)の時間的发展第17図. 渦度のノル
ムの逆数の時間的发展第18図. ヴォートン
の最小長さと渦輪の長
さの時間的軌跡

II. Axisymmetric Flow Past Two Rotating Spheres at Small Non-Zero Reynolds Number

6. Introduction

Solution of the problem of hydrodynamic torque on a sphere induced by the rotation of another sphere for an arbitrary separation between their centers and ratio of radii, obtained by the analysis of Stokes equations, is^{1,2)}

known, but unknown when analysed by the Navier-Stokes equations. In the Stokes solutions, the superposition of a uniform flow does not alter the value of the torque, but from the physical point of view one can imagine that the uniform flow may have some effect on the rotation of a sphere which in turn on the induced torque of the other non-rotating sphere. This argument indicates that the physical behaviour can not be justified by the Stokes equations and requires analysis which are based on the Navier-Stokes equations.

If the Reynolds number (Re) is small but non-zero, one may apply the method of Matched asymptotic expansions which requires two regions; the inner and the outer regions surrounding the spheres. If the spheres are close then we can expect a strong rotational effect to the non-rotating sphere and consequently the study of inner region of expansions seems to be more interesting than that of the outer one. In this study we consider the location of the spheres so close that each lies in the inner region of expansion of the other i.e. the spheres lie in the overlap region of two regions.

3)

Kaneda and Ishii³⁾, gave a general formula for calculating the force and torque of $O(Re)$ on a sphere. They also gave the asymptotic expression of the force on one of the spheres for large separation. In our previous studies by applying their procedure we calculated the force on a sphere for the leading

4)

5)

and trailing positions for the equal and for an arbitrary sized spheres. In the present study, we will calculate the torque on a sphere induced by the rotation of the other for an arbitrary separation between two equal spheres. The flow is assumed axisymmetric.

7. Calculation of Torques upto $O(Re)$

For the flow past two spheres with one rotating, the Navier-Stokes and continuity equations and the boundary conditions in their dimensionless velocity-pressure vector form can be written as:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p &= Re(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ on } S_A, \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \text{ on } S_B, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{e} \text{ at infinity,} \\ Re &= \frac{Ua}{\nu},\end{aligned}\quad \text{-----(1)}$$

where Re is the Reynolds number based on the radius a of the non-rotating sphere and ν is the kinematic viscosity of the fluid.

In the Matched asymptotic expansions procedure,

$(\mathbf{u}, p)$ can be expanded for the inner and outer regions and the torque on the sphere A(non-rotating) can be expanded as: 3)

$$\begin{aligned}t^A &= (t^A)' / 6\pi\mu Ua^2 \\ &= t_0^A + Re t_1^A + O(Re).\end{aligned}\quad \text{-----(2)}$$

where t_0^A and t_1^A are respectively the zeroth and first-order torques (dimensionless) on A due to the fields $(\mathbf{u}_0, p_0)$ and $(\mathbf{u}_1, p_1)$. Using these expansions, (1) can be written as:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u_0 - \nabla p_0 &= 0, \\
\nabla \cdot u_0 &= 0, \\
u_0 &= 0 \text{ on } S_A, \\
&= \Omega \times r \text{ on } S_B, \\
u_0 &= e \text{ at infinity,}
\end{aligned}
\tag{3}$$

the Stokes equations, and the first-order field (u_1, p_1) ,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u_1 - \nabla p_1 &= (u_0 \cdot \nabla) u_0, \\
\nabla \cdot u_1 &= 0, \\
u_1 &= 0 \text{ on } S_A \text{ and } S_B.
\end{aligned}
\tag{4}$$

In principal, one can obtain the first-order torque by solving the first-order field (u_1, p_1) . For convenience, we introduce a Stokes field defined by

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \hat{u} - \nabla \hat{p} &= 0, \\
\nabla \cdot \hat{u} &= 0, \\
\hat{u} &= \hat{W} \times r \text{ on } S_A, \\
&= 0 \text{ on } S_B, \\
\hat{u} &= 0 \text{ at infinity.}
\end{aligned}
\tag{5}$$

where $\hat{W}$ is an arbitrary vector, then by Kaneda and Ishii one can obtain t_1^A by the formula:

$$6\pi[(\hat{W})_i (t_1^A)_i] = I_1 - I_2 - Y_1 + Y_2,$$

$$Y_2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{V_L} u_0 \times (\nabla \times u_0) \cdot \hat{u} \, dV,$$

where V_L is the volume bounded by the spheres' surfaces and by the outer surface S_L of radius L . The Integrals I_1 , I_2 and Y_2 are taken on S_L (see Ref.3-5).

For the axisymmetric flow case (6) can be written in cylindrical polar co-ordinates (ρ, ϕ, z) as

$$\begin{aligned} 6\pi(t_1^A)_1 &= 6\pi(t_1^A)_z \\ &= 2\pi \int_{V_L'} \frac{1}{\rho^2} \hat{\chi} \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(\rho, z)} d\rho dz, \end{aligned}$$

----- (7)

Formula (7) can be obtained defining the velocity as, $u = u_0 + u_t + u_r$ where t and r respectively refer to translational and rotational velocities. For the axisymmetric flow case u_0 and u_r can be expressed in terms of Stokes Stream function. Substituting the values of u_0 and a similar expression for $\hat{u}$ which is the rotational velocity, in the integrand of (6) one can obtain (7) by noting that the terms perpendicular to ϕ are zero. The surface integrals I_1 , I_2 and y on S_L in (6) vanishes by noting the integrand behaviour. For the flow past two spheres, one may use the bi-polar co-ordinates $(1, 4-8)$ if the spheres are not in contact, and tangent co-ordinates $(2, 8)$ if they are in contact.

i) Spheres Not in Contact

For the two equal spheres and not in contact (7) can be written in the following form:

$$\begin{aligned} (t_1^A)_z &= \frac{2}{3} \int_0^\alpha \int_0^\pi \frac{1}{\rho^2} \chi^A \frac{\partial(\psi, \chi^B)}{\partial(\zeta, \eta)} d\eta d\zeta, \\ \alpha > 0 \text{ and } \frac{\partial(\psi, \chi^B)}{\partial(\zeta, \eta)} &= \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \frac{\partial\chi^B}{\partial\eta} - \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\chi^B}{\partial\zeta}, \end{aligned}$$

----- (8)

here ψ and χ ($\chi = \rho v$) are the Stokes Stream functions respectively due to translation and rotation of the spheres and v is the velocity in the direction of ϕ . These Stream functions are known^{1,6)} in their exact forms and particularly

for the case of equal spheres⁷⁾. Using them in (8) the double integral is evaluated for various values of α from which the separation (d) between the spheres centers can be obtained. The integral is evaluated, using a subroutine AQ2DS of Nagoya University Computer Center, within an

accuracy of absolute error 10^{-5} and relative error of 10^{-2} . Equation (8) can not give the results when the spheres are in contact ($\alpha = 1$).

ii) Spheres in Contact

For the spheres in contact, (7) can be expressed in tangent co-ordinates which can be written as:

$$(t_1^A)_z = \frac{1}{6} \int_0^1 \int_0^\infty \frac{(\zeta^2 + \eta^2)^2}{\eta^2} \bar{\chi}^A \frac{\partial(\bar{\psi}, \bar{\chi}^B)}{\partial(\zeta, \eta)} d\eta d\zeta \quad (9)$$

$$\bar{\psi} = \eta(\zeta^2 + \eta^2)^{-3/2} \int_0^\infty \left[\frac{1+2k-e^{-2k}}{k+\sinh(k)} \cosh(k) \cosh(k\zeta) - \frac{2+2k+k^{-1}(1-e^{-2k})}{k+\sinh(k)} \cosh(k) \zeta \sinh(k\zeta) \right] J_1(k\eta) dk, \quad (9a)$$

$$\bar{\chi}^A = \eta(\zeta^2 + \eta^2)^{-1/2} \int_0^\infty \frac{\sinh(m(1-\zeta))}{\sinh(2m)} e^{-m} J_1(m\eta) dm, \quad (9b)$$

$$\bar{\chi}^B = \eta(\zeta^2 + \eta^2)^{-1/2} \int_0^\infty \frac{\sinh(n(\zeta+1))}{\sinh(2n)} e^{-n} J_1(n\eta) dn. \quad (9c)$$

(2,8)

The Stokes stream functions $\bar{\psi}$ and $\bar{\chi}$ are known in exact form for the equal spheres. Using these functions in (9), the values of torque can be obtained. Since the functions are given in integral forms (9a-9c), the calculations of torques for the spheres at contact requires the evaluations of fifth integral which might effect the accuracy.

8. Results and Discussion

Using (2), torques t_L and t_T upto the $O(Re)$ on the non-rotating sphere induced by the rotation of the other, for the leading and trailing positions of a uniform flow are determined for the large and small separation d/a between the spheres centers. The torque t_0 (which is same for the leading

and trailing positions) is calculated from the known formula

given by Jeffery. The first-order torques t_L and t_T are

calculated using (8) (equation (8) gives the value for the leading position and for the trailing position, the direction of the uniform flow is reversed). These results in their non-dimensional forms are given in Figure I. for the leading

position (for the trailing we have $t_T = -t_L$) together with the Stokes torque (t_0) for $d \geq 3.0$.

The general behaviour of t_1 is the same as

that of t_0 , i.e. they

decrease as the spheres separate and the values of induced torques vanish for large separation. However, for small d , t_1 is smaller than t_0

but larger at d roughly greater than 4.5. In the present study, we could calculate t_1 for d

as small as 3.0. For d less than this value, it was difficult to calculate t_1 due to

the excess of time require to evaluate the integral of (8).

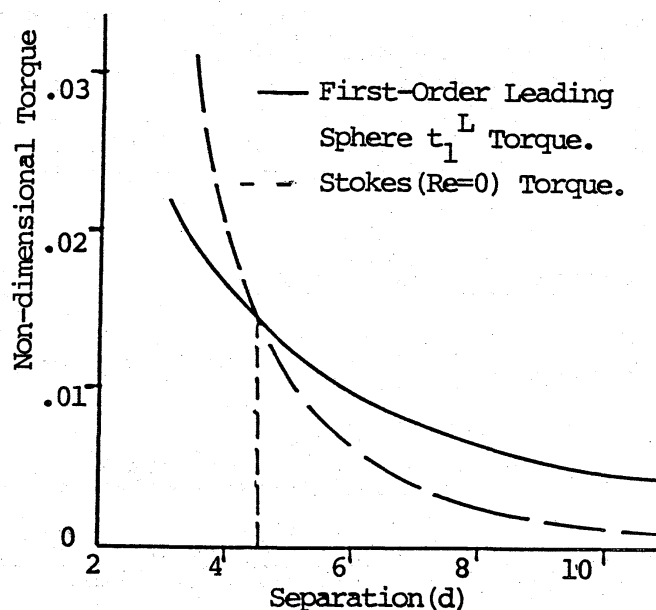


Fig.I. Non-dimensional First-Order Torque (—) for the Leading Position of Sphere together with the Stokes Solution (---) Jeffery (1915) Vs Separation (d).

The same procedure can be applied to obtain the torque at the contact where $d=2.0$ and $\alpha=1$ (if desired) by evaluating the integral in (9)

In the conclusion we remark, that the effect of small non-zero Reynolds number ($Re \ll 1$) was to increase the hydrodynamic torque on the non-rotating sphere induced by the rotation of the other sphere, when the former sphere lies in the leading position of a uniform flow, and to decrease when it lies in the trailing position; and the difference

between leading and trailing positions ($D = t_f^L - t_f^T$) was a non-zero value equal to 2 times the Re times the value at leading position.

References

1. Jeffery: Proc. Lond. Math. Soc. Ser.2 14(1915) 327.
2. Takagi: JPSJ.36(1974).
3. Kaneda and Ishii: J. Fluid Mech. 124(1982) 209.
4. Farooq: RIMS 539(1984) 226
5. Farooq and Kaneda: JPSJ 54(1985) 2477.
6. Payne and Pell: JFM 7(1960) 529.
7. Stimson and Jeffery: Proc. R. Soc. London A. 111(126) 110.
8. Colley and O'Neill: Proc. Camb. Phil. Soc. 66(1969) 407.

Continuation of Equation(8):

$$\psi = (\cosh \zeta - \cos \eta)^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cosh(n-0.5)\zeta + C_n \cosh(n+1.5)\zeta] \frac{(P_{n-1}(\cos \eta) - P_{n+1}(\cos \eta))}{n-1} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} A_n &= -(2n+3)k \frac{2(1-e^{-(2n+1)\alpha}) + (2n+1)(e^{2\alpha}-1)}{2 \sinh(2n+1)\alpha + (2n+1) \sinh 2\alpha}, \\ B_n &= (2n-1)k \frac{2(1-e^{-(2n+1)\alpha}) + (2n+1)(1-e^{-2\alpha})}{2 \sinh(2n+1)\alpha + (2n+1) \sinh 2\alpha}, \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \rho &= \frac{\sin \eta}{\cosh \zeta - \cos \zeta}, \\ z &= \frac{\sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \eta} \end{aligned} \right.$$

$$k = n(n+1)/[\sqrt{2} (2n-1)(2n+1)(2n+3)],$$

$$\chi^B = (\cosh \zeta - \cos \eta)^{-1/2} \sin \eta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh(m+0.5)(\zeta+\alpha)}{\sinh(2m+1)\alpha} e^{-(2m+1)\alpha} P_m^1(\cos \eta),$$

$$\chi^A = (\cosh \zeta - \cos \eta)^{-1/2} \sin \eta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sinh(i+0.5)(\alpha-\zeta)}{\sinh(2i+1)\alpha} e^{-(2i+1)\alpha} P_i^1(\cos \eta). \quad (8b,c)$$